Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - EPUSP
Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas - PEA
Av. Prof. Luciano Gualberto, Travessa 3, No.158
Butantã - São Paulo - SP
CEP: 05508-900

EPUSP

PEA-5716

COMPONENTES E SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO E SENSOREAMENTO A FIBRAS ÓPTICAS

6ª AULA

Polarização, Birrefringência e Efeitos Ópticos Relacionados às Fibras Ópticas

Prof. Dr. Josemir Coelho Santos

Horário: 14 h às 17 h (4ª Feira)

Polarização da Luz

- Só pode ser definida a partir da Teoria Eletromagnética.

- Luz propagando no espaço livre é Transversal Eletromagnética (TEM)

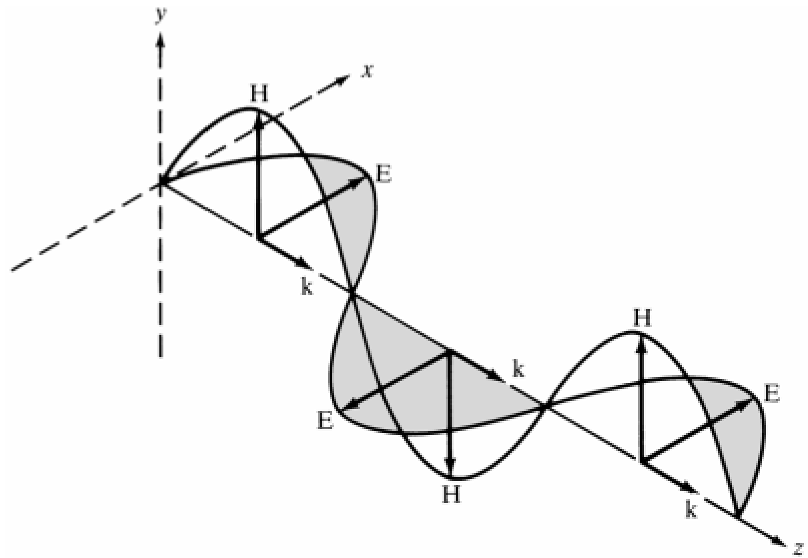
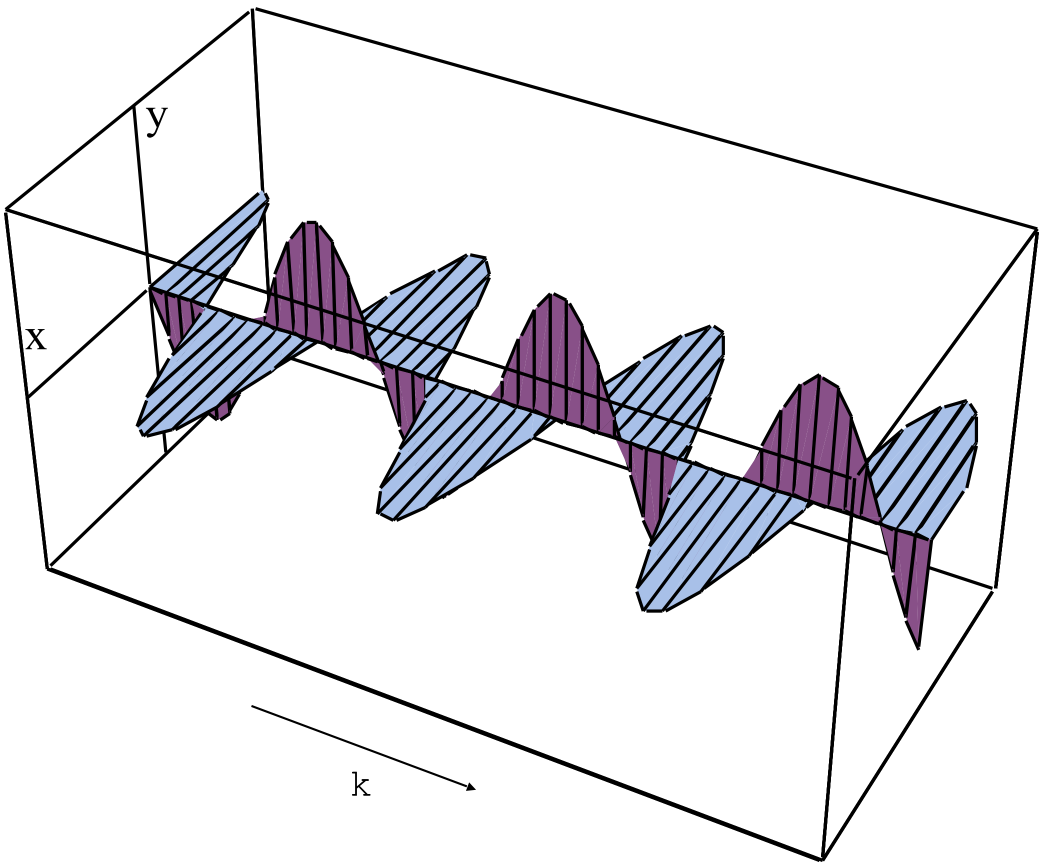


Figura 1: Onda plana se propagando na direção positiva do eixo *z*.

Fonte: Keiser, G. "Optical Fiber Communications". McGraw-Hill, 2000.

- O desenho traçado pela ponta do vetor campo elétrico em um plano transversal à direção de propagação é chamado de polarização da onda eletromagnética.

Polarização da Luz



$$\vec{E}_x = \vec{e}_x E_{0x} \cos(\omega t - \beta z + \phi_x)$$

$$\vec{E}_y = \vec{e}_y E_{0y} \cos(\omega t - \beta z + \phi_y)$$

$$\beta = kn = \frac{2\pi}{\lambda} n$$

$$\vec{E}_{TOTAL} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$$

Polarização da Luz

- Luz polarizada pode ser classificada como: linear, circular e elíptica.

