Física I - IME 2016 PROVA 3 – (29/11/2016)

Q1: ____ Q2: ____ Q3: ____ Q4: ____ NOTA: ____

Aluno:	Nº USP:	Turma

Avisos:

- ★ Esta prova tem duração de 100 minutos.
- ★ Resolva cada questão na própria folha. Use o verso se necessário.
- ★ Escreva de forma legível.
- ★ É permitido o uso de calculadora, mas NÃO de qualquer outro aparelho eletrônico.
- ★ Justifique TODAS as suas respostas, bem como fórmulas utilizadas fora do formulário.

Formulário:

$\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$

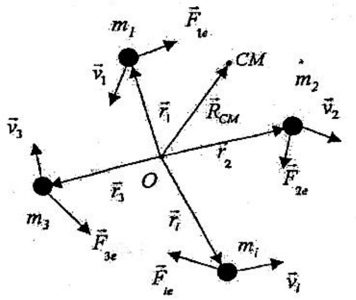
$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$

$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i$, onde $M = \sum_i m_i$

$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{v}_i$; $\vec{P} = M\vec{V}_{CM}$

$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$, onde $\vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{F}_{i,ext}$

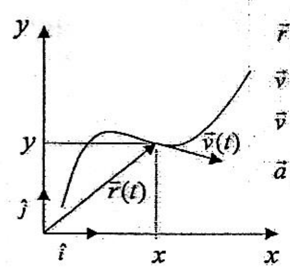
$M\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \vec{F}_{ext}$; $M\frac{d^2\vec{R}_{CM}}{dt^2} = \vec{F}_{ext}$



Cinemática Unidimensional $\Rightarrow x(t) \overset{d/dt}{\underset{\int + x_0}{\Leftrightarrow}} v(t) \overset{d/dt}{\underset{\int + v_0}{\Leftrightarrow}} a(t)$

MRUV $\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ (x_0 e v_0 - condições iniciais)

$v(t) = v_0 + at$ (a=constante) $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$ Torricelli

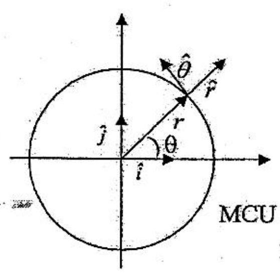


$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}$

$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$



$\vec{r} = r\hat{r}$

$\vec{v} = v\hat{\theta}$

$\vec{a} = a_r\hat{r} + a_t\hat{\theta}$

$a_r = \frac{-v^2}{r}$ $a_t = \frac{dv}{dt}$

MCU - movimento periódico

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ $\omega = \frac{v}{r}$

Equações vetoriais $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$ $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ $\vec{F}_{res} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$

Trabalho: $W = \int_{x1}^{x2} F dx \equiv$ Área sob o gráfico de $F \times x$

ou $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$

Impulso de uma força: $\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt = \Delta\vec{p}$

Sistema fechado: $\Delta K + \Delta U = W_{f_{atrito}} + W_{F_{ext}}$

Teorema trabalho-Energia Cinética: $W = \Delta K = \frac{1}{2} m \left(v_f^2 - v_i^2 \right)$

Energia potencial gravitacional: $U = mgy$

Energia Potencial de Mola: $U = \frac{1}{2} kx^2$

Teorema dos eixos paralelos $I = I_{CM} + Md^2$

Energia cinética de rotação $K = \frac{1}{2} I\omega^2$.

Dinâmica de rotação

$\tau = I\alpha$, $I = \int_V r^2 dm$ $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

Teorema trabalho-Energia Cinética:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} I \left(\omega_f^2 - \omega_i^2 \right)$$

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$$

Momento angular de uma partícula: $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$, **Momento angular de um corpo rígido:** L=Iω

Lei da Gravitação: $F = G\frac{Mm}{r^2}$ $a_g = \frac{GM}{r^2}$

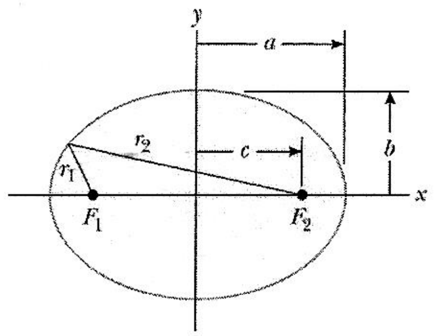
Energia Potencial Gravitacional: $U = -\frac{GMm}{r}$

Velocidade de Escape: $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

Terceira Lei de Kepler: $T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) r^3$

