Aula1 Noções de matemática Discreta – Técnicas de Demonstração

Prof. Dr. Ricardo Luis de Azevedo da Rocha

Matemática Discreta

- seleção de tópicos de Matemática essenciais para o estudo da Ciência da Computação na Formação Básica e Tecnológica

  Considerando que a maioria dos conceitos computacionais pertencem ao domínio do discreto, a matemática discreta (ou também chamada álgebra abstrata) é fortemente empregada

Tópicos de Matemática Discreta

- **Não cobre todos os tópicos de Matemática Discreta**
  - Análise Combinatória
  - Probabilidade Discreta
  - Teoria dos Grafos
- **Questão importante**
  - origem do termo Matemática Discreta
- **Qualquer sistema computador possui limitações finitas**
  - tamanho da memória
  - número de instruções que pode executar
  - número de diferentes símbolos que pode tratar,…
  - portanto, o estudo dos conjuntos finitos é fundamental.

Limitação Finita

- **Limitações finitas não implicam em limitação ou pré-fixação de tamanhos máximos**
  - por exemplo, unidades auxiliares como discos removíveis, fitas, etc.
- **Para um correto entendimento da computação**
  - freqüentemente *não* é possível pré-fixar limites
  - implica tratar tais questões em um contexto infinito
- **Qualquer conjunto de recursos computacionais**
  - é enumerável (contável) ou *discreto* (em oposição ao termo *contínuo*)
  - pode ser enumerado ou seqüenciado (segundo algum critério)
  - ❖ não existe um elemento entre quaisquer dois outros

Exemplos

- **Exemplo - enumerável**
  - conjunto dos números naturais é enumerável
- **Contra-exemplo**
  - conjunto dos números reais o qual é não-enumerável ou *não-discreto*
- **Conclusão**
  - existem conjuntos infinitos enumeráveis e não-enumeráveis
- **Matemática Discreta**
  - estudos baseados em conjuntos enumeráveis finitos ou infinitos
- **Matemática do Continuum**
  - estudos baseados em conjuntos não-enumeráveis
  - exemplo: Cálculo Diferencial e Integral

Noções de Teoria de conjuntos

- **Conceito de conjunto é fundamental**
  - praticamente todos os conceitos em Computação e os correspondentes resultados são baseados em conjuntos ou construções sobre conjuntos
- **Conjunto**
  - estrutura que agrupa objetos
  - constitui uma base para construir estruturas mais complexas

Conjunto – definição e intuição

- **Informalmente, um conjunto**
  - coleção, *sem* repetições e *sem* qualquer ordenação, de objetos denominados elementos
  - elemento: pode designar um objeto concreto ou abstrato
  - elemento: entidade básica, *não* é definida formalmente
- **Def: Conjunto**
  - Coleção de zero ou mais objetos *distintos*, chamados Elementos do conjunto os quais *não* possuem qualquer ordem associada

Exemplos e definição de conjuntos

- **Ex: Conjuntos**
  - As vogais a, e, i, o, e u
  - O par de sapatos preferido
  - Os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9
  - Todos os brasileiros
  - Os números pares 0, 2, 4, 6,…
  - O personagem Snoopy, a letra a, a baía da Guanabara, o Pelé
- **Conjunto pode ser definido**
  - listando todos os seus elementos
  - por propriedades declaradas
  - um conjunto *não* necessariamente é constituído por objetos que compartilham mesmas características / propriedades

