

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Filtros do tipo FIR

Finite Impulse Response

Prof. Sérgio S Furuie

Referência específica: cap. 4 do Semmlow

EPUSP PTC/ LEB - S.Furuie

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Plano de aula

- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- Ruído
- Características de filtros
- Filtros tipo FIR
- Analisando filtros FIR
- Projetando filtros FIR

EPUSP PTC/ LEB - S.Furuie

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

ECG com ruído: o que fazer?

< 70 Hz

> 0.05 Hz

exclusão 60, 180,

EPUSP PTC/ LEB - S.Furuie

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Motivação / Importância de filtros

- restauração de sinais e imagens
- Melhoria da relação Sinal/Ruído (SNR)
 - Quantificação
 - Análise
 - Reconhecimento de padrões

EPUSP PTC/ LEB - S.Furuie

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Medidas: bandas e faixas

Parâmetro	Faixa	Banda(Hz)	Transdutor
Fluxo sang.	1-300 ml/s	dc-20	Ultrassom, FEM
Pressão arterial	10-400 mmHg	dc-50	Piezo-el., strain-gage,
ECG (superf.)	0.5 – 4 mV	.01 – 250	eletrodos
Potenciais em nervos	0.01 – 3 mV	Dc – 10000	eletrodos
Respiração	2 – 50 r/min	0.1 – 10	Strain gage, termistor, ..

EPUSP PTC/ LEB - S.Furuie

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

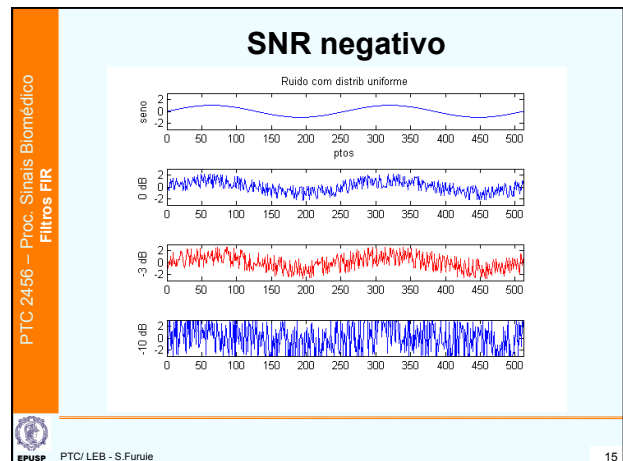
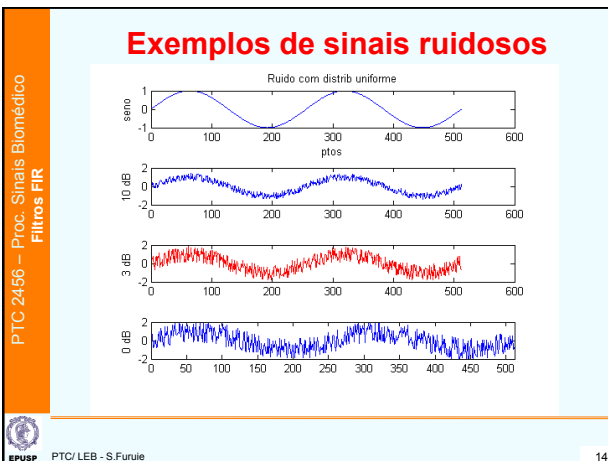
Filtros analógicos

- Passa-baixa
 - $Z_1=R_1$
 - $Z_2=R_2 \parallel C_2$
- Passa-alta
 - $Z_1=R_1 + C_1$
 - $Z_2=R_2$
- Passa-faixa
 - $Z_1=R_1 + C_1$
 - $Z_2=R_2 \parallel C_2$

$$\frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = - \frac{R_2}{R_1(1 + j\omega R_2 C_2)}$$

Para evitar **aliasing** => filtro analógico (se necessário) antes do processamento digital

EPUSP PTC/ LEB - S.Furuie



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Plano de aula

- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- Ruído
- **Características de filtros**
- Filtros tipo FIR
- Analisando filtros FIR
- Projetando filtros FIR

16

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Filtros: características ?

- Características principais
 - Tipo: passa-baixa, passa-alta, passa-faixa,
 - Banda passante de frequência: frequência de corte
 - Características de atenuação: ordem do filtro, taxa de atenuação (efeito Gibbs,...)
 - Fase linear e não-linear

17

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Filtros lineares invariantes (LTI)

- O que significa ser linear e invariante ao tempo?
- Filtros lineares e invariantes (LTI)
 - são suficientemente caracterizados pela resposta ao impulso
 - possibilita tratamento matemático simplificado
 - convolução => resposta do sistema
 - análise no domínio da frequência

LTI=> aplicável convolução => $Y=HX$ (TDF)

19

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

O que desejamos dos filtros?