- Luz propagando no espaço livre é Transversal Eletromagnética (TEM)

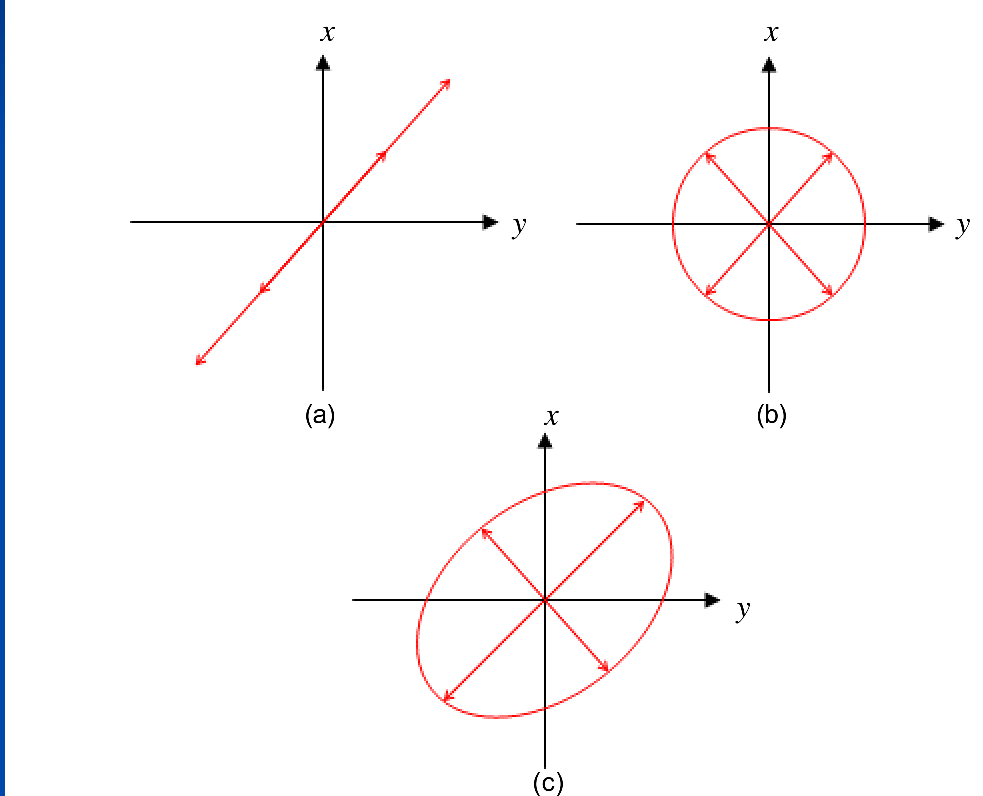


Figura 2: Tipos de polarização: (a) Linear, (b) Circular e (c) Elíptica.

- Para que uma onda seja polarizada não é necessário que ela seja harmônica!

Tipos de Polarização

- Expressão Geral para campo elétrico de uma onda TEM propagando-se na direção z:

$$E = E_x(t)\hat{a}_x + E_y(t)\hat{a}_y$$
$$= E_{x0}\cos(\omega t - kz + \phi_x)\hat{a}_x + E_{y0}\cos(\omega t - kz + \phi_y)\hat{a}_y$$

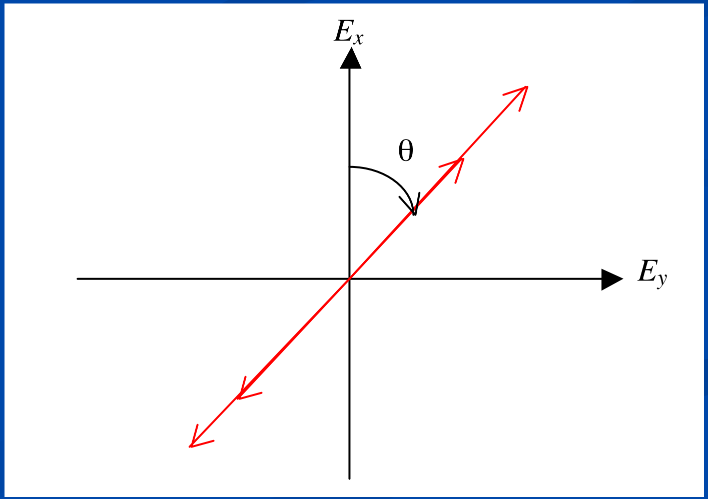
- O que define o tipo de polarização (linear, circular ou elíptica) é o valor relativo das amplitudes Ex e Ey e das fases φx e φy