Denotação por extensão

- definição listando *todos* os seus elementos
  - em qualquer ordem
  - separados por vírgulas
  - entre chaves

$$\text{Vogais} = \{ a, e, i, o, u \}$$

  - Vogais denota o conjunto { a, e, i, o, u }

Denotação por compreensão

- definição por propriedades

  Pares = { n | n é número par }

  - *o conjunto de todos os elementos* n *tal que* n *é número par*
- forma geral de definição de um conjunto por propriedades

  $$\{ x \mid p(x) \}$$

- a é elemento do conjunto: p(a) é verdadeira

  B = { x | x é brasileiro }

  - Pelé é elemento de B e Bill Gates *não* é elemento de B

Continuação

- **Qualquer conjunto pode ser definido por compreensão**
- **Freqüentemente é conveniente especificar de outra forma**
  - Dígitos = { 0, 1, 2, 3,…, 9 }
  - Pares = { 0, 2, 4, 6,… }
  - ❖ elementos omitidos podem ser facilmente deduzidos do contexto
- **Exp: Conjuntos**
  - Dias da Semana = { seg, ter, qua, qui, sex, sab, dom }
  - Seqüências de duas Vogais = { aa, ae, ai, ao, au, ea, ee, ei, eo, eu,…,ua, ue, ui, uo, uu }

$$\{ x \mid x = y^2 \text{ sendo que } y \text{ é número inteiro } \}$$

  - ❖ corresponde ao conjunto { 1, 4, 9, 16,… }

Pertinência

- a **é elemento do conjunto** A
  - a $\in$ A
  - a *pertence ao conjunto* A
- **Caso contrário**
  - a $\notin$ A
  - a *não pertence ao conjunto* A
- **Exempo: Pertence, Não-Pertence**

  Vogais = { a, e, i, o, u }
  - a $\in$ Vogais h $\notin$ Vogais

  B = { x | x é brasileiro }
  - Pelé $\in$ B   Bill Gates $\notin$ B

Conjuntos importantes

- **Conjunto vazio**

$$\emptyset$$

  - especialmente importante
  - conjunto sem elementos { }
- **Exp: Conjunto Vazio**
  - Conjunto de todos os brasileiros com mais de 300 anos
  - Conjunto de todos os números pares e ímpares simultaneamente

Conjunto unitário

- quase tão importante como o vazio
- constituído por um único elemento
  - existem infinitos conjuntos unitários
- para muitas aplicações, pode-se usar qualquer conjunto unitário
  - importante é que o conjunto possui um único elemento
  - irrelevante qual é o elemento
  - conjunto unitário fixado: usualmente denotado por 1
- **Exp: Conjunto Unitário**
  - Conjunto constituído pelo jogador de futebol Pelé
  - Conjunto de todos os números simultaneamente pares e primos
  - $1 = \{ * \}$

Outros conjuntos importantes

- $\mathbb{N}$ Conjunto dos Números Naturais
- $\mathbb{Z}$ Conjunto dos Números Inteiros
- $\mathbb{Q}$ Conjunto dos Números Racionais
- $\mathbb{I}$ Conjunto dos Números Irracionais
- $\mathbb{R}$ Conjunto dos Números Reais

Conjuntos finitos e infinitos

- Um conjunto pode possuir um número finito ou infinito de elementos
  - definição formal de conjunto finito e infinito: adiante
- **Conjunto finito**
  - pode ser denotado por extensão
    - listando exaustivamente todos os elementos
- **Conjunto infinito**
  - caso contrário

Exemplos – conjuntos finitos

$\emptyset$

$\{ \varepsilon \}$

Vogais = { a, e, i, o, u }

Dígitos = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

{ snoopy, a, baía da Guanabara, Pelé }

$A = \{ x \in \mathbf{N} \mid x > 0 \text{ e } x < 4 \}$

$B = \{ x \mid x \text{ é brasileiro} \}$

Exemplos – conjuntos infinitos

- $\mathbf{Z}$
- $\mathbf{R}$
- $\{ x \in \mathbf{Z} \mid x \geq 0 \}$
- Pares = $\{ y \mid y = 2x \text{ e } x \in \mathbf{N} \}$