- **Analisar** o comportamento em frequência
 - Tipo de filtro: passa-baixa, passa-alta?
 - Frequências de corte
 - Produz degradações? (fase não-linear)
- **Projetar** um filtro com determinado comportamento em frequência

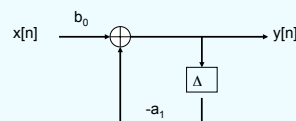
21

Análise/Interpretações

- Resposta impulsiva
- Resposta em frequência
 - Amplitude $H(w) = |H(w)| \cdot e^{j\Theta(w)}$
 - Fase $\Theta(w)$
 - Atraso $\frac{\Theta(w)}{w}$
 - Atraso de grupo $-\frac{d\Theta(w)}{dw}$
- Função de transferência em Z
- Zeros-pólos
- Expansão em frações parciais

Ex.Representação de LTI discretos

$$y[n] = b_0 \cdot x[n] - a_1 \cdot y[n-1]$$



Modelos de séries temporais

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_M x[n-M]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad \text{ARMA (IIR)}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad \text{MA: moving average (FIR)}$$

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = b_0 x[n] \quad \text{AR: auto regressive (IIR)}$$

$$a_0 = 1$$

Diferenças entre FIR e IIR

$$x[n] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] \\ y[n] &= [\dots \ 0 \ 1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[n] &= 0.5y[n-1] + x[n] \\ y[n] &= [\dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0.5 \ 0.25 \ 0.125 \ \dots \end{aligned}$$

FIR

- Estável
- Fase linear: projetável

IIR

- Resposta impulsiva infinita
- Menor ordem

FIR: Finite Impulse Response

Exemplos:

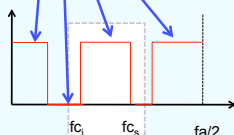
- Filtros passa-baixa
- Filtros passa-alta
- Filtros passa-faixa
- Filtros rejeita-faixa

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

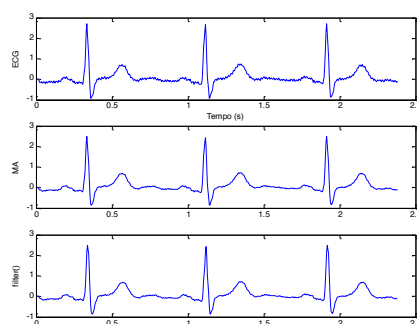
$$y[n] = \frac{x[n-1] + 2x[n] + x[n+1]}{4}$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$y[n] = \frac{x[n+1] - x[n-1]}{2}$$



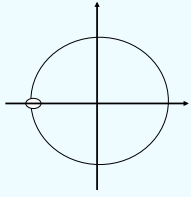
filtragem digital: MA



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Filtragem digital: FIR

MA=[1 2 1]/4



$$y[i] = (x[i-2] + 2x[i-1] + x[i])/4$$

$$Y = (X \cdot z^{-2} + 2X \cdot z^{-1} + X)/4$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = (z^{-2} + 2z^{-1} + 1)/4$$

