Questão 1 (4,0 pontos)

A treliça da figura 1 foi analisada e obtiveram-se as respostas apresentadas nessa figura e $N_1 = -6{,}0\text{kN}$ e $N_2 = -8{,}0\text{kN}$.

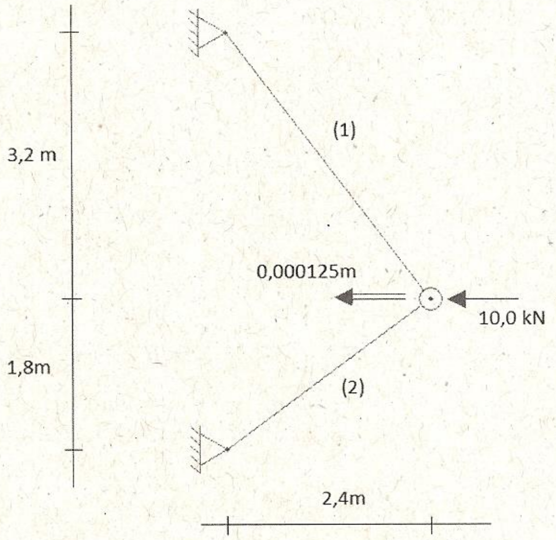


Figura 1

Duas dessas treliças foram associadas com uma mola $k_1 = 10^7\,\text{N/m}$ como se mostra na figura 2. Admite-se que a massa da estrutura seja $m_1 = 1000\text{kg}$. Essa estrutura sofre um impacto de uma massa $m_2 = 500\text{kg}$ com uma velocidade $v = 1{,}2\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

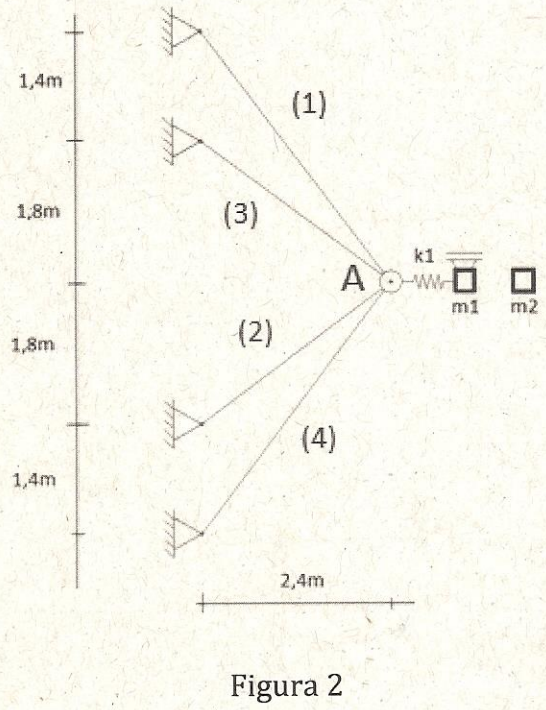


Figura 2

Nessas condições, pedem-se:

- Determinar os sistema massa-mola com 1 grau de liberdade equivalente;
- Apresentar a equação do movimento e indicar as condições iniciais;
- Apresentar as expressões das respostas dos deslocamentos da massa m1 e do ponto A da treliça
- Determinar o máximo deslocamento da massa m1
- Determinar o máximo deslocamento da treliça
- Calcular as máximas forças normais e a máxima força na mola.

Questão 2 (4,0 pontos)

Seja a estrutura da figura 3 solicitada por carregamento harmônico $P(t) = 6.000\sin(\varpi t)\text{N}$ com $\varpi = 20\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$. Admite-se que a massa $m_1 = 1000\text{kg}$ do pórtico esteja toda concentrada no ponto A. Sabe-se que para uma carga horizontal de 10kN aplicada na viga em L ABC (sem a mola) o deslocamento horizontal em A é igual a $U_A = 3{,}8 \times 10^{-2}\,\text{m}$ e que a taxa de amortecimento da estrutura é dada por $\xi = 3\%$ e que $k_1 = 5 \times 10^4 \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$. Assim, considerando-se o efeito exclusivo de $P(t)$, pedem-se:

- Em regime permanente, a distribuição de momentos fletores e a força na mola correspondentes à primeira condição de extremo;
- O deslocamento horizontal do ponto A, a distribuição de momentos fletores e a força na mola correspondentes ao instante $t_1 = 0{,}5\text{s}$