Subconjuntos

- **Continência**
  - conceito fundamental da Teoria dos Conjuntos
- permite introduzir os conceitos
  - subconjunto
  - igualdade de conjuntos
- **Todos elementos de** A **também são elementos de** B
  - A está contido em B

$$A \subseteq B$$

  - A *não* está contido em B

$$A \not\subseteq B$$

  - B contém A

$$B \supseteq A$$

Continuação

- A **é subconjunto de** B

$$A \subseteq B \text{ ou } B \supseteq A$$

- A **é subconjunto próprio de** B
  - A está contido propriamente em B (*não* contido propriamente)
    - ❖ $A \subseteq B$ e existe $b \in B$ tal que $b \notin A$

$$A \subset B \qquad (A \not\subset B)$$

- B contém propriamente A

$$B \supset A$$

Exemplos – contido, subconjunto

$\{ a, b \} \subseteq \{ b, a \}$

$\{ a, b \} \subseteq \{ a, b, c \}$

$\{ a, b \} \subset \{ a, b, c \}$

$\{ 1, 2, 3 \} \subseteq \mathbf{N}$

$\{ 1, 2, 3 \} \subset \mathbf{N}$

$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$

$\emptyset \subseteq \{ a, b, c \}$

$\emptyset \subset \{ a, b, c \}$

$\emptyset \subseteq \mathbf{N}$

$\emptyset \subset \mathbf{N}$

Conjunto universo

- conjunto especial e importante
- contém todos os conjuntos considerados
  - ❖ define o “contexto de discussão”
  - ❖ portanto, *não* é um conjunto fixo
- normalmente denotado por **U**
- definido o conjunto universo, para qualquer conjunto A

$$A \subseteq \mathbf{U}$$

Igualdade de conjuntos

A e B são conjuntos iguais sse possuem os mesmos elementos

A = B se e somente se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

Exp: Igualdade de Conjuntos

- $\{ 1, 2, 3 \} = \{ x \in \mathbb{N} \mid x > 0 \text{ e } x < 4 \}$
- $\mathbb{N} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0 \}$
- $\{ 1, 2, 3 \} = \{ 3, 3, 3, 2, 2, 1 \}$
  - $\{ 1, 2, 3 \} \subseteq \{ 3, 3, 3, 2, 2, 1 \}$
  - $\{ 3, 3, 3, 2, 2, 1 \} \subseteq \{ 1, 2, 3 \}$

Exemplo – pertinência $\times$ contido

É importante distinguir claramente entre pertinência e contido

Considere o conjunto A = $\{ 1, 2, 3, \emptyset, \{a\}, \{b, c\} \}$

$\{ 1 \} \notin A$

$\emptyset \in A$

$\{ a \} \in A$

$\{ b, c \} \in A$

$\{ 1, 2, 3 \} \notin A$

$\emptyset \subseteq A$

$\{ 1 \} \subseteq A$

$\{ 1, 2, 3 \} \subseteq A$

Operações

- União
  - $A \cup B = \{x |\ x \in A \vee x \in B\}$
- Interseção
  - $A \cap B = \{x |\ x \in A \wedge x \in B\}$
- Diferença
  - $A - B = \{x |\ x \in A \wedge x \notin B\}$

Propriedades

- Idempotência: $A \cup A = A \cap A = A$
- Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- Associatividade:
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Distributividade
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Absorção
  - $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$
- Leis de De Morgan
  - $A-(B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$
  - $A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$
- Conjuntos disjuntos
  - $A \cap B = \varnothing$
- Conjunto-potência: 2^A={todos os subconjuntos de A}
  - Ex: $A=\{a,b\}$, $2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

Partição de um conjunto

- Um conjunto pode ser dividido de várias formas diferentes, mas para que haja utilidade é necessário que esta divisão não produza conjuntos vazios, e que não haja repetição de elementos, assim:
  - Def.: **Partição**: Uma partição Π de um conjunto é formada por subconjuntos tais que:
    1. Nenhum subconjunto é vazio
    2. A interseção dois a dois dos subconjuntos é vazia
    3. A união de todos os elementos da partição recompõe o conjunto original ($\cup\Pi$ = A)
  - Representa-se um subconjunto (da partição de A) por: [a] e $a \in A$, onde $[a]=\{b \in A \mid b$ está na partição de $a\}$