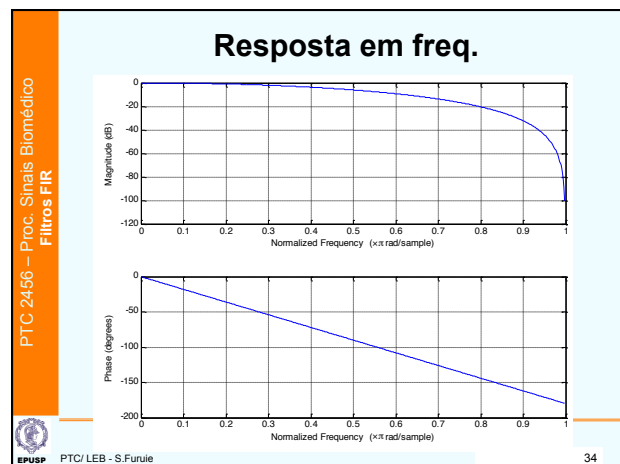
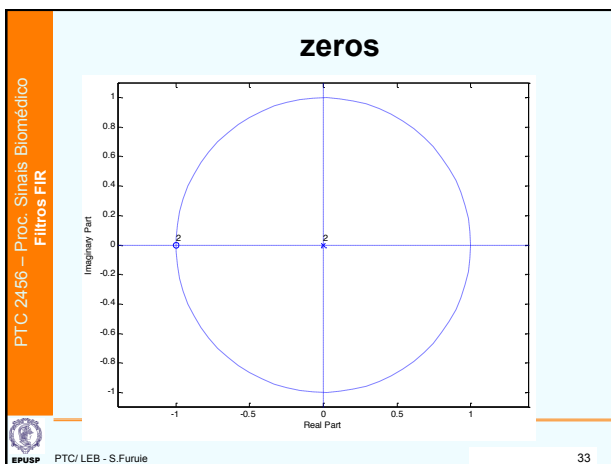
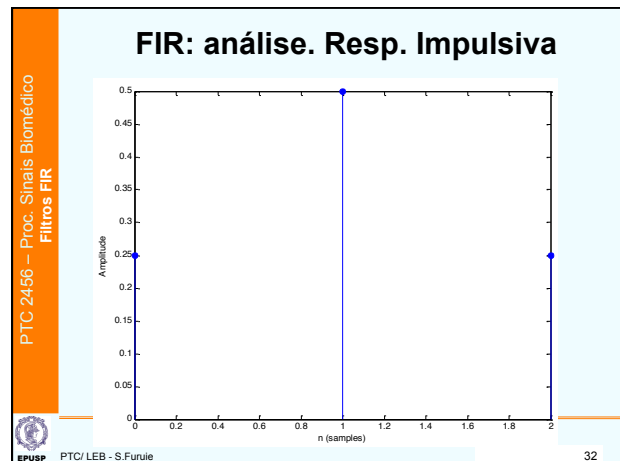
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = (z^{-1} + 1)^2 / 4$$

$$\frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = (e^{-jw} + 1)^2 / 4 =$$

$$|H| = \left| \frac{1 + \cos w}{2} \right|$$

$$\varphi = -w$$

EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 31



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Exercício

Repita a análise (ganho e fase no domínio da frequência) anterior para um filtro que realiza a média simples, ou seja:

$$h[n] = (h[n-2] + h[n-1] + h[n])/3$$

Suponha que a frequência de amostragem é de 1000 Hz.

- Qual a frequência de corte do filtro em Hz?
- Qual o atraso (em s) para 100Hz? E para 200 Hz?

EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 35

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Exercício

Analisar o filtro abaixo no domínio da frequência: ganho e fase

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = (1 - z^{-1})$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = z^{-\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})$$

$$H(e^{jw}) = e^{-jw/2} 2j \sin(w/2)$$

$$|H| = |2 \sin(w/2)|$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - w/2$$

Compare com o filtro abaixo:

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-2]}{2}$$

$$H(e^{jw}) = e^{-jw} j \sin(w)$$

$$|H| = |\sin(w)|$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - w$$

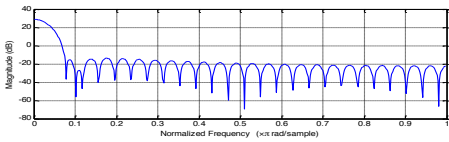
Passa-alta? Derivada? Passa-faixa?

EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 36

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Projeto de filtros digitais: síntese

- Requisitos
 - freq. de corte
 - ondulações (ripple) de passa-banda
 - atenuação de stopband
 - faixa de transição



EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 37

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

FIR

- fase linear possível
- estável
- hardware eficiente
- Métodos:
 - Amostragem em freq.
 - windowing
 - LS
 - arbitrário

$$y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] h[k-n]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[n-k]$$

$$Y(z) = X(z) \sum_{k=0}^{N-1} h[k] z^{-k}$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] z^{-k}$$


EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 38

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

FIR - Por amostragem em freq.

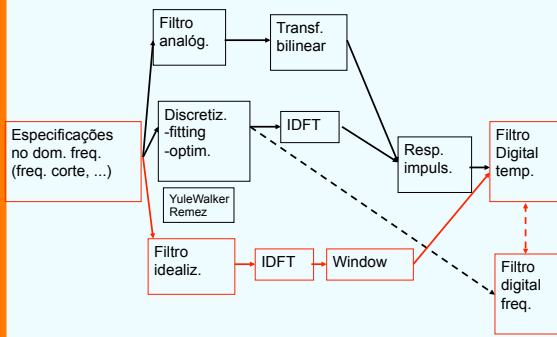
- Especificar o ganho e fase linear no dom. da freq. (0 a 2π)
- Amostrar em L pontos
- Obter a TFD⁻¹
- Truncar em $N \leq L$ pontos p/ obter a resposta impulsiva

* Pode gerar overshooting no dom. da freq. devido ao truncamento no tempo.

EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 39

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Projeto de filtros FIR



EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 44

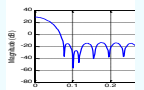
PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Técnicas de projeto de FIR: janela

- Função periódica do filtro ideal desejado no dom. freq.
- Obter resposta impulsiva discreta no tempo (TFTD⁻¹)
- Aplicar a janela finita (multiplicar no tempo)
- A resposta em freq. real = desejado * janela no dom. freq.

Ex.: filtro passa-baixo e janela retangular

$$h[k] = \frac{\sin(\omega_c k)}{\pi k}$$

$$k = -(N-1)/2, (N-1)/2$$


EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 45

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Domínio do tempo	Domínio da frequência
Contínuo, aperiódico $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	Contínuo, aperiódico $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ TF
Contínuo, periódico(T) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ SF	Discreto($2\pi/T$), aperiódico $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ $a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$
Discreto ($n\Delta$), aperiódico $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$ TFTD	Contínuo, periódico($2\pi/\Delta$) $\Omega = 2\pi f/\Delta$ $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$
Discreto($n\Delta$), periódico(T) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{N} k n}$ SFTD	Discreto($2\pi/T$), periódico($2\pi/\Delta$) $a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^N x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} k n}$

InCor/EPUSP SF 32

EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 46

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Janela (windowing)

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n}$$

Limitando conteúdo em freq no tempo, e evitando overshooting:

Portanto, o resultado final do filtro FIR será a convolução do H com a função de transferência da janela

EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 47

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

FIR com janela retangular

Exemplo:
 $N = 25$

$$W_R(e^{jw}) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} 1 e^{-jwn}$$

$$W_R(e^{jw}) = \frac{\sin(wN/2)}{\sin(w/2)}$$

$$= N \frac{\text{sinc}(\frac{wN}{2\pi})}{\text{sinc}(\frac{w}{2\pi})}$$

filtro no tempo discreto

 filtro na frequência

Matlab: Fir1() e Fir2()

EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 48

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Janela de Hamming

$$g_H[n] = \alpha + (1 - \alpha) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

$$-\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}$$
 Ex.: $\alpha=0.54$ (hanning), $N=51$

resp. freq.

EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 49

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Resposta em freq. do filtro de Hamming em dB

EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 50

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Projeto de filtros FIR

Especificações no dom. freq. (freq. corte, ...)

```

    graph TD
      A[Especificações no dom. freq. (freq. corte, ...)] --> B[Filtro analóg.]
      A --> C[Discretiz. -fitting-optim.]
      A --> D[Filtro idealiz.]
      B --> E[Transf. bilinear]
      C --> F[IDFT]
      D --> G[IDFT]
      E --> H[Resp. impuls.]
      F --> H
      G --> I[Window]
      H --> J[Filtro Digital temp.]
      I --> J
      J --> K[Filtro digital freq.]
      K -.-> C
  
```

EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 51

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Abordagens para projeto FIR

- Parks-McClellan (Remez) – minimiza erro nas bandas de passagem e rejeição (aproximação de Chebyshev)
- Butterworth – maximamente plana

EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 52

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

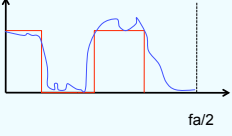
Projeto de FIR: otimização

Filtro FIR desejado: $H_d(w)$
Filtro resultante : $H(w)$
Desvios tolerados : $D(w)$

$$E(w) = (H(w) - H_d(w))$$

$$\min_{\{b_n\}} |E(w)|$$

sujeito a $D(w)$



Algoritmo de Parks-McClellan => p. ex. firpmord e firpm (em Matlab) que retorna o filtro FIR (b) em função da ordem, freq. corte, f_a , ripple e ganho

EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 53

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

IIR

EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 61

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédico
Filtros FIR

Bibliografia

- Biosignal and Medical Image Processing. John L. Semmlow. CRC Press, 2009
- Apostila de Processamento de Sinais de Tempo Discreto. C Itiki, V H Nascimento
- Biomedical Signal Analysis. R.M. Rangayyan. Wiley Interscience, 2002
- Signals and Systems (2nd Edition) A.V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab
Hardcover: 957 pages. Publisher: Prentice Hall; 1996. ISBN-10: 0138147574.

EPUSP PTC/ LEB - S.Furule 62