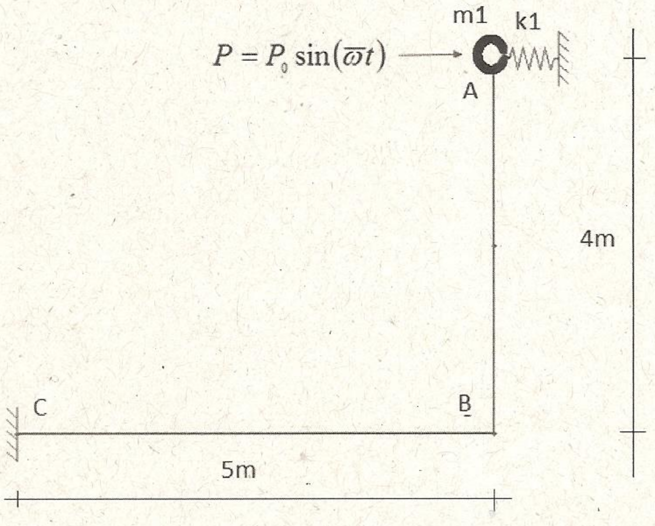


Figura 3

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0, \qquad \xi = \frac{c}{2m\omega}.$$

Amortecimento subcrítico

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\,\rho\cos(\omega_D t - \theta),$$

$$\rho = \sqrt{(u_0)^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D}\right)^2},$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2},$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D u_0}\right), \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \operatorname{sen}\overline{\omega}t.$$

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = e^{-\xi\omega t}\,\rho\cos(\omega_D t - \theta) + \overline{\rho}\operatorname{sen}(\overline{\omega}t - \overline{\theta}),$$

$$\rho = \sqrt{\left(u_0 + \overline{\rho}\operatorname{sen}\overline{\theta}\right)^2 + \left[\frac{\dot{u}_0 - \overline{\omega}\overline{\rho}\cos\overline{\theta} + \xi\omega\left(u_0 + \overline{\rho}\operatorname{sen}\overline{\theta}\right)}{\omega_D}\right]^2},$$

$$\theta = \arctan\frac{\dot{u}_0 - \overline{\omega}\overline{\rho}\cos\overline{\theta} + \xi\omega\left(u_0 + \overline{\rho}\operatorname{sen}\overline{\theta}\right)}{\omega_D\left(u_0 + \overline{\rho}\operatorname{sen}\overline{\theta}\right)}.$$

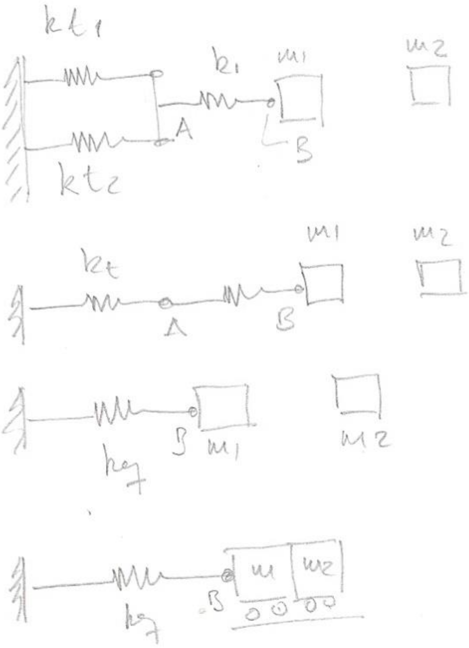
$$\overline{\rho} = Du_e,$$

$$\overline{\theta} = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right), \qquad 0 \le \overline{\theta} \le \pi,$$

$$\beta = \frac{\overline{\omega}}{\omega}. \qquad u_e = \frac{p_0}{k}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2}}.$$

Q1 P3



$$m\ddot{u}_B + k\,u_B = 0$$

0,5

$$u_0 = 0$$

$$\dot{u}_0 = \frac{m_2 V}{m_1 + m_2} = 9{,}4\ m/s$$

$$\rho = \frac{\dot{u}_0}{\omega} = 5{,}1 \times 10^{-3}\ m$$

$$\theta = \pi/2$$

$$kt = kt_1 + kt_2$$

$$kt_1 = kt_2 = \frac{10000}{0{,}000125} = 80 \times 10^6\ \frac{N}{m}$$

$$kt = 160 \times 10^6\ \frac{N}{m}$$

$$k_{eq} = \frac{kt \times k_1}{kt + k_1} = \frac{160 \times 10^6 \times 10^7}{160 \times 10^6 + 10^7}$$

$$k_{eq} = \frac{160 \times 10 \times 10^{12}}{170 \times 10^6} = 9{,}412 \times 10^6\ \frac{N}{m}$$