Equação da Elipse: $a^2 = b^2 + c^2$

Excentricidade da elipse: e=$\frac{c}{a}$



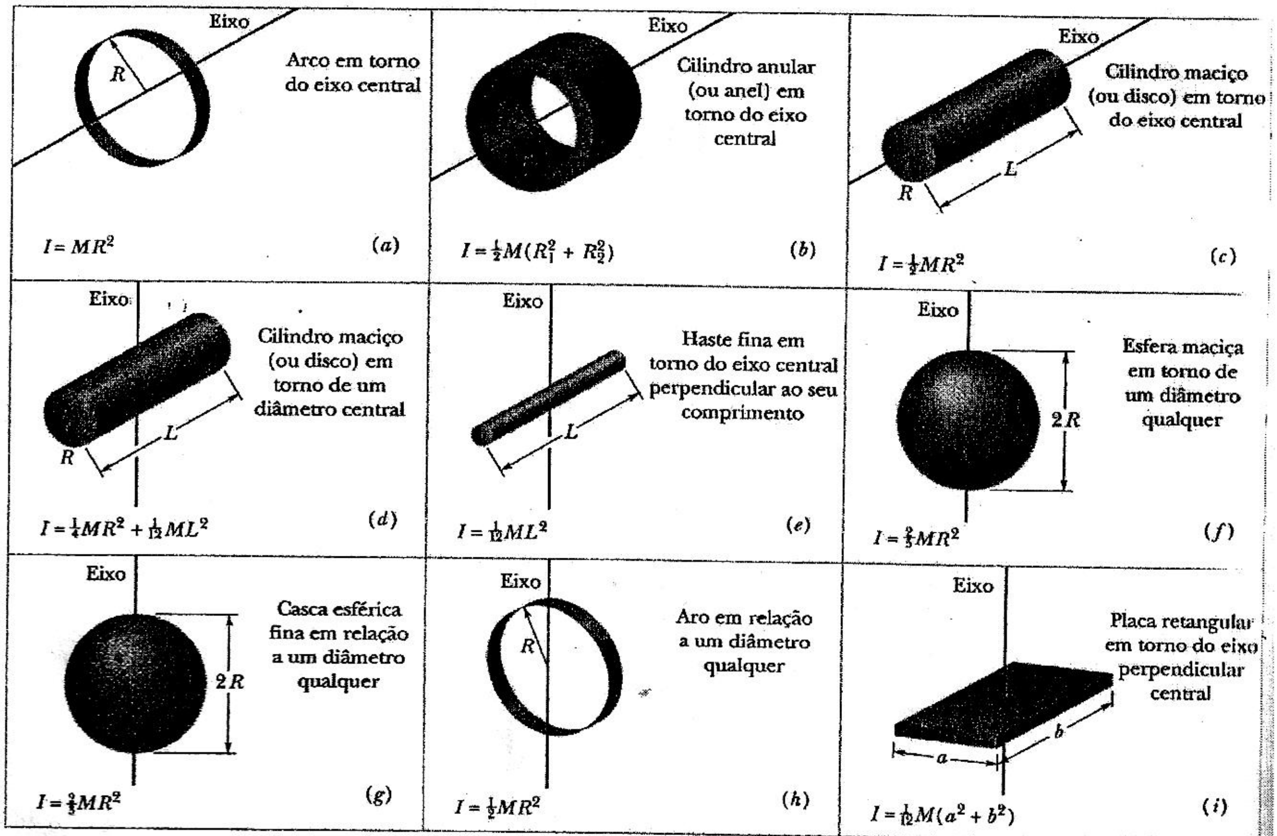
CONSTANTES:

Considere a aceleração da gravidade $g = 10.0$ m/s

Massa do Sol=$1{,}99 \times 10^{30}$ kg

Constante Gravitacional, $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $m^3/(s.kg)$

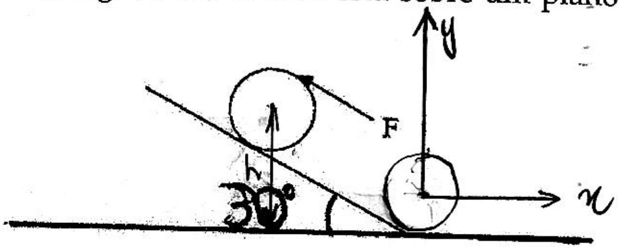
TABELA 10-2 Alguns Momentos de Inércia



Questão 1

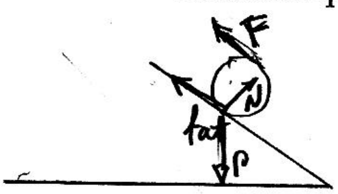
(2.5)

Um cilindro uniforme de 0,5 kg e 5 cm de raio está sobre um plano inclinado com 30° de inclinação.



(1.5): a) Desenhe o diagrama de forças para o cilindro em repouso, quando o centro de massa do cilindro está a uma altura inicial de 1,55 m acima do nível do plano. Calcule a força externa F que precisa ser aplicada no cilindro, como mostrado na figura, para mantê-lo parado.

