PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Densidade espectral de potência e autocorrelação

Sérgio S Furuie

Ref. específicas: Cap. 3-Semmlow

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Densidade espectral de potência

- Motivação
  - energia do sinal para cada banda de frequência
  - espectro cruzado entre sinais
  - relação entre SDF e correlação

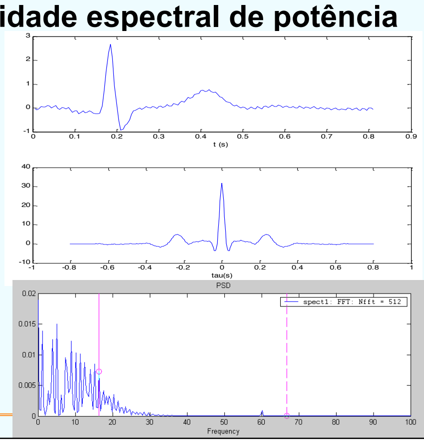
PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Densidade espectral de potência

ECG

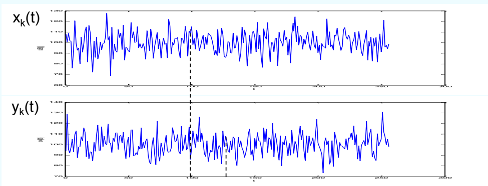
Autocorrelação

Espectro



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Densidade espectral de potência: conceito



$$S_{xx}(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E[|X_k(f,T)|^2]$$

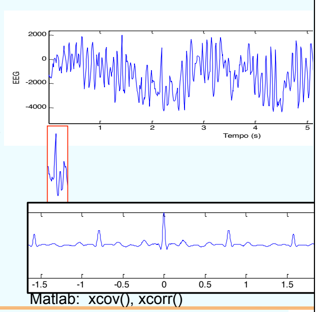
$$S_{xy}(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E[X_k^*(f,T).Y_k(f,T)]$$

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Correlação cruzada ou função correlação

$$corr_{xy}(k)=\sum_{n=0}^{M-1}x(n).y(n+k)$$

- Seja x(n), n=0,N-1
- y(n), n=0,M-1
- M<N
- Obs.:
  - atentar para os limites de k= [-(N-1),M-1]
  - Se necessário usar normalização pelo número de parcelas



Matlab: xcov(), xcorr()

E se for entre o sinal e ele mesmo? Autocorrelação

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

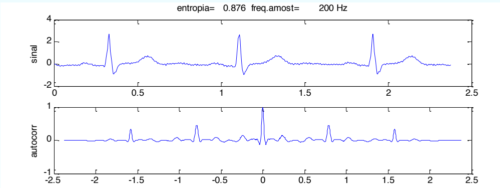
Função autocorrelação

$$corr_{xx}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n).x(n+k)$$
$$k=-(N-1),(N-1)$$

- Seja x(n), n=0,N-1
- Obs.:
  - atentar para os limites de k= [-(N-1),N-1]
  - Número de parcelas não é constante!
  - Se necessário usar normalização pelo número de parcelas

Matlab: xcorr()

Sinal ECG:quasi-periódico, quasi-estac.



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Densidade espectral de potencia

$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2 = X^*(f).X(f)$$
$$S_{xx}(f) = \Im[x(-t) \otimes x(t)] = \Im[corr_{xx}(t)]$$

Ou alternativamente,

Correlação: $corr_{hx}(\tau) = h \circ x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t).x(t+\tau).dt$

Autocorrelação: $corr_{xx}(\tau) = h \circ x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t).x(t+\tau).dt$

Se x(t) for **real**:

$$corr_{xx}(\tau) = corr_{xx}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).x(t-\tau).dt$$
$$corr_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).x[-(\tau - t)].dt = x(t) \otimes x(-t)$$
$$\Im[corr_{xx}(\tau)] = X(f).X^*(f) = |X(f)|^2$$

*Oppenheim (1989);Gonzalez(1993)

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Correlação <=> espectro

$$F\{R_{xy}(\tau)\} = S_{xy}(f)$$

$$F\{R_{xx}(\tau)\} = S_{xx}(f)$$

Função coerência [0,1]:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f).S_{yy}(f)}$$

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Estimadores

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t).x(t+\tau).dt$$

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t).y(t+\tau).dt$$

Estimadores sem bias:

$$\lim_{T\to\infty} E(R_{xx} - \hat{R}_{xx}) \to 0$$
$$\lim_{T\to\infty} E(R_{xx} - \hat{R}_{xx})^2 \to 0$$

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

via dens. espectrais

Periodogramas de x(t)
Sinais estacionários

$$\hat{S}_{xx}(w) = \frac{1}{N}|X(w)|^2$$

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{T}{T-\tau} F^{-1}\{S_{xy}(f)\}$$

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

$$\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{n.T} \sum_{k=1}^{n} |X_k(f,T)|^2$$

Bartlett: particionamento
R(τ) negligível p/ τ > T

$$\hat{S}_{xy}(f) = \frac{1}{n.T} \sum_{k=1}^{n} X_k^*(f,T).Y_k(f,T)$$

$$\hat{\gamma}_{xy}^2(f) = \frac{|\hat{S}_{xy}(f)|^2}{\hat{S}_{xx}(f).\hat{S}_{yy}(f)}$$

Exemplo

Welch: estimador de $S_{xx}(f)$
1) Janelamento c/ Hamming, Hanning... de x(n) p/ evitar descontinuidades
2) Periodogramas
3) Média

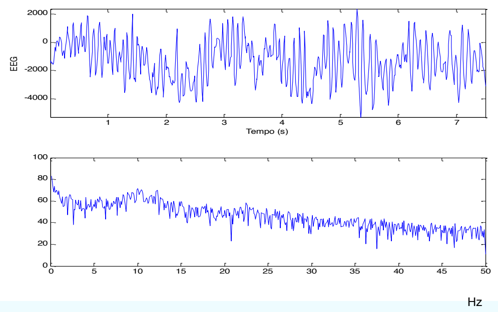
$$S_i(w) = \frac{1}{M.E_w} \left| \sum_{k=0}^{M-1} x_i(n).w(n).e^{-jwn} \right|^2$$

$$E_w = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} w^2(n)$$

$$\hat{S}_{xx}(w) = \frac{1}{K} \sum_{i=1,K} S_i(w)$$

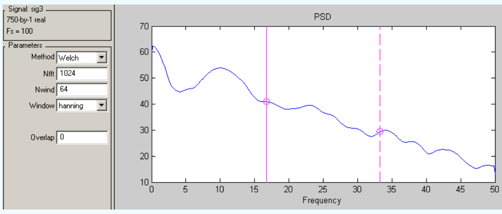
PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Periodograma do sinal inteiro (sem partição)



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Espectro estimado pelo método de Welch



Window de Hanning
64 pontos
overlap de 0%

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Bibliografia

- Biomedical Signal Analysis. R.M. Rangayyan. Wiley Interscience, 2002
- Signals and Systems (2nd Edition) A.V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab Hardcover: 957 pages. Publisher: Prentice Hall; 1996. ISBN-10: 0138147574.