Polarização Linear

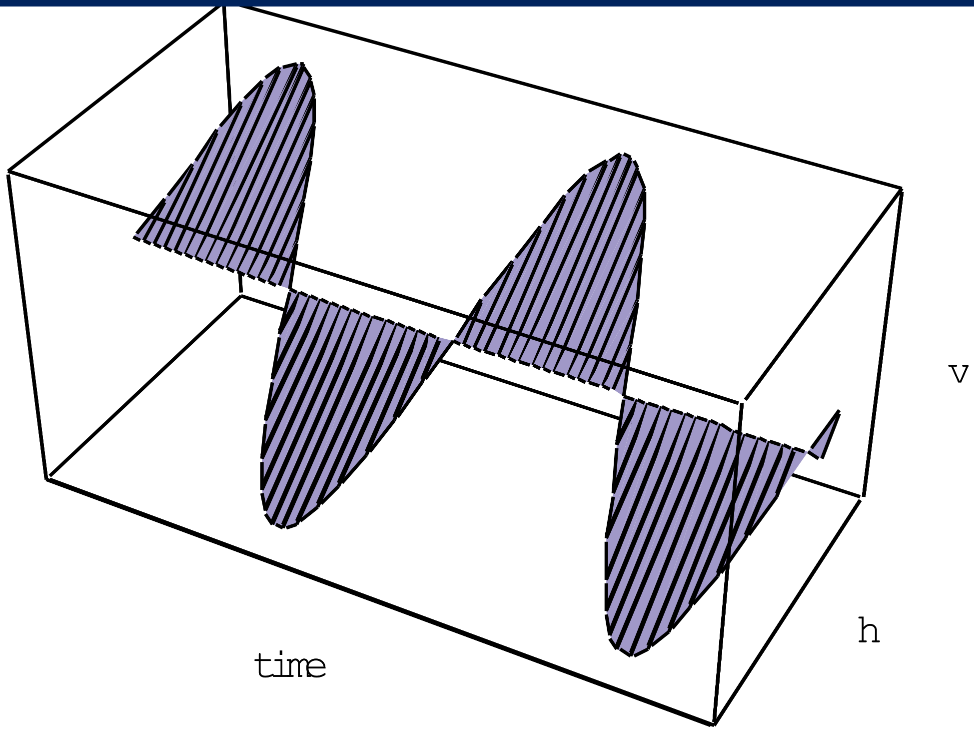
$$E_x(t) = E_{x0}\cos(\omega t + \phi)$$
$$E_y(t) = E_{y0}\cos(\omega t + \phi)$$

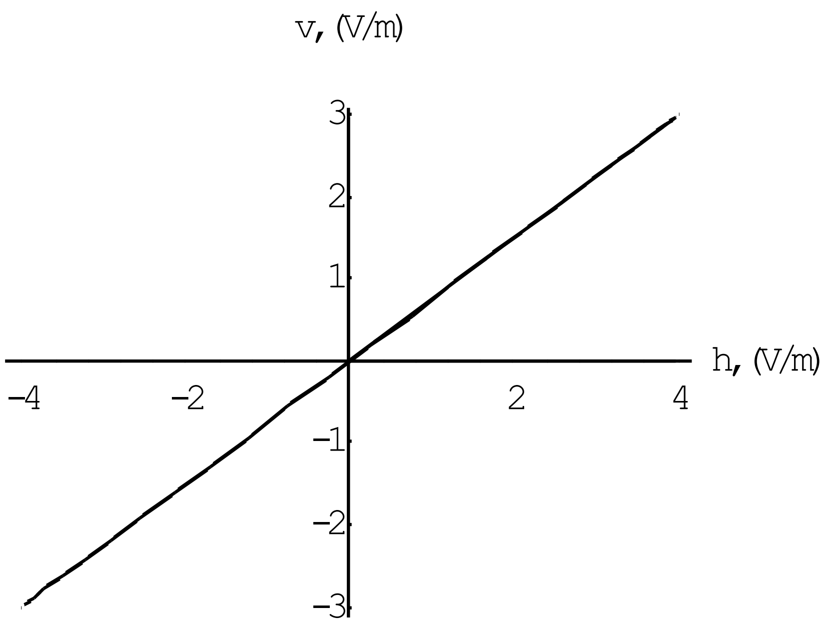
$$E_y(t) = \frac{E_{y0}}{E_{x0}} E_x(t)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{E_{y0}}{E_{x0}}\right)$$



Polarização Linear





$$\vec{E}_{TOTAL} = \vec{e}_x E_{0x} \cos(\omega t - \beta z) + \vec{e}_y E_{0y} \cos(\omega t - \beta z + \pi)$$

Polarização Circular

Considere agora

$$E_{x0} = E_{y0} = E_0$$

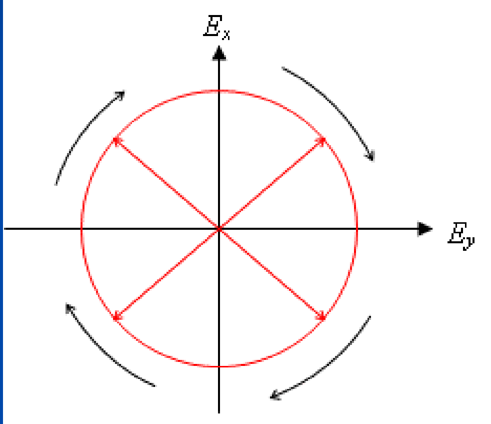
$$\phi_x = \phi_y + \frac{\pi}{2}$$

$$E_x(t) = E_0 \cos(\omega t + \phi_x)$$

$$E_y(t) = E_0 \cos\left(\omega t + \phi_x - \frac{\pi}{2}\right) = E_0 \sin(\omega t + \phi_x)$$

- Polarização Circular à Direita

$$E(t) = \sqrt{E_x(t)^2 + E_y(t)^2}$$
$$= \sqrt{E_0^2\left(\cos^2(\omega t + \phi_x) + \sin^2(\omega t + \phi_x)\right)} = E_0$$
$$\psi(t) = \tan^{-1}\left(\frac{E_y(t)}{E_x(t)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{E_0 \cos(\omega t + \phi_x)}{E_0 \sin(\omega t + \phi_x)}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\tan(\omega t + \phi_x)\right) = \omega t + \phi_x$$



