

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

## Filtros do tipo IIR

### Infinite Impulse Response

Prof. Sérgio S Furuie

Referência específica: cap. 4 do Semmlow

EPUSP PTC/LEB - S.Furuie

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

## IIR

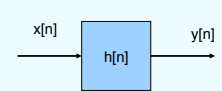
Filtros IIR que sejam:

- realizáveis
- estáveis

$$h[k] = 0 \quad k < 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

$$a_0 = 1$$

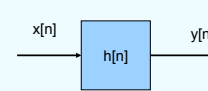
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$


EPUSP PTC/LEB - S.Furuie

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

## IIR: filtragem offline

1. Usar filtros analógicos bem conhecidos: Butterworth, Chebyshev, ...
  - Módulos das funções de transferência
  - Filtrar no domínio da freq.
  - Inversa da TDF
2. Exemplo: filtrar  $x[n]$  por um passa-baixa



EPUSP PTC/LEB - S.Furuie

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

## Ex. passa baixa Butterworth

Solução no domínio da frequência

- 1) Obter  $X[k]=FFT\{x[n]\}$
- 2)  $Y[k]=|H[k]| \cdot X[k]$
- 3)  $y[n]=IFFT\{Y[k]\}$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

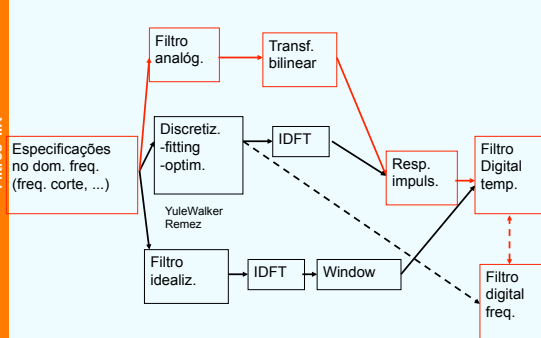
$$|H[k]|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{k_c}\right)^{2N}}$$

- + fase não é alterada
- + filtragem eficiente
- não serve p/ tempo real

EPUSP PTC/LEB - S.Furuie

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

## síntese de filtros IIR p/ tempo real



EPUSP PTC/LEB - S.Furuie

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

## IIR: projeto por transf. bilinear

A partir de filtros analógicos ( $\Omega$ :radianos/s) : mapeamento p/ discreto ( $\omega$ ,  $f_s=1/T$ )

$$s \rightarrow \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}$$

$$j\Omega \rightarrow \frac{2(1-e^{-j\omega})}{T(1+e^{-j\omega})}$$

$$\Omega \rightarrow \frac{2}{T} \operatorname{tg}(\omega/2)$$

- $s=j\Omega$  é mapeado p/  $|z|=1$
- $\operatorname{Re}(s)<0 \Rightarrow |z|<1$  (estável)

Portanto, dadas ordem do filtro e freq. de corte desejada (discreta)  $\omega_c$ :

- 1) obter a frequência de corte correspondente ( $\Omega_c$ );
- 2) projetar o filtro analógico estável;
- 3) aplicar transf. Bilinear para obter os coef. do filtro

EPUSP PTC/LEB - S.Furuie

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

### passa baixa:IIR Butterworth

$$|H(w)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{w}{w_c}\right)^{2N}} \Rightarrow H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

Transf. bilinear (s=>z)

- 1) Desejados: N e  $w_c$
- 2) Obter  $\Omega_c$  (warp)  $\Omega_c \rightarrow \frac{2}{T} \text{tg}(w_c / 2)$
- 3) Obter os polos  $s_k$   $s_k = \Omega_c e^{j\pi(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N})}$
- 4)  $H_a(s)$  com os polos do lado esquerdo do plano.  $k = 1, 2, \dots, 2N$
- 5) Transf. bilinear=> H(z)
- 6) H(z) => h[k] => IIR

$$H_c(s) = \frac{G}{(s - p_1) \dots (s - p_N)}$$

$$s \rightarrow \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})}$$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 7

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

### Outros tipos de filtros por transformação do passa-baixa

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 8

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

### IIR Butterworth no tempo

- Ou simplesmente usar Matlab
  - [b,a]=butter(8, 70/500)
  - filter( b,a,ecg)

