EXERCÍCIO 12.74 (6ª ED) — SOLUÇÃO COM REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

$T_g \rightarrow$ $\bar{h} = 125\,W/m^2K$

A_T, $T_T = 453K$, $\varepsilon_T = 0.6$

A_P, $T_P = 723K$, $\varepsilon_P = 0.85$

Eq. Geral
$$q_i = \frac{E_{CN,i} - J_i}{(1-\varepsilon_i)/\varepsilon_i A_i} \qquad (1)$$

$$\frac{E_{CN,i} - J_i}{(1-\varepsilon_i)/\varepsilon_i A_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{J_i - J_j}{(A_i F_{ij})^{-1}} \qquad (2)$$

$$q_i = q_{COND} + q_{CONV} + \underset{\text{(p.ex. RESIST. ELÉTRICA)}}{q_{FONTE/SUMIDOURO}} + \underset{\text{EM OUTRA BANDA}}{q_{RADIAÇÃO}}$$

$$q_i = -kA\frac{(T_i - T_L)}{L} + hA(T_\infty - T_i) + q_{FONTE/SUMIDOURO} + \underset{\text{OUTRA BANDA}}{\varepsilon A\sigma(T_{VIZ}^4 - T_i^4)} \qquad (3)$$

Vamos representar as eq's (1) e (2) em duas matrizes para $i = T$ e $i = P$

Eq(2):

$$\text{(I)} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{E_{CN,T}}{(1-\varepsilon_T)/\varepsilon_T A_T} \\[2ex] \dfrac{E_{CN,P}}{(1-\varepsilon_P)/\varepsilon_P A_P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1}{(1-\varepsilon_T)/\varepsilon_T A_T} + \dfrac{1}{(A_T F_{TP})^{-1}}\right) & \dfrac{-1}{(A_T F_{TP})^{-1}} \\[2ex] -\dfrac{1}{(A_P F_{PT})^{-1}} & \left(\dfrac{1}{(1-\varepsilon_P)/\varepsilon_P A_P} + \dfrac{1}{(A_P F_{PT})^{-1}}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_T \\ J_P \end{pmatrix}$$

para Eq (1):

$$(\mathrm{II})\quad \begin{pmatrix} q_T - \dfrac{E_{CN,T}}{(1-\varepsilon_T)/\varepsilon_T A_T} \\[2ex] q_P - \dfrac{E_{CN,P}}{(1-\varepsilon_P)/\varepsilon_P A_P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{(1-\varepsilon_T)/\varepsilon_T A_T} & 0 \\[2ex] 0 & -\dfrac{1}{(1-\varepsilon_P)/\varepsilon_P A_P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_T \\[2ex] J_P \end{pmatrix}$$

• lembrando que 1) $F_{TP} = 1.0$ e $A_T F_{TP} = A_P F_{PT}$, então $A_T = A_P F_{PT}$

e 2) $q_T = hA(T_g - T_T)$ por (3)

• reescrevemos a matriz (I) como:

$$(\mathrm{III})\quad \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma T_T^4}{(1-\varepsilon_T)/\varepsilon_T A_T} \\[2ex] \dfrac{\sigma T_P^4}{(1-\varepsilon_P)/\varepsilon_P A_P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1}{(1-\varepsilon_T)/\varepsilon_T A_T} + A_T\right) & -A_T \\[2ex] -A_T & \left(\dfrac{1}{(1-\varepsilon_P)/\varepsilon_P A_P} + A_T\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_T \\[2ex] J_P \end{pmatrix}$$

e (II):

$$(\mathrm{IV})\quad \begin{pmatrix} hA(T_g - T_T) - \dfrac{\sigma T_T^4}{(1-\varepsilon_T)/\varepsilon_T A_T} \\[2ex] q_P - \dfrac{\sigma T_P^4}{(1-\varepsilon_P)/\varepsilon_P A_P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{(1-\varepsilon_T)/\varepsilon_T A_T} & 0 \\[2ex] 0 & -\dfrac{1}{(1-\varepsilon_P)/\varepsilon_P A_P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_T \\[2ex] J_P \end{pmatrix}$$

Assim, vemos que o problema tem:

4 eq (2 em $\boxed{III}$ e 2 em IV) e
4 INCÓGNITAS: J_T, J_P, T_g e q_P
pois A_T, A_P, ε_T, ε_P, T_T e T_P são dados.