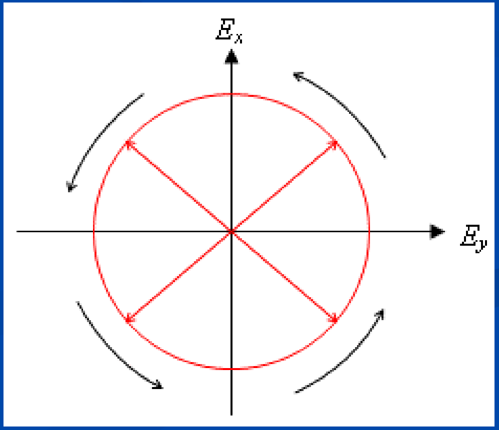
- Polarização Circular à Esquerda

$$E_{x0} = E_{y0} = E_0$$

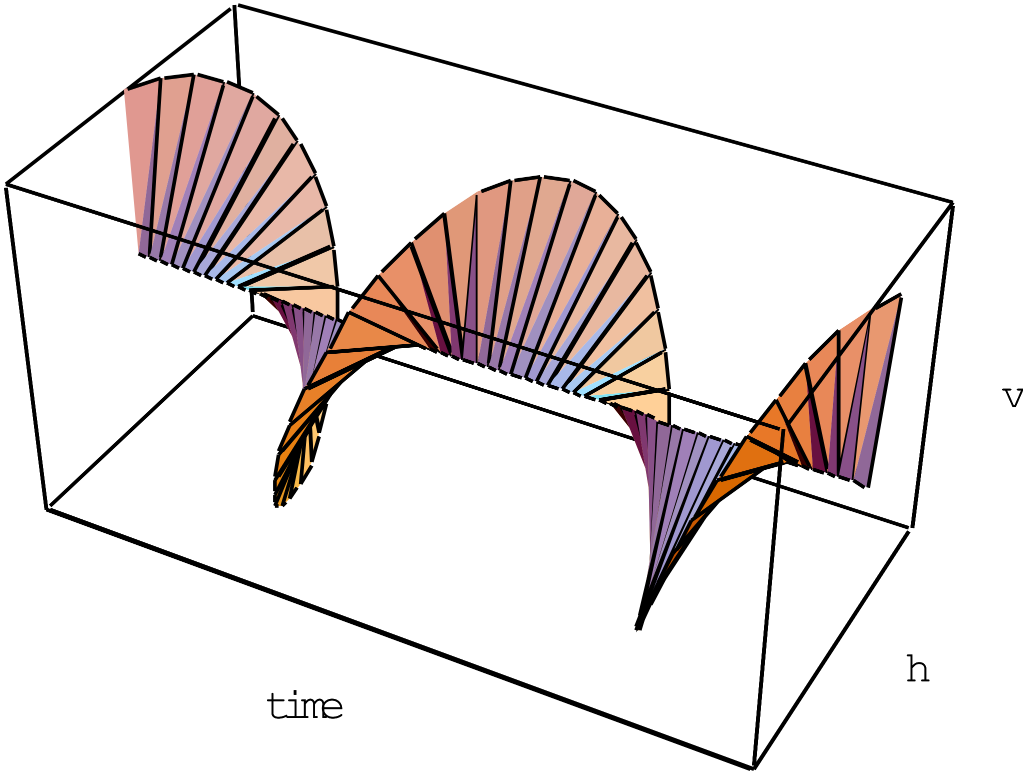
$$\phi_x = \phi_y - \frac{\pi}{2}$$

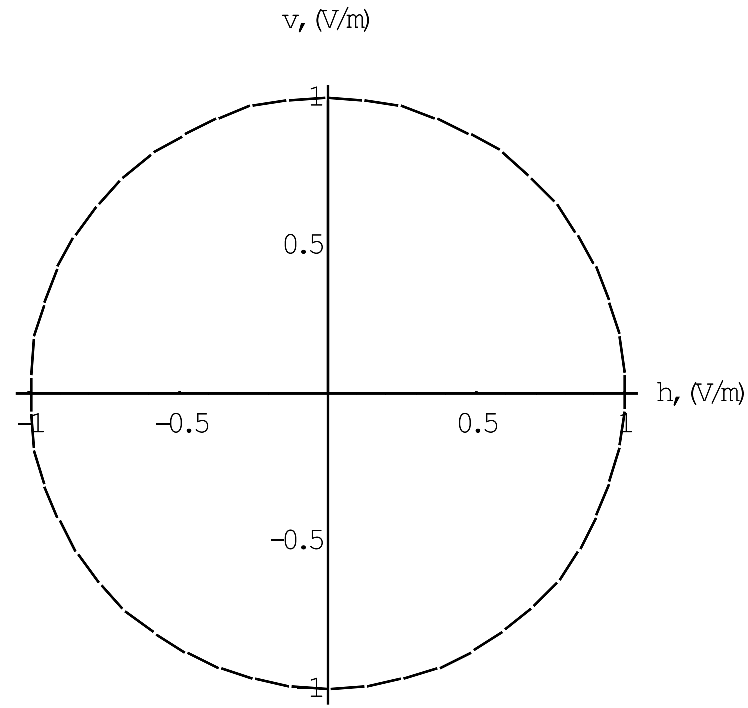
$$E(t) = E_0$$

$$\psi(t) = -\omega t + \phi_x$$



Polarização Circular





$$\vec{E}_{TOTAL} = E_{0x}\left[\vec{e}_x \sin(\omega t - \beta z) + \vec{e}_y \cos(\omega t - \beta z)\right]$$

Polarização Elíptica

- A polarização elíptica abrange todas as outras configurações das amplitudes Ex e Ey e das fases φx e φy

$$\phi_x = \phi_y + \delta$$

Assim:

$$E_x(t) = E_{x0}\cos(\omega t + \phi_x)$$
$$E_y(t) = E_{y0}\cos(\omega t + \phi_x - \delta)$$

