Prova Substitutiva de PNV 2340 - Mecânica dos Meios Contínuos - 23/11/2016

1)(2,0 pontos) Dado o vetor da velocidade $\vec{\upsilon}=\upsilon_1\,\hat{e}_1+\upsilon_2\,\hat{e}_2+\upsilon_3\,\hat{e}_3$, onde:

$\upsilon_1=x_1-5x_2+2x_3 \quad ; \quad \upsilon_2=5x_1+x_2-3x_3 \quad ; \quad \upsilon_3=-2x_1+3x_2+x_3$

a)Obtenha a expressão matricial do tensor gradiente de $\vec{\upsilon}$, ou seja, as componentes de $\partial\upsilon_i/\partial x_j$;

b)Decomponha $\partial\upsilon_i/\partial x_j$ na suas partes simétrica e antissimétrica, ou seja, nos tensores de deformação e rotação.

2))(2,0 pontos) Mostre que $\rho\dfrac{D\phi}{Dt}=\dfrac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\phi\vec{\upsilon})$.

3)(3,0 pontos) Dado o tensor das tensões $\sigma_{ij}=\begin{bmatrix} 8 & -4 & 1 \\ -4 & 3 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & 2 \end{bmatrix}$:

Obtenha o vetor da tensão $\vec{\sigma}^{(\hat{n})}$ no plano da figura. Decomponha esse vetor na parte normal $\vec{\sigma}_N$ e na parte tangencial $\vec{\sigma}_S$. (Dica: obtenha o versor normal unitário $\hat{n}$ a partir de operações com vetores relacionados com os pontos A, B e C.)

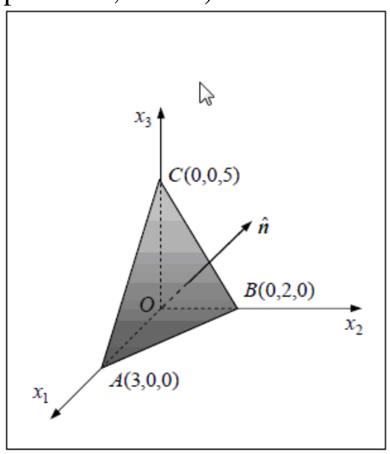

Figura do Problema 3

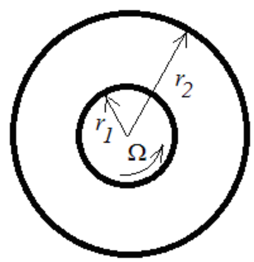

Figura do Problema 4

4)(3,0 pontos) Fluido com massa específica ρ, viscosidade dinâmica μ, viscosidade cinemática ν, calor específico c e condutividade térmica k está localizado entre duas superfícies cilíndricas concêntricas. A interior, de raio r_1, gira com velocidade angular Ω e tem temperatura T_1 enquanto a exterior, de raio r_2, é imóvel e tem temperatura T_2. Ache a distribuição de temperaturas no fluido. Considere escoamento incompressível, permanente, laminar e sem gravidade.

Dados:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,\upsilon_r)}{\partial r}+\frac{\partial\upsilon_\theta}{r\partial\theta}=0$$

$$\frac{\partial\upsilon_r}{\partial t}+\upsilon_r\frac{\partial\upsilon_r}{\partial r}+\upsilon_\theta\frac{\partial\upsilon_r}{r\partial\theta}-\frac{\upsilon_\theta^2}{r}=g_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2\upsilon_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon_r}{\partial r}-\frac{\upsilon_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\upsilon_r}{\partial\theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\upsilon_\theta}{\partial\theta}\right)$$

$$\frac{\partial\upsilon_\theta}{\partial t}+\upsilon_r\frac{\partial\upsilon_\theta}{\partial r}+\upsilon_\theta\frac{\partial\upsilon_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\upsilon_r\upsilon_\theta}{r}=g_\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial\theta}+\nu\left(\frac{\partial^2\upsilon_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\upsilon_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon_\theta}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\upsilon_r}{\partial\theta}-\frac{\upsilon_\theta}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\upsilon_r\frac{\partial T}{\partial r}+\upsilon_\theta\frac{\partial T}{r\partial\theta}=\frac{k}{\rho c}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}\right\}+\frac{\mu}{\rho c}\Phi$$

$$\Phi=2\left[\left(\frac{\partial\upsilon_r}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\upsilon_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\upsilon_r}{r}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial\upsilon_\theta}{\partial r}-\frac{\upsilon_\theta}{r}+\frac{\partial\upsilon_r}{r\partial\theta}\right)^2-\frac{2}{3}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\upsilon_r)}{\partial r}+\frac{\partial\upsilon_\theta}{r\partial\theta}\right]^2$$

Gabarito

1)(a):

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\begin{bmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -5 & 2\\ 5 & 1 & -3\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

(b)Parte simétrica:

$$D_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Parte antissimétrica:

$$\Omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=\begin{bmatrix}0 & -5 & 2\\ 5 & 0 & -3\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

