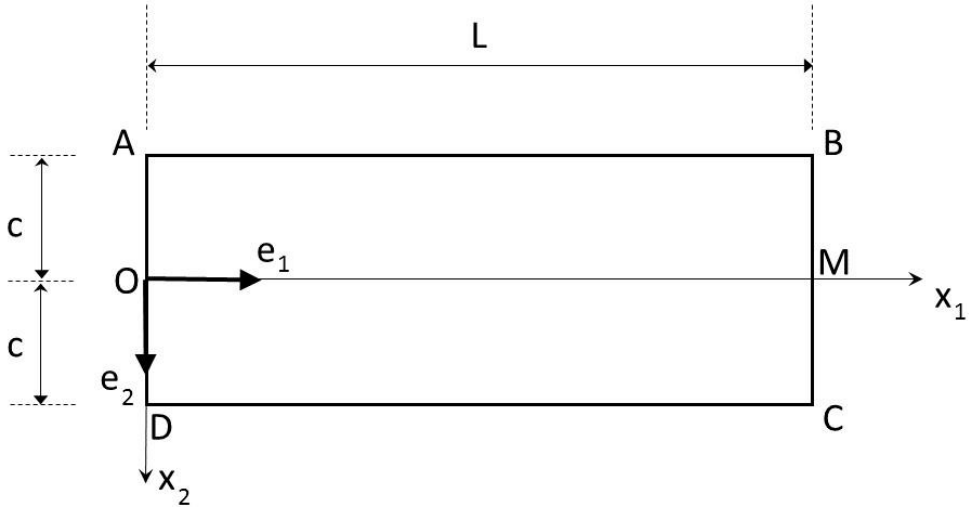
PEF 3302 – Mecânica das Estruturas I
Segunda Prova (22/11/2016) - duração: 160 minutos
Resolver cada questão em uma folha de papel almaço distinta

Questão 1 (5,0)

A Figura abaixo ilustra um sólido com comportamento elástico linear, solicitado por ações externas. Este sólido possui espessura t sendo $t \ll c$, $t \ll L$ e está sem qualquer impedimento a deslocamentos na direção $\boldsymbol{e_3}$. O carregamento externo de superfície é aplicado somente em seu contorno e possui direção paralela ao plano x_1x_2. As forças de volume não possuem componentes na direção $\boldsymbol{e_3}$. O campo de deslocamentos no plano $x_3 = 0$ é dado por $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e_1} + u_2\boldsymbol{e_2}$ sendo:

$$u_1 = \frac{Px_2L^2}{2EI} - \frac{P}{2EI}x_1^2x_2 + \frac{Px_2^3}{6GI} - \frac{P\nu x_2^3}{6EI}$$

$$u_2 = \frac{Px_1^3}{6EI} + \nu\frac{Px_1x_2^2}{2EI} - \left(\frac{Pc^2}{2GI} + \frac{PL^2}{2EI}\right)x_1 + \frac{PL^3}{3EI} + \frac{Pc^2L}{2GI}$$



Nestas expressões, $I = \frac{t(2c)^3}{12}$ e $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Considerando o sistema de coordenadas apresentado, são propostos os seguintes itens:

a) Explique qual a motivação para a apresentação dos modelos simplificados para resolução de problemas em Teoria da Elasticidade. Qual dos modelos apresentados é melhor aplicável a este problema? Justifique sua resposta. (0,5)

b) Calcule as componentes do tensor das deformações infinitesimais $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}$ e ϵ_{12}. (0,5)

c) Mostre que as seguintes componentes do tensor das tensões de Cauchy são dadas por (0,5):

$$T_{11} = -\frac{Px_1x_2}{I}, T_{12} = \frac{P}{2I}(-c^2 + x_2^2), T_{22} = 0$$

PEF 3302 – Mecânica das Estruturas I
Segunda Prova (22/11/2016) - duração: 160 minutos
Resolver cada questão em uma folha de papel almaço distinta

d) Com base na sua resposta do item a), determine e interprete ϵ_{33} e T_{33}. (0,5)

e) Calcule as forças de volume em equilíbrio com o tensor das tensões de Cauchy. (0,5)

f) Forneça expressões para as forças de superfície $\boldsymbol{f}^{XY} = f_1^{XY}\boldsymbol{e_1} + f_2^{XY}\boldsymbol{e_2}$, sendo XY cada uma das arestas AB, BC, CD e DA ilustradas. (0,5)