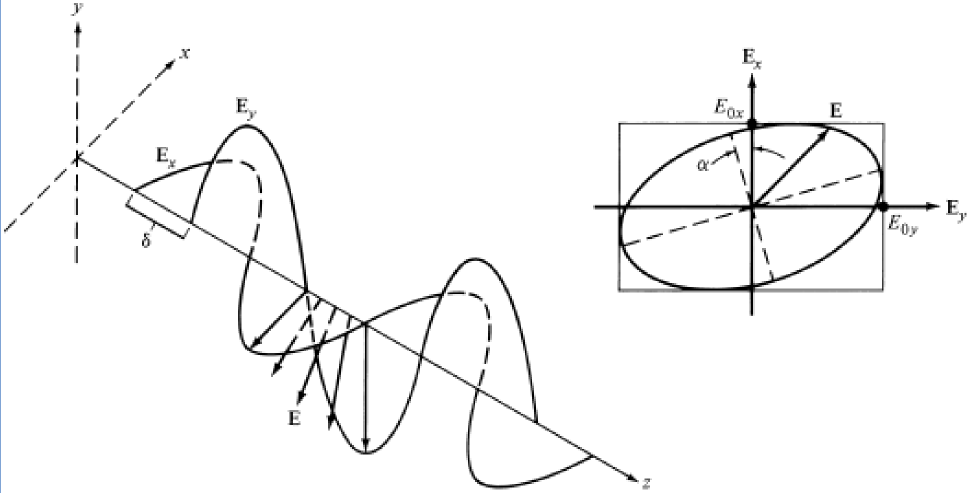
Somando os quadrados dos campos E_x e E_y, obtém-se

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 = \cos^2(\omega t + \phi_x) + \cos^2(\omega t + \phi_x - \delta)$$

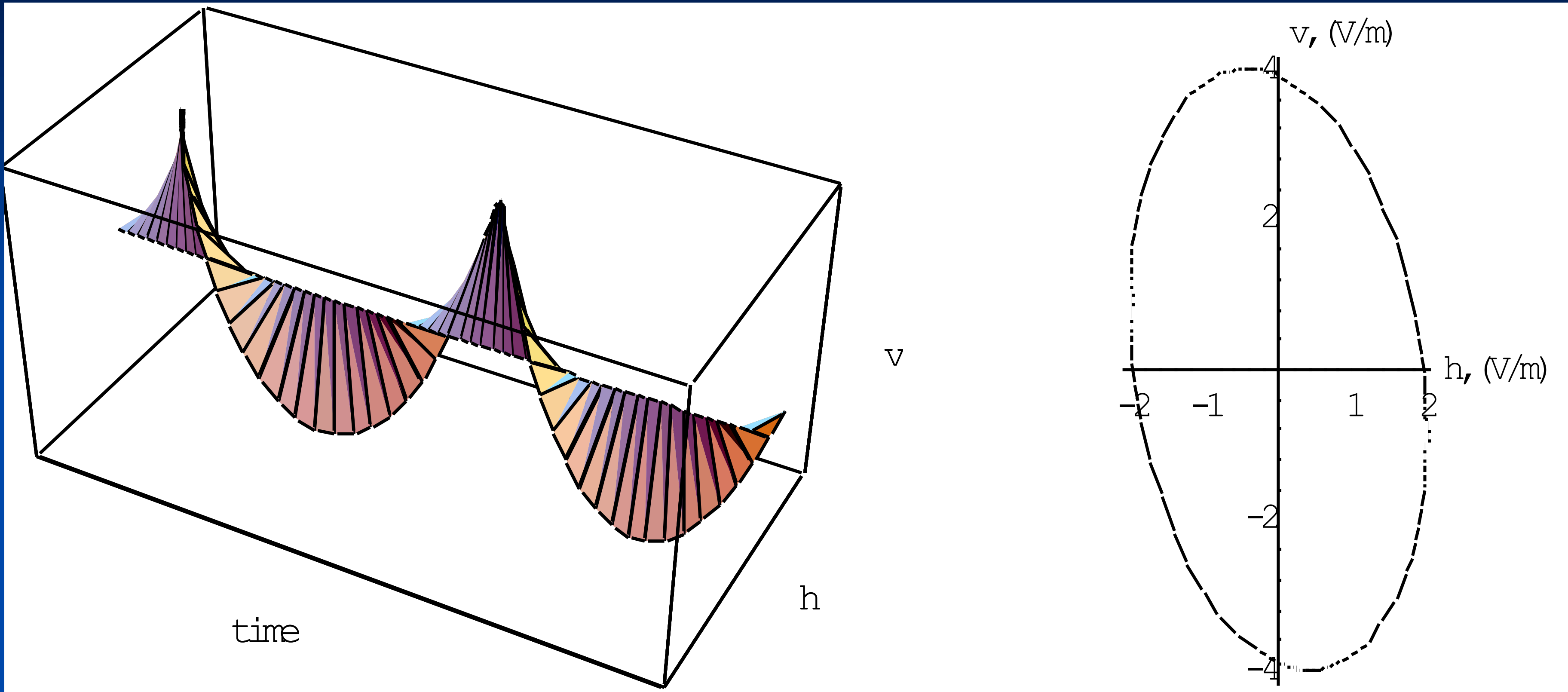
$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)\cos(\delta) = \sin^2(\delta)$$

Forma geral da equação da elipse cujo eixo maior forma com x um ângulo α:

$$\alpha = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{2E_{0x}E_{0y}\cos\delta}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}\right]$$