Relações

- Par ordenado: (a,b)
  - Estrutura que preserva a ordem.
  - É uma estrutura diferente de conjunto?
    - $\{a,\{a,b\}\} \equiv (a,b)$
- Produto cartesiano ($A \times B$)
  - Produz um conjunto contendo todos os pares ordenados sobre os conjuntos A e B.
- Relação binária
  - É um subconjunto de um produto cartesiano
    - $R \subseteq A \times B$
  - Ex: $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$, $A \times B=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$, $R=\{(a,1),(b,2)\}$

Relações

- Produto cartesiano de n conjuntos: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$
  - Produz ênuplas ordenadas: $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$
  - Duas ênuplas ordenadas $(a_1,a_2,\ldots,a_n)= (b_1,b_2,\ldots,b_m)$ sse $m=n$ e $a_i=b_i$, $0 \leq i \leq n$.
- Seqüência
  - Ênupla ordenada na qual não foi estabelecida a quantidade de elementos
- Comprimento
  - Quantidade de elementos da seqüência
- Relação n-ária
  - $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Generalização da relação binária.
    - Subconjunto composto de ênuplas ordenadas

Relações $\rightarrow$ Funções

- Função parcial
  - É uma relação $f \subseteq A \times B$, onde se $(a,b_1) \in f$ e $(a,b_2) \in f$, então $b_1=b_2$.
  - Diz-se que o conjunto A é o Domínio de f e B é o Contra-Domínio
  - Representa-se uma função por:
    - $f:A \rightarrow B$ (e não $f \subseteq A \times B$)
    - $f(a)=b$ (e não $(a,b) \in f$)
  - b é chamado de imagem de a sob f, e a é chamado de argumento
  - Se uma função parcial se aplica a todos os elementos do Domínio, então é dita função total (ou somente função)
- $f:A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \rightarrow B$ é função, e $f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=b$, $a_i \in A_i$, $b \in B$
- Função injetora: $\forall b \in B$ é imagem de no máximo um $a \in A$
- Função sobrejetora: $\forall b \in B$ é imagem de pelo menos um $a \in A$
- Função bijetora => isomorfismo: injetora e sobrejetora
  - Uma bijeção permite transportar problemas de um domínio a outro

Relações

- Relação inversa
  - $R^{-1}=\{(b,a) \mid (a,b)\in R\}$
- Inversa de função
  - Toda função tem inversa?
  - $f^{-1}:B\rightarrow A$, $f^{-1}(b)=a$ se $f(a)=b$
- Bijeções simples => isomorfismos naturais
  - Quando um objeto do domínio e sua imagem no contra-domínio são vistos como virtualmente indistinguíveis (visto como renomear ou reescrever o outro).
  - Formalmente: $h:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{A}/\theta$; $\mathcal{A}$ é uma álgebra gerada por A

  $h(f_i^A(a_1,a_2,...,a_n))=[f_i^A(a_1,a_2,...,a_n)]_\theta=f_i^{A/\theta}([a_1]_\theta,[a_2]_\theta,...,[a_n]_\theta)=f_i^{A/\theta}(h(a_1),...,h(a_n))$
    - Onde θ é uma relação de congruência, que induz uma partição em A
  - Isomorfismo η entre funtores F e G, $\eta_Y\circ F(f)=G(f)\circ\eta_X$, η respeita estrutura.
- Composição de relações
  - Se $R\subseteq A\times B$, $S\subseteq B\times C$, então $R\circ S\subseteq A\times C$ (denotado por RS)
  - $RS=\{(a,c) \mid \exists(a,b)\in R \wedge \exists(b,c)\in S\}$