} OK! tem solução

Para resolver o sistema de eq's (III), (IV) é mais fácil usar a analogia c/ CIRCUITO ELÉTRICO. A ANALOGIA é mais direta a partir das eq's (1) e (2).

$$q_T \longrightarrow \sigma T_T^4 \underset{\frac{(1-\varepsilon_T)}{\varepsilon_T A_T}}{\text{\textasciitilde\textasciitilde}} J_T \underset{\frac{1}{A_T F_{TP}}}{\text{\textasciitilde\textasciitilde}} J_P \underset{\frac{(1-\varepsilon_P)}{\varepsilon_P A_P}}{\text{\textasciitilde\textasciitilde}} \sigma T_P^4 \longrightarrow q_P$$

$F_{TP} \simeq 1.0$

mas $q_T = hA(T_g - T_T)$

$$hA(T_g - T_T) \longrightarrow \sigma T_T^4 \underset{R_{TOTAL}}{\text{\textasciitilde\textasciitilde}} \sigma T_P^4 \longrightarrow q_P$$

ÑO

$$R_{TOTAL} = \frac{(1-\varepsilon_T)}{\varepsilon_T A_T} + \frac{1}{A_T} + \frac{(1-\varepsilon_P)}{\varepsilon_P A_P} = \frac{1}{A_T}\left(\frac{(1-\varepsilon_T)}{\varepsilon_T} + 1 + \frac{A_T}{A_P}\frac{(1-\varepsilon_P)}{\varepsilon_P}\right)$$

$$R_{TOTAL} = \frac{1}{A_T}\left(\frac{(1-\varepsilon_T)}{\varepsilon_T} + 1\right) = \frac{1}{A_T}\left(\frac{1-\cancel{\varepsilon_T}+\cancel{\varepsilon_T}}{\varepsilon_T}\right) = \frac{1}{A_T \varepsilon_T}$$

então:

$$hA(T_g - T_T) \longrightarrow \sigma T_T^4 \underset{\frac{1}{A_T \varepsilon_T}}{\text{\textasciitilde\textasciitilde}} \sigma T_P^4 \longrightarrow q_P$$

ou

$$hA(T_g - T_T) = A_T \varepsilon_T \sigma (T_T^4 - T_P^4) \qquad (5)$$

$$h(T_g - T_T) = \varepsilon_T \sigma (T_T^4 - T_P^4)$$

$$125\,(T_g - 453) = 0.6 \times 5{,}67 \times 10^{-8} (453^4 - 723^4)$$

$$T_g = 390\,K \quad (117\,°C)$$

e também:

$$A_T \varepsilon_T \sigma (T_T^4 - T_P^4) = q_P \Rightarrow \frac{q_P}{A_T} = 0.6 \times 5{,}67 \times 10^{-8} (453^4 - 723^4)$$

$$\frac{q_P}{A_T} = -7863 \ W/m^2$$ (SENTIDO CONTRÁRIO DO INDICADO)

$$\frac{q_T}{A_T} = h(T_\infty - T_T) = 125 \times (390 - 453) = -7875 \ W/m^2$$ (SENTIDO CONTRÁRIO DO INDICADO)

OBSERVAÇÕES

1) Neste exemplo com somente duas superfícies de RADIOSIDADES, seria mais rápido montar direto a ANALOGIA c/ CIRCUITO ELÉTRICO. A importância - geral - do sistema na forma matricial é identificar claramente se o sistema tem solução

2) Apesar de o enunciado não informar, $q_p \neq 0$, na verdade é positivo ($+7863\ W/m^2$). Isto significa que algum mecanismo (eq (3)) aporta $7863\ W/m^2$ para a parede do duto.

3) O duto se comporta como C.N. em relação ao termopar $\left(A_T/A_P \approx 0\right)$. Por isso, na Eq.(5) só aparece a emissividade do termopar.