Polarização Eliptica



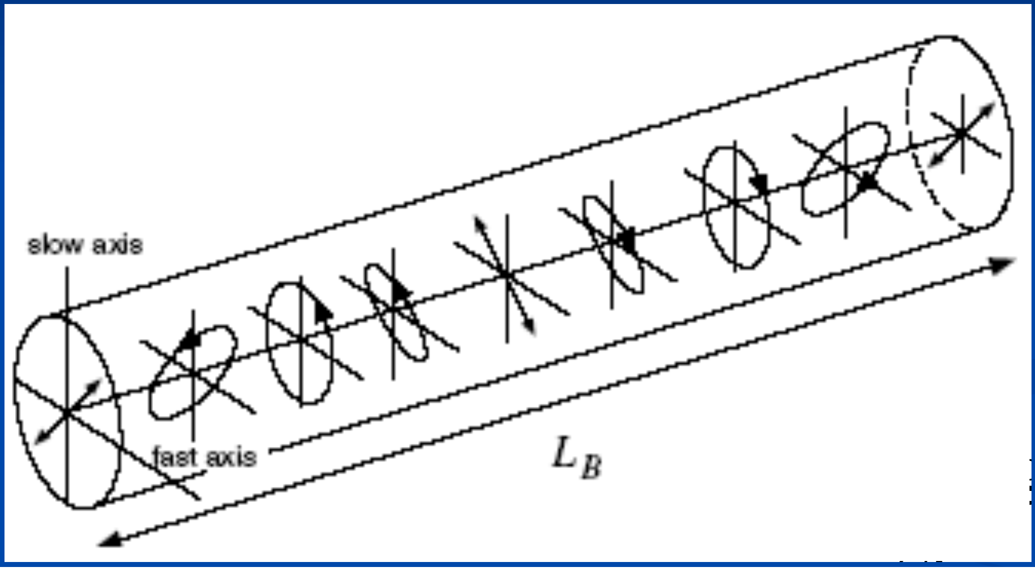
$$\vec{E}_{TOTAL} = \vec{e}_x E_{0x} \sin(\omega t - \beta z + \phi_1) + \vec{e}_y E_{0y} \cos(\omega t - \beta z + \phi_2)$$

Birrefringência

$$B = (n_x - n_y)$$

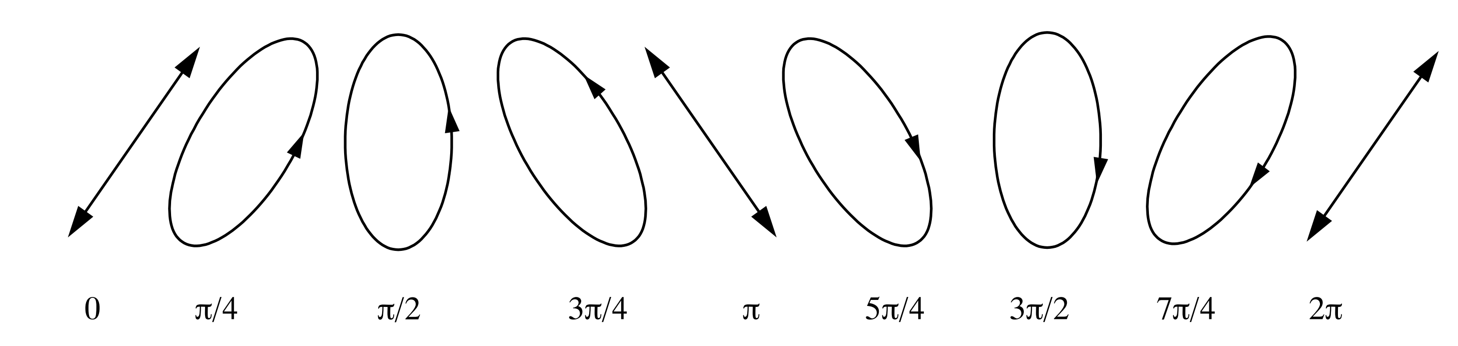
ou

$$\Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_x - n_y)$$



Comprimento de Batimento

$$L_B = \frac{2\pi}{\Delta\beta} = \frac{\lambda}{B}$$



Cálculo de Jones

- É uma descrição matemática extremamente compacta da luz polarizada.
- Aplica-se somente a luz polarizada.
- Diferentemente do cálculo de Mueller (Vetores de Stokes) não pode ser usedo para descrever luz não polarizada, mas pode descrever a fase.

Vetor de Jones

- O vetor de Jones é um vetor coluna de dois elementos que descreve as amplitudes e as fases dos campos elétricos paralelos às direções *x* e *y* para um feixe de luz propagando-se ao longo do eixo *z*.

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = e^{i2\pi\omega t} \begin{bmatrix} A_x e^{i\varepsilon_x} \\ A_y e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix}$$

- onde t é o tempo, ω é a frequencia ângular, ε é a fase, A é a amplitude, e E é o campo elétrico.

Intensidade de um Feixe Óptico

- A intensidade de um feixe óptico e dada por:

$$I = A_x^2 + A_y^2$$

- O Vetor de Jones, em geral, é normalizado, para que a intensidade seja unitária e o vetor seja escrito na sua forma mais simples.
- Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{É normalizado para:} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Algumas vezes escreve-se abreviadamente $e^{i\frac{\pi}{2}}$ como i, de forma que:

$$\begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{é normalizado para:} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alguns Vetores de Jones comuns

Name	Normalised	Full
↔ Horz. linear polarised	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A_x e^{i\varepsilon_x} \\ 0 \end{bmatrix}$
↕ Vert. linear polarised	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ A_y e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix}$
↗ 45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A_x e^{i\varepsilon_x} \\ A_x e^{i\varepsilon_x} \end{bmatrix}$
↖ -45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A_x e^{i\varepsilon_x} \\ -A_x e^{i\varepsilon_x} \end{bmatrix}$
General Linear	$\begin{bmatrix} \cos(R) \\ \pm\sin(R) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A_x e^{i\varepsilon_x} \\ A_y e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix}$
↻ LH Circular	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A_x e^{i\varepsilon_x} \\ A_x e^{i\left(\varepsilon_x+\frac{\pi}{2}\right)} \end{bmatrix}$
↺ RH Circular	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A_x e^{i\varepsilon_x} \\ A_x e^{i\left(\varepsilon_x-\frac{\pi}{2}\right)} \end{bmatrix}$
General	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \cos(R)e^{-i\frac{\gamma}{2}} \\ \sin(R)e^{i\frac{\gamma}{2}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A_x e^{i\varepsilon_x} \\ A_y e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix}$

Matrix de Jones

- Quando a luz passa por um dispositivo ou meio sensível à polarização seu estado de polarização, J irá mudar.
- O novo estado de polarização, J , é calculado multiplicando o antigo estado por uma matrix 2x2, M, chamada Matrix de Jones.