g) Construa dois diagramas, sendo que o diagrama 1 ilustra a distribuição das forças de superfície nas arestas do retângulo ABCD. O diagrama 2 deve ilustrar a resultante das forças de superfície (por unidade de comprimento na direção $\boldsymbol{e_3}$) das quatro arestas, bem como o momento resultante (também por unidade de comprimento na direção $\boldsymbol{e_3}$) das forças de superfície nas arestas AD e BC, tomando como pólos os centros geométricos destas arestas. Interprete o resultado do diagrama 2. Indicar claramente nos diagramas caso algum dos esforços (forças ou momentos) sejam nulos. (1,5)

h) Sabe-se que a máxima tensão normal no ponto B é dada por $\hat{\sigma}$. Determine P como função de $\hat{\sigma}$ e dos parâmetros geométricos do problema. (0,5)

PEF 3302 – Mecânica das Estruturas I
Segunda Prova (22/11/2016) - duração: 160 minutos
Resolver cada questão em uma folha de papel almaço distinta

Questão 2 (5,0)

Deseja-se resolver o problema estrutural de um anteparo ABCD, fixo na base CD. Trata-se de uma estrutura prismática com espessura (direção z) de 0,01 m. O material é polimérico e, para a faixa de deformações de interesse se comporta segundo a Lei de Hooke, possuindo Módulo de Elasticidade $E = 2$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0{,}42$. Para descrever os pontos materiais envolvidos considere o sistema de coordenadas com orientação dextrógira positiva, localizado no centroide da estrutura, indicado na Figura 2a.

Há uma pressão uniforme $p = 100\text{N/m}^2$, aplicada ao longo da espessura e entre as coordenadas $-10\text{ m} \leq y \leq -2\text{ m}$. Além disso, há um carregamento por unidade de espessura Q = 2000 N/m, conforme a Figura 2. Não há forças de volume nem restrição ao movimento na direção z.