(1.0): b) Se a força externa F for removida, use o princípio de conservação de energia para encontrar a velocidade do centro de massa do cilindro no final do plano inclinado. Considere que o cilindro role o plano inclinado sem deslizar.



$\sum F_x = 0$

$mg\sin\theta - F - fat = 0 \quad (1)$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = 0 \quad (2)$

$\sum \tau = 0$

$FR - fat\,R = 0 \Rightarrow fat = F \quad (3)$

Subst (3) em (2) $\quad mg\sin\theta = 2F$

$F = \dfrac{mg\sin 30°}{2} = \dfrac{0{,}5 \times 10}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{4}\,N$

(a) $\boxed{F = 1{,}25\,N}$

Conservação de energia mecânica $\quad E_{mi} = E_{mf} \quad (4)$

$E_{mi} = U_i = mg\,(1{,}55 - 0{,}05)$

$E_{mf} = \dfrac{1}{2} m v_{CM}^2 + \dfrac{1}{2} I \omega^2 \qquad$ mas $\omega = \dfrac{v_{CM}}{R}$

$I = \dfrac{1}{2} m R^2$

$\cancel{m}g(1{,}50) = \dfrac{1}{2}\cancel{m} v_{CM}^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}\cancel{m}\cancel{R^2}\dfrac{v_{CM}^2}{\cancel{R^2}}$

$1{,}50 \times 10 = \dfrac{3}{4} v_{CM}^2 \Rightarrow v_{CM} = \sqrt{\dfrac{4 \times 1{,}5 \times 10}{3}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = \boxed{4{,}47\,m/s}$ (b)

Questão 2	(2.5)

Um cometa de massa $1{,}20 \times 10^{20}$ kg move em uma órbita elíptica ao redor do sol. Sua distância ao Sol varia entre 0,500 UA e 50,0 UA.

Sabendo que 1UA é a distância média entre a Terra e o Sol=$1{,}459 \times 10^{11}$ m, responda:

(1.0): a) Qual é a excentricidade da sua órbita?

(1.0): b) Qual é o período?

(0.5): c) No afélio (maior distância), qual é a energia potencial do sistema cometa-sol?

$$\begin{cases} a - c = 0{,}5 \text{ UA} \\ a + c = 50{,}0 \text{ UA} \end{cases}$$

$$2a = 50{,}5 \text{ UA}$$

$$a = 25{,}25 \text{ UA}$$

$$2c = (50{,}0 - 0{,}5) \text{ UA}$$

$$c = \frac{49{,}5}{2} = 24{,}75 \text{ UA}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{24{,}75}{25{,}25} = \boxed{0{,}98} \quad (a)$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_s}\right) a^3$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_s} a^3} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}99 \times 10^{30}}\right) \times (25{,}25)^3 \times (1{,}459 \times 10^{11})^3}$$

$$T = \sqrt{1{,}48706 \times 10^{19}}$$

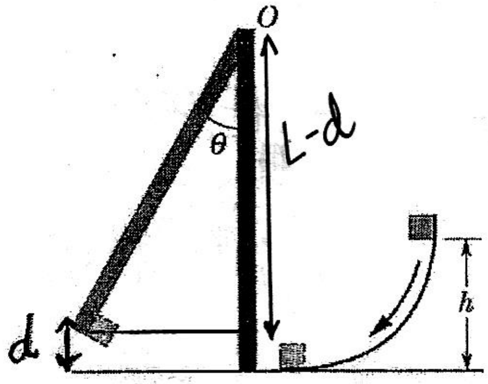
$$T = 3{,}85624 \times 10^{9}\, s \simeq 122{,}3 \text{ anos}$$

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}99 \times 10^{30} \times 1{,}20 \times 10^{20}}{50{,}0 \times 1{,}459 \times 10^{11}}$$

$$\boxed{U = -2{,}1834 \times 10^{27}\, J}$$

Questão 3	(2.5)

Na figura, um pequeno bloco de 50 g desliza para baixo em uma superfície curva (sem atrito) a partir de uma altura h=20 cm e então se gruda em uma barra uniforme de massa igual a 100 g e comprimento 40 cm. A barra gira de um ângulo θ em torno de um ponto O (sem atrito).



(0.5): a) Qual é a velocidade do bloco imediatamente antes de se chocar com a haste?

(1.0): b) Qual é a grandeza conservada (momento linear, momento angular ou energia mecnica) no choque entre o bloco e a haste? Calcule a velocidade angular do sistema haste+bloco imediatamente após a colisão completamente inelástica.