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{J}$$

- A matrix de Jones para uma rotação de um par de eixos coordenados por uma ângulo θ em torno do eixo Z é dada por:

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{rotate}}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Matrix de Jones

$$\vec{E}_{in} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\varphi_x} \\ E_{0y}e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{A_1} \Rightarrow \vec{E}_{out} = \begin{bmatrix} E_{xout} \\ E_{yout} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_{xout} \\ E_{yout} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xin} \\ E_{yin} \end{bmatrix}$$

Dividing both terms by:

$$\vec{E}_{in} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\varphi_x} \\ E_{0x}e^{i\varphi_x} \end{bmatrix} = E_{0x}e^{i\varphi_x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sqrt{2}E_{0x}e^{i\varphi_x}} \vec{E}_{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(*) E. Hecht, "*Optics*", 4Ed. Addison Wesley, Chapter 8, 2002.

- A matrix de Jones para uma rotação de um par de eixos coordenados por uma ângulo θ em torno do eixo Z é dada por:

Algumas Matrizes de Jones Típicas:

Description	Jones Matrix
Ideal isotropic non-absorbing material	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Absorbing isotropic material with transmittance p	$\begin{bmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{bmatrix}$
Linear horizontal polariser	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Linear vertical polariser	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
45° polariser	$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$
-45° polariser	$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$
General polariser at angle θ	$\begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$
Waveplate with horizontal fast axis, retardance ϕ	$\begin{bmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{bmatrix}$
Waveplate with vertical fast axis, retardance ϕ	$\begin{bmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{bmatrix}$
Waveplate with fast axis angle θ, retardance ϕ	$\begin{bmatrix} \cos^2(\theta)e^{i\frac{\phi}{2}}+\sin^2(\theta)e^{-i\frac{\phi}{2}} & \cos(\theta)\sin(\theta)2i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \cos(\theta)\sin(\theta)2i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos^2(\theta)e^{-i\frac{\phi}{2}}+\sin^2(\theta)e^{i\frac{\phi}{2}} \end{bmatrix}$

Cálculo com Matrizes de Jones

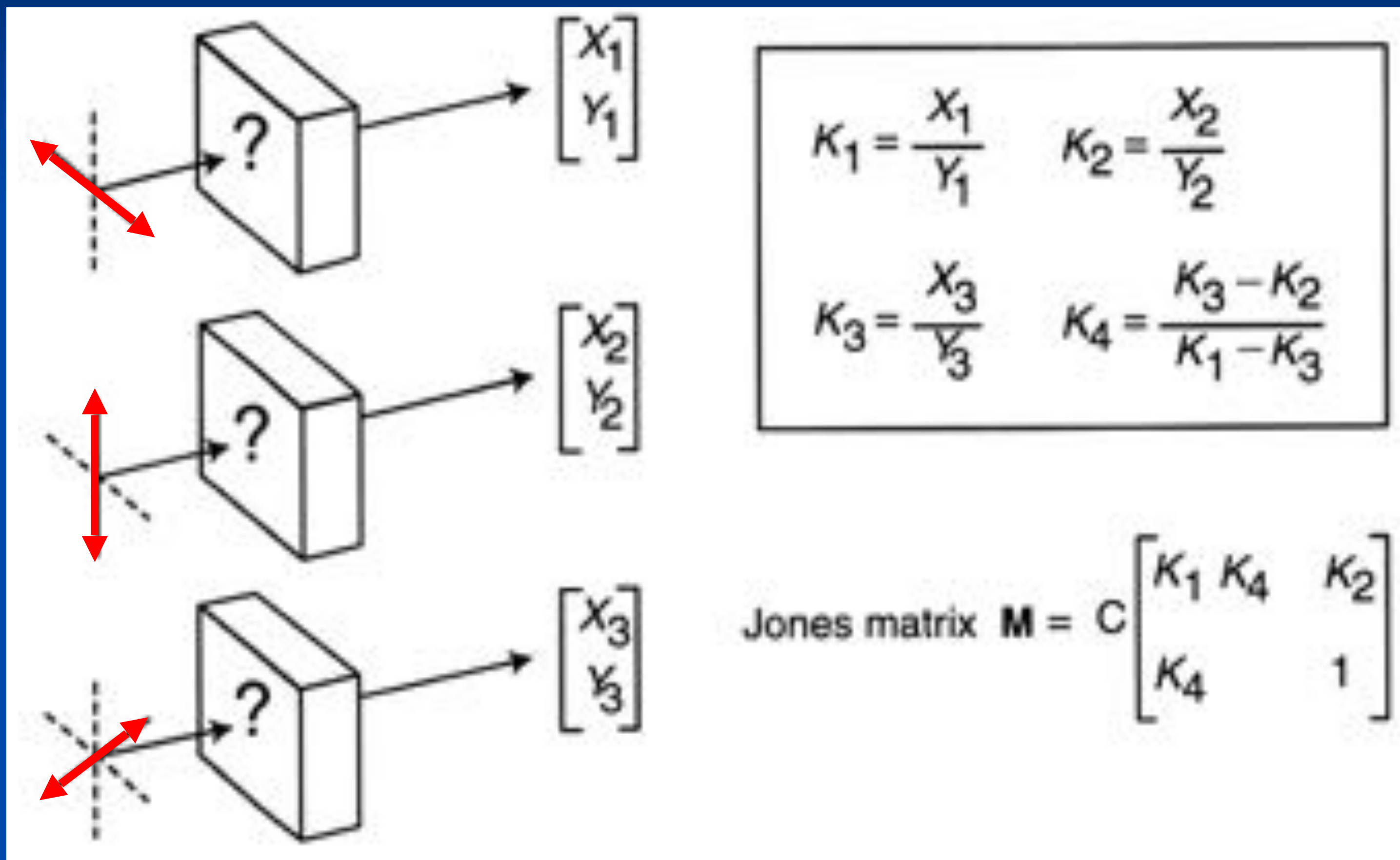
Multiplica-se o vetor de Jones do feixe de entrada pela matriz do elemento ou meio pelo qual ele passa para se obter o vetor de Jones do feixe de saída