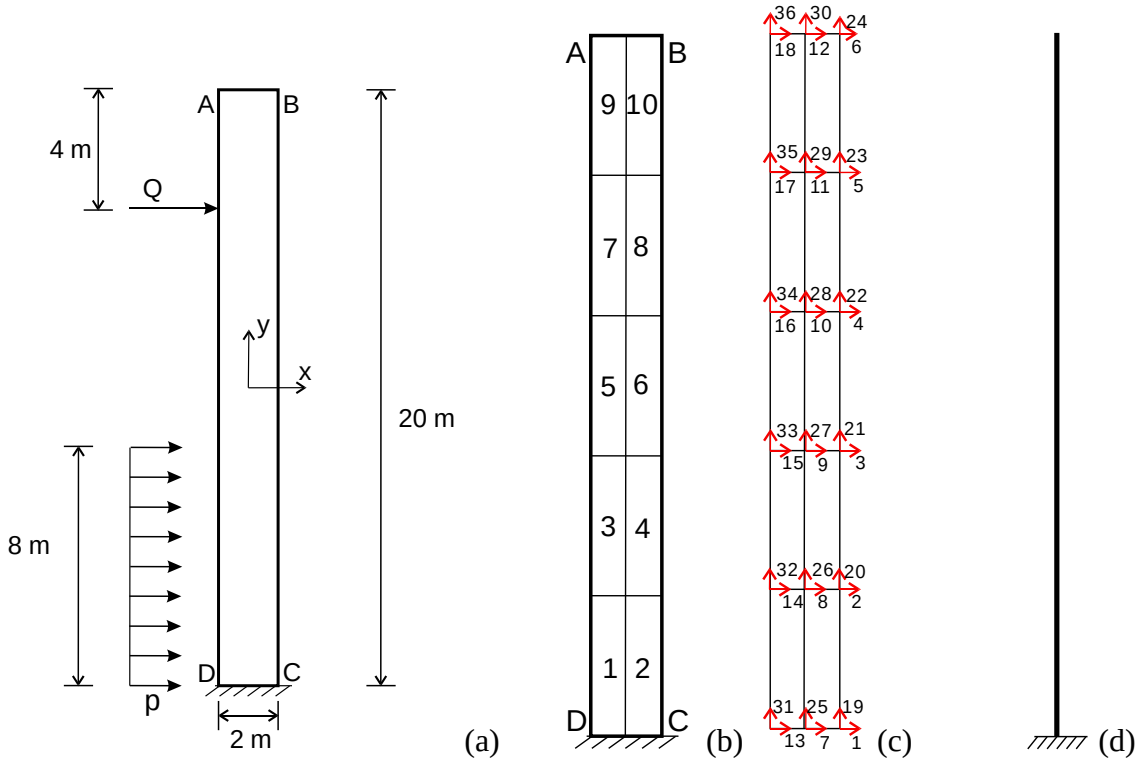


Figura 2 (a) Problema estrutural proposto (b) Modelo de elementos finitos – elementos (c) Modelos de elementos finitos – graus de liberdade globais (d) Modelo de viga

Deseja-se utilizar dois diferentes modelos para avaliar as tensões na estrutura: modelo de elementos finitos sólido 2D e modelo analítico de viga de Bernoulli-Euler. Desconsiderar a possibilidade de qualquer tipo de instabilidade estrutural, como flambagem lateral. Pede-se:

a) Utilizando-se da malha de elementos finitos planos da Figura 2b, em que todos os elementos são idênticos, e da numeração de graus de liberdade da Figura 2c, calcular os termos $K_{2,14}$ e $K_{11,29}$ da matriz de rigidez global. Obs: a matriz de rigidez dos elementos é fornecida no formulário. (0,5)
b) Determinar as componentes não nulas do vetor de carregamentos global nodal equivalente, **por unidade de espessura**, para os graus de liberdade livres. (0,5)

PEF 3302 – Mecânica das Estruturas I
Segunda Prova (22/11/2016) - duração: 160 minutos
Resolver cada questão em uma folha de papel almaço distinta

O sistema foi resolvido numericamente, e a tabela a seguir ilustra o resultado obtido para os deslocamentos em cada grau de liberdade [m].

U1	0.00E+00	**U13**	0.00E+00	**U25**	0.00E+00
U2	7.96E-05	**U14**	7.97E-05	**U26**	2.43E-08
U3	2.78E-04	**U15**	2.78E-04	**U27**	7.48E-08
U4	5.55E-04	**U16**	5.55E-04	**U28**	3.96E-08
U5	8.72E-04	**U17**	8.72E-04	**U29**	1.79E-07
U6	1.19E-03	**U18**	1.19E-03	**U30**	3.07E-07
U7	0.00E+00	**U19**	0.00E+00	**U31**	0.00E+00
U8	7.75E-05	**U20**	-3.56E-05	**U32**	3.56E-05
U9	2.77E-04	**U21**	-6.07E-05	**U33**	6.08E-05
U10	5.55E-04	**U22**	-7.52E-05	**U34**	7.53E-05
U11	8.72E-04	**U23**	-8.00E-05	**U35**	8.04E-05
U12	1.19E-03	**U24**	-8.00E-05	**U36**	8.05E-05

Pede-se, com base nessa solução de deslocamentos, calcular:

c) Para os elementos (5) e (6), determinar as funções que descrevem os deslocamento u(x,y) e v(x,y). Deixe seu resultado em função dos graus de liberdade globais, mas utilizando o sistema de coordenadas local de cada elemento. (0,75)

d) Interprete os resultados dos graus de liberdade U1 e U7. (0,25)

e) Para os elementos (5) e (6), determinar as funções que descrevem as deformações ϵ_{xx} e ϵ_{yy} para uma reta ao longo da cota y = 0 (global). Deixe seu resultado em função dos graus de liberdade globais, mas utilizando o sistema de coordenadas local de cada elemento. (0,75)

f) Escolha a hipótese coerente (estado plano de tensão ou deformação) e determine a distribuição de tensão σ_{yy} ao longo da cota y = 0. Trace um gráfico mostrando essa distribuição, para a faixa -1 m $\leq$ x $\leq +1$ m (sistema global). (1,25)

g) Propor um modelo de viga como ilustrado na Figura 2d. Desenvolva esse modelo, calcule a distribuição das tensões σ_{yy} ao longo da cota y = 0 (global) e compare com o resultado do item f. Discuta as eventuais diferenças, sabendo que a malha de elementos finitos proposta é inapropriada por ser pouco refinada. (1,0)