1,0

$$\omega = \sqrt{\frac{9{,}412 \times 10^6}{1500}} = 79{,}21\ \frac{rad}{s}$$

$$u(t) = \rho \cos(\omega t - \theta)$$

0,5 $$u_B(t) = 5{,}1 \times 10^{-3} \times \cos(79{,}21 \times t - \pi/2)$$

0,5 $$u_A(t) = \frac{k_{eq}}{kt}\, u_B(t) = 3{,}0 \times 10^{-4} \cos(79{,}21t - \pi/2)$$

$$F_{max\,A} = F_{max\,B} = k_{eq} \times u_{B\,max}$$

0,5 $$= 47{,}5 \times 10^3\ N$$

$$F_{max\,tubical,k} = u_{A\,max} \times kt_1 = 23{,}8\ kN$$

1,0

$$N_1 = N_4 = 0{,}6 \times 24 = 14{,}3\ kN$$

$$N_3 = N_2 = 0{,}8 \times 24 = 19{,}0\ kN$$

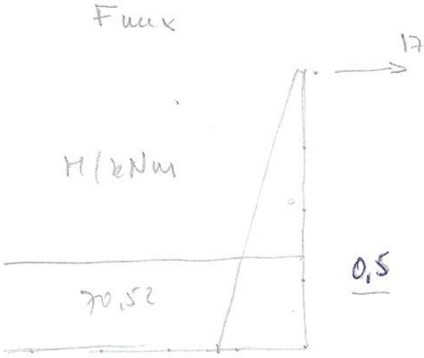
Q2

$$k_{ext} = \frac{10000}{3{,}8\times10^{-2}} = 2{,}632\times10^{5}\ \frac{N}{m}$$

$$k_1 = 5\times10^{4}\ \frac{N}{m}$$

1,0

Fmax



0,5

A 1.0
B 1.0
C 1.0
D 1.0
4.0

$$k_{eq} = 3{,}132\times10^{5}\ \frac{N}{m}$$

$$\omega = 17{,}70\ rad/s.$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = 1{,}13$$

$$\xi = 0{,}03$$

$$D = 3{,}505$$

$$u_e = \frac{p_0}{k_{eq}} = 0{,}0192\ m$$

0,5 $\bar{\rho} = 0{,}067\ m$

$$\bar{\theta} = \operatorname{atan}\frac{2\times0{,}03\times1{,}13}{1-1{,}13^{2}} = -0{,}24$$

$$0 \leq \bar{\theta} \leq \pi \Rightarrow \bar{\theta} = 2{,}902$$

$$u_p = 0{,}067\times\operatorname{sen}(20t - 2{,}902)$$

$$F_{max} = k_{eq}\times u_p = 20{,}98\ kN$$

$$F_{ext} = 17{,}63\ kN$$

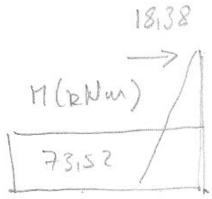
$$F_m = 3{,}35\ kN$$

$$\rho^{2} = \underbrace{\left(\bar{\rho}\operatorname{sen}\bar{\theta}\right)^{2}}_{a} + \underbrace{\left(\frac{-\bar{\omega}\bar{\rho}\cos\bar{\theta} + \xi\omega\bar{\rho}\operatorname{sen}\bar{\theta}}{\omega_D}\right)^{2}}_{b}$$

$\rho = 0{,}076\,m$ **0,5**

$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right) = 1{,}359\ rad$$

$$u_h = e^{-\xi\omega t}\rho\cos(\omega_D t - \theta) = e^{-0{,}531t}\,0{,}076\times\cos(17{,}69t - 1{,}359)$$



$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - 0{,}03^{2}} = 17{,}69\ rad/s$$

$$t_1 = 0{,}5\,s \rightsquigarrow u_p(0{,}5) = 4{,}884\times10^{-2}\ m \qquad u_h(0{,}5) = 2{,}099\times10^{-2}\ m$$

$$u_{t_1}(0{,}5) = 6{,}983\times10^{-2}\ m \rightsquigarrow \left.\begin{aligned} F(0{,}5) &= 21{,}87\ kN \\ F_m(0{,}5) &= 3{,}47\ kN \\ F_{ext}(0{,}5) &= 18{,}38\ kN \end{aligned}\right\}$$

1,0

0,5