Relações binárias especiais

- $R \subseteq A \times A$ => representado como grafo orientado
  - $(\leq, \mathbb{N})$
- R pode ser:
  - Reflexiva: $\{(a,a) \in R \ \forall a \in A\}$
  - Simétrica: $\{(b,a) \in R$ se $(a,b) \in R\}$
  - Anti-simétrica: {se $(b,a) \in R$ e $(a,b) \in R$, então $a=b$}
  - Transitiva: $\{(a,b) \in R$ se $\exists c \in A | (a,c) \in R \wedge (c,b) \in R\}$
- R é relação de equivalência se é reflexiva, simétrica e transitiva
  - [a] representa uma classe de equivalência que contém a.
- Teor.: “As classes de equivalência de uma relação de equivalência sobre um conjunto A formam uma partição de A”

Relações binárias especiais

  – Dem.: A partir da definição de partição ...

- R é relação de ordem parcial se é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Se a relação se aplica a todos os elementos do conjunto => ordem total.
- Cadeia: Em uma relação R, cadeia é uma seqüência $(a_1,a_2,...,a_n)$ para $n\geq 1$ tal que $(a_i,a_{i+1})\in R$, $1\leq i<n$.
- Ciclo: É uma cadeia $(a_1,a_2,...,a_n)$ na qual $(a_n,a_1)\in R$, é chamado de trivial se n=1, senão é não-trivial
- Teor.: “Uma relação é de ordem parcial se e somente se for reflexiva e transitiva, e isenta de ciclos não-triviais”
  – Dem.: Através da definição de relação de ordem parcial e de ciclo.
- Um elemento $a\in A$ é dito mínimo se $\forall(b,a)\in R$ então b=a (questão algébrica importante, olhar em refs.)

Fechos, conjuntos finitos e infinitos

- Fecho ou fechamento, indica que um conjunto é fechado em relação a uma *relação*. Propriedade de fechamento definida por relações.
  - Def$_1$.: Seja D um conjunto, $n \geq 0$ e $R \subseteq D^{n+1}$ uma relação n+1-ária sobre D. Então $B \subseteq D$ é dito fechado sob R se $b_{n+1} \in B$ sempre que $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B \wedge (b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}) \in R$
  - Def$_2$.: Seja A um conjunto. Um mapeamento $C: 2^A \rightarrow 2^A$ é chamado de operador de fechamento em A se, para todos os subconjuntos X,Y de A as propriedades abaixo são satisfeitas:
    1. $X \subseteq C(X)$ (extensividade)
    2. $X \subseteq Y \Rightarrow C(X) \subseteq C(Y)$ (monotonicidade)
    3. $C(X) = C(C(X))$ (idempotência)
  - Fecho transitivo: $R^+ = R \cup \{(a,b) \in R \text{ se } \exists c \in A | (a,c) \in R \wedge (c,b) \in R\}$
  - Fecho reflexivo e transitivo: $R^* = R^+ \cup \{(a,a) \in R \ \forall a \in A\}$
- Teor.: O fecho R^* sobre R é equivalente a $R \cup \{(a,b) |$ há uma cadeia de a para b em R$\}$
  - Dem.: Decorre da definição de fecho R^* e de cadeia.

Fechos, conjuntos finitos e infinitos

- Conjuntos equinumerosos: bijeção (isomorfismo)
- Conjunto finito, bijeção com $\{1,2, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$
- Conjunto infinito, bijeção com subconjunto próprio
  - $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ são infinitos e equinumerosos (construir bijeção)
- Enumeravelmente infinito, bijeção com $\mathbb{N}$
- Enumerável se é finito ou enumeravelmente infinito
- Mostrar que é enumerável, bijeção com $\mathbb{N}$
  - União finita de conjuntos enumeráveis é enumerável (dovetailing)
  - Produto cartesiano de conjuntos enumeráveis também é enumerável
    - $f(i,j)=(i+j)(i+j+1)/2 + j$ enumera $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$