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 9

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

### Aplicações práticas

Implementações disponíveis p. ex. em Matlab (parâmetros: wp (passagem), ws (rejeicao ou stop), rp (ripple na passagem), rs(ripple no stop))

- Butterworth – filtro monotônico, maximamente plano, sem ondulações
  - [ordem, wn]=buttord(wp, ws, rp, rs)
  - [b,a]=butter(ordem,wn,'ftype')
- Chebyshev 1 – ondulações somente na banda de passagem, com rápida queda
- Chebyshev2 – monotônica na passagem e ondulações na banda de rejeição
- Elíptica – filtro de ordem baixa com ondulações na passagem e rejeição

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 10

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

### Usando software

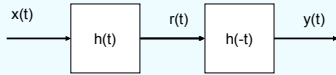
EPUSP PTC/LEB - S.Furule 11

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

### Exemplos de filtros IIR

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 12

### Convertendo filtros IIR em fase 0



$$Y(w) = H(w)H(-w)X(w)$$

se  $h(t)$  : real

$$Y(w) = H(w)H^*(w)X(w)$$

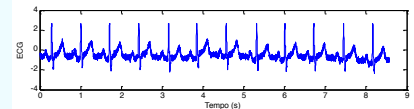
$$= |H(w)|^2 X(w)$$

Processamento off line: não-causal  
> `y=filfilt(b,a,x)`

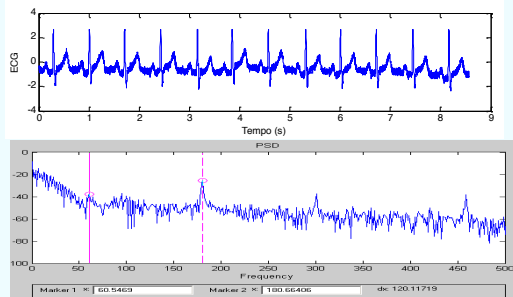
### Estudo de Caso

Dado um ECG com flutuações de baixa-frequência, ruído de alta-frequência e interferência de 60 Hz, projetar um filtro digital que remova os artefatos.

- $f_a=1000$  Hz
- $N=8568$  amostras
- $T=8,568$  s



### ECG: tempo e dens. espec. pot.



- passa-baixa em 70 Hz
- passa-alta em 0.05 Hz
- comb em 60, 180, 300, 420

### filtro passa-baixa

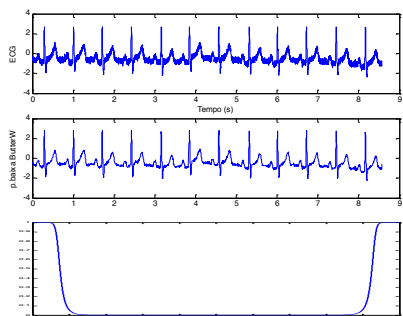
- filtro de Butterworth (max. flat)
- $f_c=70$  Hz
- ordem=8
- domínio da freq. => só na ampl.

$$|H[k]|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{k_c}\right)^{2N}}$$

- 0) zero-pad  $x[n]$  p/  $N$  pontos
- 1) Obter  $X[k]=FFT\{x[n]\}$
- 2) Obter  $|H[k]|$ ,  $k=1, N/2+1$  onde  $k_c=f_c(N/f_a)$
- 3) espelhar =>  $|H[k]|$ ,  $k=1, N$
- 4)  $Y[k]=|H[k]| \cdot X[k]$
- 5)  $y[n]=IFFT\{Y[k]\}$

### filtro passa-baixa Butterworth

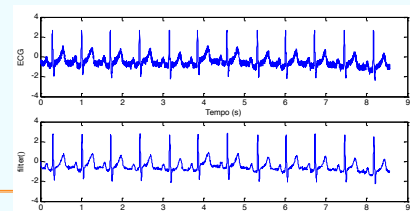
- implementado no domínio da freq.