PEF 3302 – Mecânica das Estruturas I
Segunda Prova (22/11/2016) - duração: 160 minutos
Resolver cada questão em uma folha de papel almaço distinta

Estado Plano de Tensão:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \qquad [C] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Estado Plano de Deformação:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

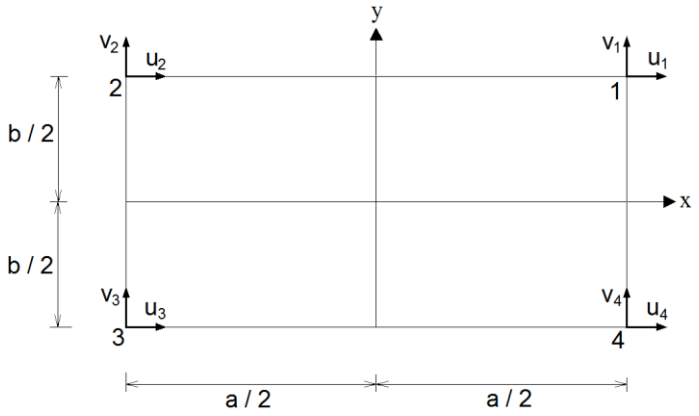
$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \qquad [C] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Equação diferencial de equilíbrio

$$\frac{\partial T_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{i3}}{\partial x_3} + f_i^b = 0$$

PEF 3302 – Mecânica das Estruturas I
Segunda Prova (22/11/2016) - duração: 160 minutos
Resolver cada questão em uma folha de papel almaço distinta

Elemento finito de estado plano de 4 nós (sistema de coordenadas local):



$$h_1(x,y) = \frac{1}{4}\left(1+\frac{2x}{a}\right)\left(1+\frac{2y}{b}\right)$$
$$h_2(x,y) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{2x}{a}\right)\left(1+\frac{2y}{b}\right)$$
$$h_3(x,y) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{2x}{a}\right)\left(1-\frac{2y}{b}\right)$$
$$h_4(x,y) = \frac{1}{4}\left(1+\frac{2x}{a}\right)\left(1-\frac{2y}{b}\right)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{1}{2a}\left(1+\frac{2y}{b}\right) \quad \frac{\partial h_2}{\partial x} = -\frac{1}{2a}\left(1+\frac{2y}{b}\right) \quad \frac{\partial h_3}{\partial x} = -\frac{1}{2a}\left(1-\frac{2y}{b}\right) \quad \frac{\partial h_4}{\partial x} = \frac{1}{2a}\left(1-\frac{2y}{b}\right)$$
$$\frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{1}{2b}\left(1+\frac{2x}{a}\right) \quad \frac{\partial h_2}{\partial y} = \frac{1}{2b}\left(1-\frac{2x}{a}\right) \quad \frac{\partial h_3}{\partial y} = -\frac{1}{2b}\left(1-\frac{2x}{a}\right) \quad \frac{\partial h_4}{\partial y} = -\frac{1}{2b}\left(1+\frac{2x}{a}\right)$$

Matriz de rigidez [N/m] (por unidade de espessura) – numeração local seguindo a ordem:
$u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4$:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3.30E+09	4.31E+08	-3.21E+09	7.89E+07	-1.65E+09	-4.31E+08	1.56E+09	-7.89E+07
2	4.31E+08	1.14E+09	-7.89E+07	-8.38E+08	-4.31E+08	-5.71E+08	7.89E+07	2.67E+08
3	-3.21E+09	-7.89E+07	3.30E+09	-4.31E+08	1.56E+09	7.89E+07	-1.65E+09	4.31E+08
4	7.89E+07	-8.38E+08	-4.31E+08	1.14E+09	-7.89E+07	2.67E+08	4.31E+08	-5.71E+08
5	-1.65E+09	-4.31E+08	1.56E+09	-7.89E+07	3.30E+09	4.31E+08	-3.21E+09	7.89E+07
6	-4.31E+08	-5.71E+08	7.89E+07	2.67E+08	4.31E+08	1.14E+09	-7.89E+07	-8.38E+08
7	1.56E+09	7.89E+07	-1.65E+09	4.31E+08	-3.21E+09	-7.89E+07	3.30E+09	-4.31E+08
8	-7.89E+07	2.67E+08	4.31E+08	-5.71E+08	7.89E+07	-8.38E+08	-4.31E+08	1.14E+09