Técnicas de demonstração

- Princípio da indução:
  - Teor.: Seja A um conjunto de nºs Naturais tal que:
    1. $0 \in A$
    2. $\forall n \in \mathbb{N}$, se $\{0,1,2,...,n\} \subseteq A$, então $n+1 \in A$
    - Então $A = \mathbb{N}$
  - Utiliza-se provando um **caso base**, e formulando o **passo indutivo** através do uso da **hipótese indutiva**.
  - Ex: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
  - **Princípio da indução estrutural**:
    - Seja $\mathcal{A}=(A;(f_i)_{i \in I})$ uma estrutura algébrica de tipo τ gerada por um subconjunto $X \subseteq A$. Para provar que uma propriedade P aplica-se a todos os elementos de $\mathcal{A}$ é suficiente mostrar a validade das duas seguintes condições:
      1. P aplica-se a todos os elementos de X
      2. Se P se aplica quaisquer $a_1, a_2, ..., a_{n_i}$ em A então P se aplica a $f_i^A(a_1, a_2, ..., a_{n_i})$ para todo $i \in I$
- Princípio da casa de pombos: função não injetora se $|A|>|B|$

Princípio da diagonalização

- Seja R uma relação binária em um conjunto A, e seja D o conjunto diagonal de R onde $D=\{a \in A | (a,a) \notin R\}$. Para cada $a \in A$ faça-se $R_a=\{b \in A | (a,b) \in R\}$. Nestas condições D é distinto de cada R_a.
  - Ou seja, constrói-se um conjunto que não pode pertencer a qualquer enumeração ou função definida sobre R.
  - Assim, se alguma enumeração ou função incluir este conjunto produzirá uma contradição.
- Teor.: O conjunto 2^{N} não é enumerável.
  - Dem.: Pela diagonal, assume-se uma enumeração $\{R_1, R_2,...\}$ e mostra-se que D deve estar nela, obtendo contradição.

Alfabetos, palavras e linguagens

- **Linguagem**
  - um dos conceitos mais fundamentais em Computação
  - definida a partir da noção de conjunto
- **Para a definição de linguagem, é necessário**
  - conceitos de alfabeto
  - conceitos de cadeia de caracteres
- **Estudo de linguagens e conceitos correlatos**
  - Linguagens Formais
  - Compiladores

Alfabeto

Def: Alfabeto

- Um conjunto *finito*
  - elementos são usualmente denominados de símbolos ou caracteres
- **Portanto**
  - conjunto vazio *é* um alfabeto
  - qualquer conjunto infinito *não* é um alfabeto

Palavra, cadeia, sentença

Def: Palavra, Cadeia de Caracteres, Sentença

- Sobre um alfabeto
  - seqüência *finita* de símbolos justapostos
- **Cadeia sem símbolos**
  - ε cadeia vazia, palavra vazia ou sentença vazia
- **Conjunto de todas as palavras sobre um alfabeto Σ**

$$\Sigma^*$$

Exemplo – alfabeto, palavra

$\emptyset$ e { a, b, c } são alfabetos

$\mathbf{N}$ *não* é um alfabeto

ε é uma palavra sobre { a, b, c }

ε é uma palavra sobre $\emptyset$

a, e, i, o, u, ai, oi, ui, aeiou são palavras sobre Vogais

1, 001 são palavras *distintas* sobre Digitos

$\{ a, b \}^* = \{ \varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \ldots \}$

$\emptyset^* = \{ \varepsilon \}$

Linguagem

Def: Linguagem Formal

- Ou simplesmente Linguagem
  - um conjunto de palavras sobre um alfabeto
- **Exp: Linguagem Formal: alfabeto** $\sum = \{ a, b \}$

  $\emptyset$

  $\{ \varepsilon \}$ obviamente, $\emptyset \neq \{ \varepsilon \}$

  conjunto de palíndromes

  Palíndromes = $\{ \varepsilon, a, b, aa, bb, aaa, aba, bab, bbb, aaaa, \ldots \}$
  - mesma leitura da esquerda para a direita e vice-versa
  - linguagem sempre infinita?