(1.0): c) Encontre o valor de θ. Dica: No instante mostrado na figura, a extremidade inferior da haste subiu uma distância d, enquanto que o centro de massa da haste subiu uma distância de $d/2$.

(a) $\cancel{m}gh = \frac{\cancel{m}v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times 10\times 0{,}2} = \sqrt{4} = \boxed{2\,m/s}$ (a)

Somente o momento angular é conservado na colisão citada.

$L_i = r\,m\,v\,\sin 90^\circ = L m v$

$L_i = L_f \Rightarrow L m v = (I_{haste} + I_m)\,\omega$

$I_{haste} = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2 + 3ML^2}{12} = \frac{ML^2}{3}$

$L m v = \left(\frac{ML^2}{3} + mL^2\right)\omega$

$m v = L\omega\left(\frac{M+3m}{3}\right)$

$M = 0{,}1\,kg$
$L = 0{,}40\,m$
$m = 0{,}050\,kg$
$v = 2\,m/s$

$\omega = \frac{3 m v}{L(M+3m)} = \frac{3\times 0{,}05\times 2}{0{,}4\,(0{,}1 + 3\times 0{,}05)} = 3\,rad/s$

Conservação de energia

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$0 - \frac{1}{2}(I_{haste} + I_m)\omega^2 + (mg\,d) + Mg\frac{d}{2} = 0$$

onde $\cos\theta = \frac{L-d}{L} \Rightarrow \frac{d}{L} = 1-\cos\theta \Rightarrow d = L - L\cos\theta$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{3} + mL^2\right)\omega^2 + mgL(1-\cos\theta) + \frac{Mg}{2}L(1-\cos\theta) = 0$$

$$\left(mgL + \frac{MgL}{2}\right)\cos\theta = mgL + \frac{MgL}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{3} + mL^2\right)\omega^2$$

$$\left(mg + \frac{Mg}{2}\right)\cos\theta = mg + \frac{Mg}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{M}{3} + m\right)3^2$$

$$\cos\theta = \frac{mg + \frac{Mg}{2} - \frac{9L}{2}\left(\frac{M}{3} + m\right)}{\left(mg + \frac{Mg}{2}\right)}$$

$$\cos\theta = \frac{0,05\times10 + \frac{0,1\times10}{2} - \frac{9\times0,4}{2}\left(\frac{0,1}{3} + 0,05\right)}{\left(0,05\times10 + \frac{0,1\times10}{2}\right)}$$

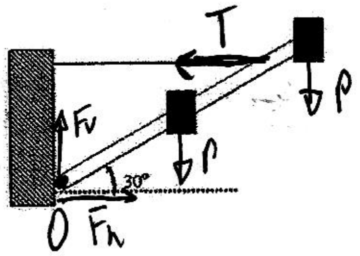
$$\cos\theta = \frac{0,5 + 0,5 - 0,15}{(0,5 + 0,5)} = 0,85$$

$$\theta = \cos^{-1} 0,85$$

$$\boxed{\theta = 31,8^\circ}$$

Questão 4	(2.5)

Uma barra de 4 m e de peso desprezível é pivotada em uma das extremidades. Ela tem dois pesos presos (um de 2 kg no seu centro e outro de 2 kg na outra extremidade. Ela é sustentada por um cabo horizontal, com a barra fazendo um ângulo de 30° com a horizontal. O cabo é preso na barra a 3/4 do comprimento da barra, medido a partir do pivô, como mostrado na figura.



(1.5): a) Encontre a tensão no cabo.

(1.0): b) Se o cabo é cortado, encontre a aceleração angular inicial da barra.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -T + F_h = 0 \Rightarrow T = F_h$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_V - 2P = 0 \Rightarrow F_V = 2P$$

Torque em relação ao eixo em O deve ser zero

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow P\frac{L}{2}\sin 60^\circ + PL\sin 60^\circ - \frac{3}{4}LT\sin 30^\circ = 0$$

$$P\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4}T\frac{1}{2}$$

$$T = \frac{P}{4}\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right) \times \frac{8}{3}$$

$$T = \frac{2 \times 10}{4} \times 3\sqrt{3} \times \frac{8}{3} = 40\sqrt{3} = 69{,}3\ N$$

$$\boxed{T = 69{,}3\ N}$$

$$I = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + mL^2 = \frac{mL^2 + 4mL^2}{4} = \frac{5mL^2}{4}$$

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{P L \sin 60^\circ + P\frac{L}{2}\sin 60^\circ}{I} = \frac{\cancel{m}g\frac{3}{2}L\sin 60^\circ}{\frac{5\cancel{m}L^2}{4}} = \frac{12 g \sin 60^\circ}{10 L} = 3\sin 60^\circ$$

$$\boxed{\alpha = 2{,}60\ \frac{rad}{s^2}}$$