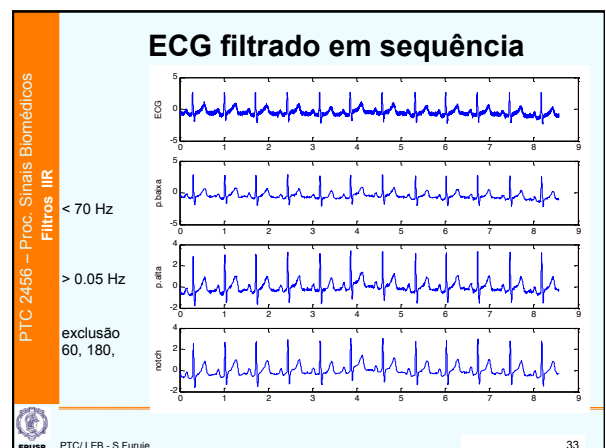
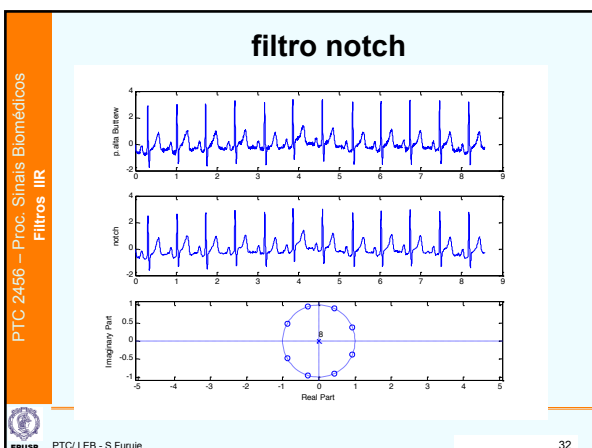
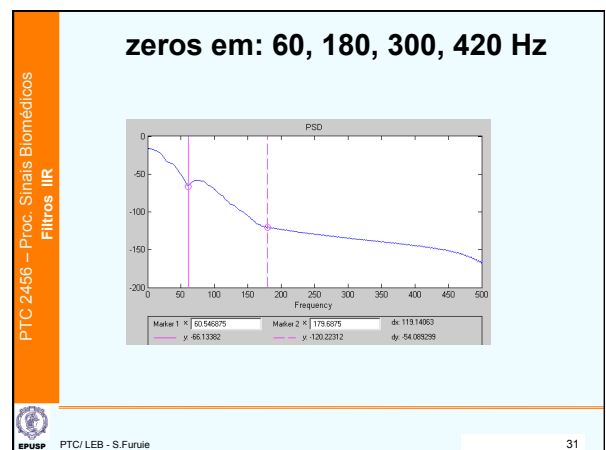
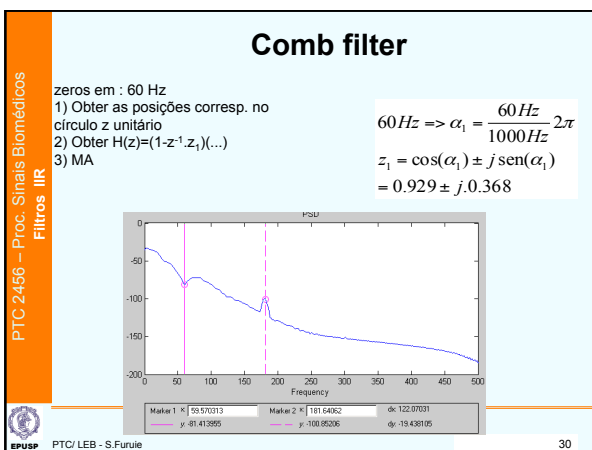
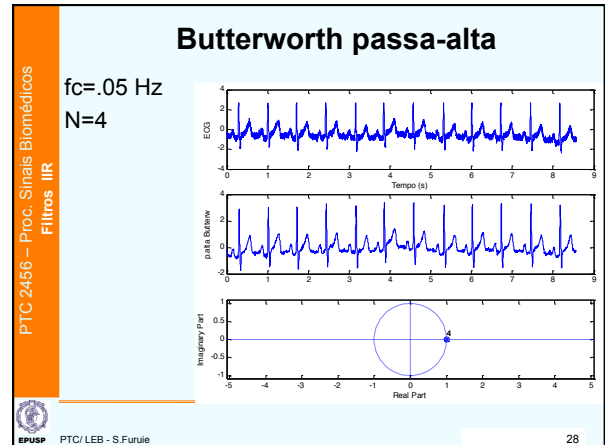
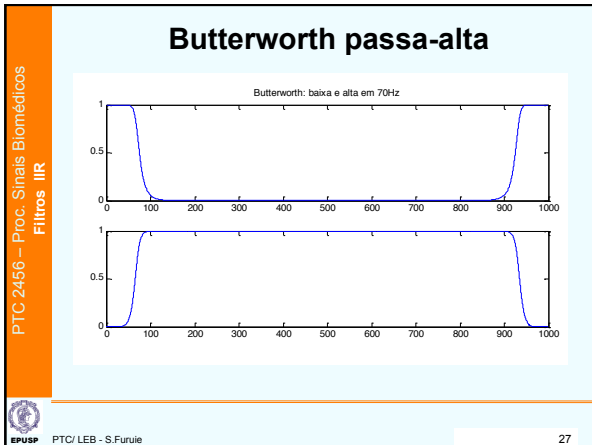