Linguagem $\times$ Conjunto de Todas as Palavras

Definição alternativa para linguagem formal sobre um alfabeto Σ

- L é qualquer subconjunto de Σ^*

$$L \subseteq \Sigma^*$$

Linguagens de Programação

Linguagens de programação como Pascal, C e Java

- linguagens sobre o alfabeto constituído por
  - ❖ letras
  - ❖ digitos
  - ❖ símbolos especiais (como espaço, parênteses, pontuação, etc.)
- cada programa na linguagem corresponde
  - ❖ uma palavra sobre o alfabeto
- Pascal, C e Java …
  - ❖ definidas por todos os seus programas possíveis
  - ❖ são conjuntos infinitos
  - ❖ pois, existem infinitos programas

Compilador

Obs: Compilador $\times$ **Pertinência à Linguagem**

Compilador de uma LP (linguagem de programação)

- *software* que traduz
  - ❖ programa escrito na LP (linguagem fonte)
  - ❖ para um código executável (linguagem objeto).
- Estrutura de um compilador

❖ análise: léxica, sintática e semântica

❖ síntese: geração e otimização de código executável

- análise

$$p \in L \ ?$$

  - ❖ verifica se um dado programa fonte p
  - ❖ *é* programa válido para a linguagem L

Alfabetos e linguagens

- Comprimento de cadeia: $w=ab$; $|w|=2$
- Concatenação: $u=ab, v=cd$; $w=u \circ v=abcd$
  - $w(i)=u(i)$, $1 \leq i \leq |u|$; $w(i+|u|)=v(i)$, $1 \leq i \leq |v|$
  - (associativa, não comutativa, elemento neutro=ε)
- Sub-cadeia: v é sub-cadeia de w, então $w=xvy$; prefixo (x é prefixo de w), sufixo (y é sufixo de w)
- $w^0= \varepsilon$, $w^{i+1}=w^i \circ w$; (Reversa) $w=ua \Rightarrow w^R=au^R$
  - Teor.: Sejam x e y cadeias, então $(xy)^R=y^R x^R$
- Complemento (Σ^*-L), concatenação $L_1 \circ L_2$, fecho de Kleene ($L^*=\{w \mid w=w_1w_2...w_k$ para $k \geq 0$ e algum $w_1,w_2,...,w_k \in L\}$), fecho transitivo (L^+, $k>0$) – ($L^+=LL^*$)
  - Σ^* é enumerável
    - gn: $\Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$; onde

$$\begin{cases} \Sigma = \{a_1,...,a_k\}; |\Sigma| = k; f(a_i) = i; gn(\varepsilon) = 0 \\ w = a_{l_n} a_{l_{n-1}} ... a_{l_0}; gn(w) = \sum_{j=0}^{n} f(a_{l_j}) \times k^j \end{cases}$$

Representação Finita de Linguagens

- O objetivo é representar uma linguagem infinita de forma finita. Por meio de:
  - Geração de cadeias (formalismo axiomático)
  - Reconhecimento de cadeias (formalismo operacional)
  - Funções que definem as cadeias (formalismo denotacional, funcional)
- Considere o menor conjunto de linguagens que aceite as seguintes operações sobre as suas cadeias:
  - união; concatenação; estrela de Kleene
- O menor conjunto formado através destas operações formam um conjunto chamado de Regular. Ou seja, são as linguagens regulares.
- Uma Expressão Regular é definida assim:
  1. $\emptyset$ assim como $\forall a \in \Sigma$ são E.R.
  2. Se x e y são E.R. então $x \circ y$ é E.R.
  3. Se x e y são E.R. então $x \cup y$ é E.R.
  4. Se x é E.R. então x^* é E.R.
  5. Somente pode-se aplicar as operações de 1-4