2) $$\rho\frac{D\phi}{Dt}=\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+v_j\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)=\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\rho v_j\frac{\partial\phi}{\partial x_j}$$

Somando agora do lado direito a equação da continuidade multiplicada por ϕ:

$$\rho\frac{D\phi}{Dt}=\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\rho v_j\frac{\partial\phi}{\partial x_j}+\phi\left[\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j}}_{0}\right]=\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\phi\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho v_j\frac{\partial\phi}{\partial x_j}+\phi\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j}$$

Aplicando a regra da cadeia:

$$\rho\frac{D\phi}{Dt}=\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_j\phi)}{\partial x_j}$$

Ou seja:

$$\rho\frac{D\phi}{Dt}=\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\phi\vec{v})$$

3)Antes de mais nada, é preciso obter o versor normal ao plano. Pela regra da mão direita, um vetor normal ao plano pode ser:

$$\vec{b} = (B - A) \times (C - B) = (2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_1) \times (5\vec{e}_3 - 2\vec{e}_2) = 10\vec{e}_1 + 15\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$$

O versor normal unitário será:

$$\hat{n} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{10}{19}\vec{e}_1 + \frac{15}{19}\vec{e}_2 + \frac{6}{19}\vec{e}_3$$

O vetor da tensão é dado por:

$$\vec{\sigma}^{(\hat{n})} = \sigma_{ji} n_j = \sigma_{1i}\, n_1 + \sigma_{2i}\, n_2 + \sigma_{3i}\, n_3$$

Logo:

$$\sigma_1^{(\hat{n})} = \sigma_{11}\, n_1 + \sigma_{21}\, n_2 + \sigma_{31}\, n_3 = 8.\frac{10}{19} - 4.\frac{15}{19} + 1.\frac{6}{19} = \frac{26}{19}$$

$$\sigma_2^{(\hat{n})} = \sigma_{12}\, n_1 + \sigma_{22}\, n_2 + \sigma_{32}\, n_3 = -4.\frac{10}{19} + 3.\frac{15}{19} + 0{,}5.\frac{6}{19} = \frac{8}{19}$$

$$\sigma_3^{(\hat{n})} = \sigma_{13}\, n_1 + \sigma_{23}\, n_2 + \sigma_{33}\, n_3 = 1.\frac{10}{19} + 0{,}5.\frac{15}{19} + 2.\frac{6}{19} = \frac{29{,}5}{19}$$

Assim,

$$\vec{\sigma}^{(\hat{n})} = \frac{26}{19}\vec{e}_1 + \frac{8}{19}\vec{e}_2 + \frac{29{,}5}{19}\vec{e}_3$$

A parte normal é:

$$\sigma_n = \vec{\sigma}^{(\hat{n})} \cdot \hat{n} = \frac{260 + 120 + 177}{19^2} = 1{,}54$$

Assim,

$$\vec{\sigma}_n = \sigma_n\, \hat{n} = \frac{15{,}4}{19}\vec{e}_1 + \frac{23{,}1}{19}\vec{e}_2 + \frac{9{,}24}{19}\vec{e}_3$$

E a parte tangencial é a diferença entre o vetor da tensão e a parte normal:

$$\vec{\sigma}_s = \vec{\sigma}^{(\hat{n})} - \vec{\sigma}_n = \frac{10{,}6}{19}\vec{e}_1 - \frac{15{,}1}{19}\vec{e}_2 + \frac{20{,}26}{19}\vec{e}_3$$

E em módulo temos $\sigma_s = 1{,}44$.

4) É fácil ver que a equação de Navier-Stokes resulta:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d\upsilon_\theta}{dr}+\frac{\upsilon_\theta}{r}\right)=0$$ (Se tem dúvidas, consulte as notas de ala ou o livro texto.)

A solução fica:

$$\upsilon_\theta=\frac{\Omega r_1^{\,2}}{r_2^{\,2}-r_1^{\,2}}\left(\frac{r_2^{\,2}}{r}-r\right)$$

A equação da energia fica:

$$k\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)\right]=-\mu\Phi$$

Onde temos:

$$\Phi=\frac{4\Omega^2 r_1^{\,4} r_2^{\,4}}{\left(r_2^{\,2}-r_1^{\,2}\right)^2}\frac{1}{r^4}$$

Substituindo na equação da energia e integrando, temos:

$$T=-\frac{\mu}{k}\frac{\Omega^2 r_1^{\,4} r_2^{\,4}}{\left(r_2^{\,2}-r_1^{\,2}\right)^2}\frac{1}{r^2}+C_3\ln r+C_4$$

Com:

$$C_3=\frac{T_2-T_1-\dfrac{\mu}{k}\dfrac{\Omega^2 r_1^{\,2} r_2^{\,2}}{\left(r_2^{\,2}-r_1^{\,2}\right)}}{\ln\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)}$$

E com:

$$C_4=T_2-C_3\ln r_2+\frac{\mu}{k}\frac{\Omega^2 r_1^{\,4} r_2^{\,2}}{\left(r_2^{\,2}-r_1^{\,2}\right)^2}$$