### Butterworth implementado no tempo

- 1) Obter os coeficientes ARMA do filtro  
– transf. bilinear
- 2)  $\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$

Matlab  
`[b,a]=butter(8, 70/500)`  
`filter(b,a,ecg)`





PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

### Em resumo, análise:

Análise no domínio da frequência:

- Sinal  $x(t) \Rightarrow \text{ADC} \Rightarrow \text{FFT}$
- Sistema  $h(n) \Rightarrow \text{FFT}$

Análise no domínio do tempo:

- $H(k) \Rightarrow \text{IFFT} \Rightarrow h(n) \Rightarrow \text{resposta impulsiva}$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 34

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

### Resumindo: filtragem offline de fase 0

Dadas características desejadas:

- Usar módulo do filtro modelo (Butterw, ...)  $\Rightarrow |H(k)|$
- $x(n) \Rightarrow \text{FFT} \Rightarrow X(k)$
- Aplicar filtro  $\Rightarrow Y(k) = X(k) \cdot |H(k)|$
- $\text{IFFT} \Rightarrow y(n)$

Ou usar rotinas prontas:

$[b,a] = \text{butter}(\text{ordem}, \text{wc})$      $\text{wc}$ : normalizada  
 $y = \text{filter}(b,a,x)$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 35

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

### Resumindo: filtragem online

Dadas características desejadas:

- Obter, a partir de filtros analógicos e por transformação, o filtro  $H(z)$
- $H(z) \Rightarrow h(n) \Rightarrow a, b$

Ou usar rotinas prontas:

$[b,a] = \text{butter}(\text{ordem}, \text{wc})$      $\text{wc}$ : normalizada

E implementar em tempo real:

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_M x[n-M]$$

Fase não é garantida de ser linear ou 0

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 36

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

### Outros filtros

- ótimos: Wiener (MSE, FIR),
- Adaptativos (ruído não estacionário):
  - LMS (Widrow-Hoff),
  - recursive (RLS)

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 37

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

### Exercício

Repita a análise (ganho e fase no domínio da frequência) feita na lista 5 para um filtro que realiza a média simples entre a entrada e a média anterior (filtro IIR):

$$y[n] = 0.5y[n-1] + 0.5x[n]$$

Suponha que a frequência de amostragem é de 1000 Hz.

1. Qual a frequência de corte do filtro em Hz?
2. Qual o atraso (em s) para 100Hz? E para 200 Hz?

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 38

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos  
Filtros IIR

### Bibliografia

- Biosignal and Medical Image Processing. John L. Semmlow. CRC Press, 2009
- Apostila de Processamento de Sinais de Tempo Discreto. C Itiki, V H Nascimento
- Biomedical Signal Analysis. R.M. Rangayyan. Wiley Interscience, 2002
- Signals and Systems (2nd Edition) A.V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab Hardcover: 957 pages. Publisher: Prentice Hall; 1996. ISBN-10: 0138147574.

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 39