Por exemplo, se tomarmos um feixe de entrada linearmente polarizado na horizontal e fizermos passar por uma placa retardadora de um quarto de onda a 45º e depois por um polarizador orientado verticalmente, obteremos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Medição da Matriz de Jones de um Elemento Óptico

[from D.Derickson, "*Fiber Optic Test and Measurement*" Prentice Hall, Ch. 6 (1998)]

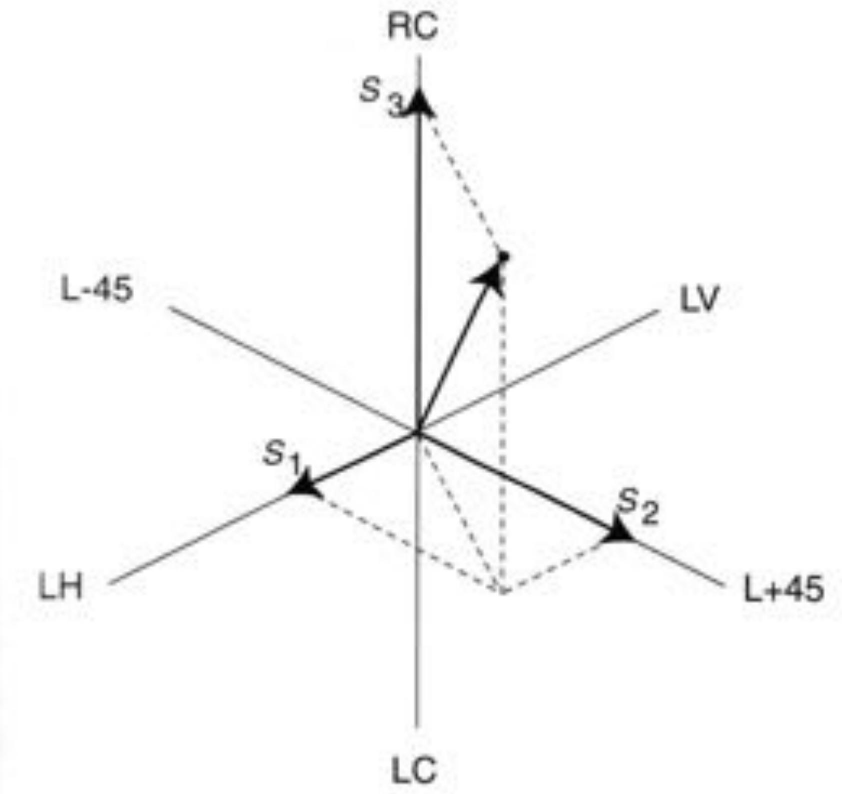


Cálculo de Mueller (Vetores de Stokes)

- Aplicável tanto a luz totalmente quanto parcialmente polarizada;

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{total} \\ I_{LH} - I_{LV} \\ I_{L+45^o} - I_{L-45^o} \\ I_{RC} - I_{LC} \end{bmatrix}$$

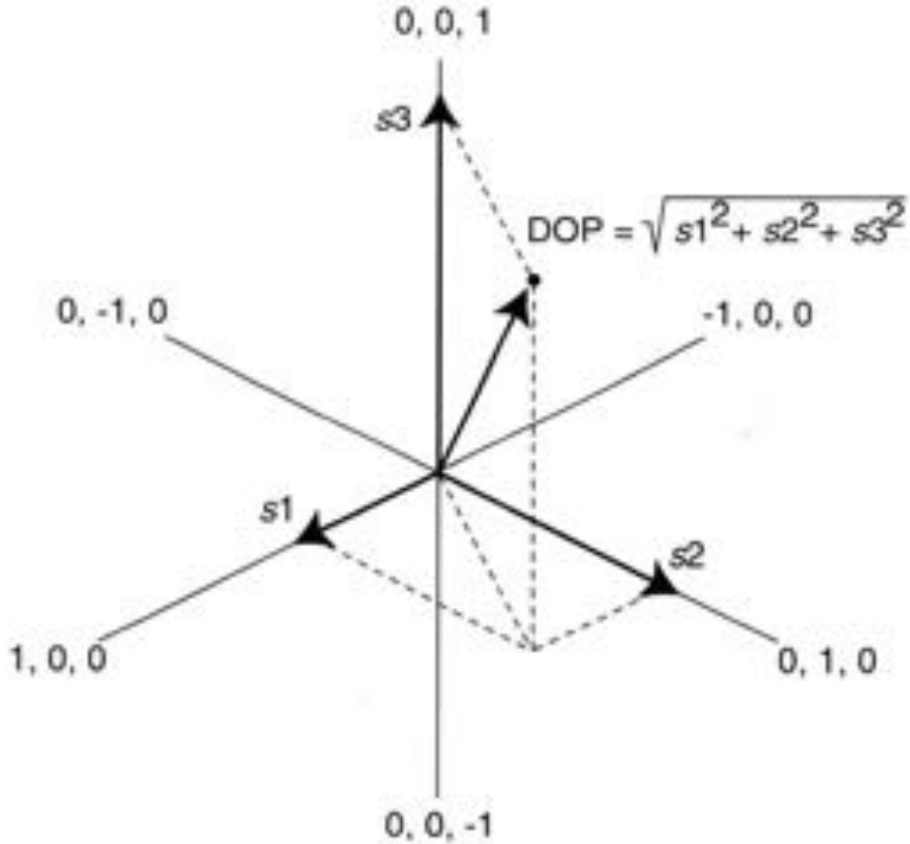
$$DOP = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}$$



Parâmetros de Stokes Normalizados

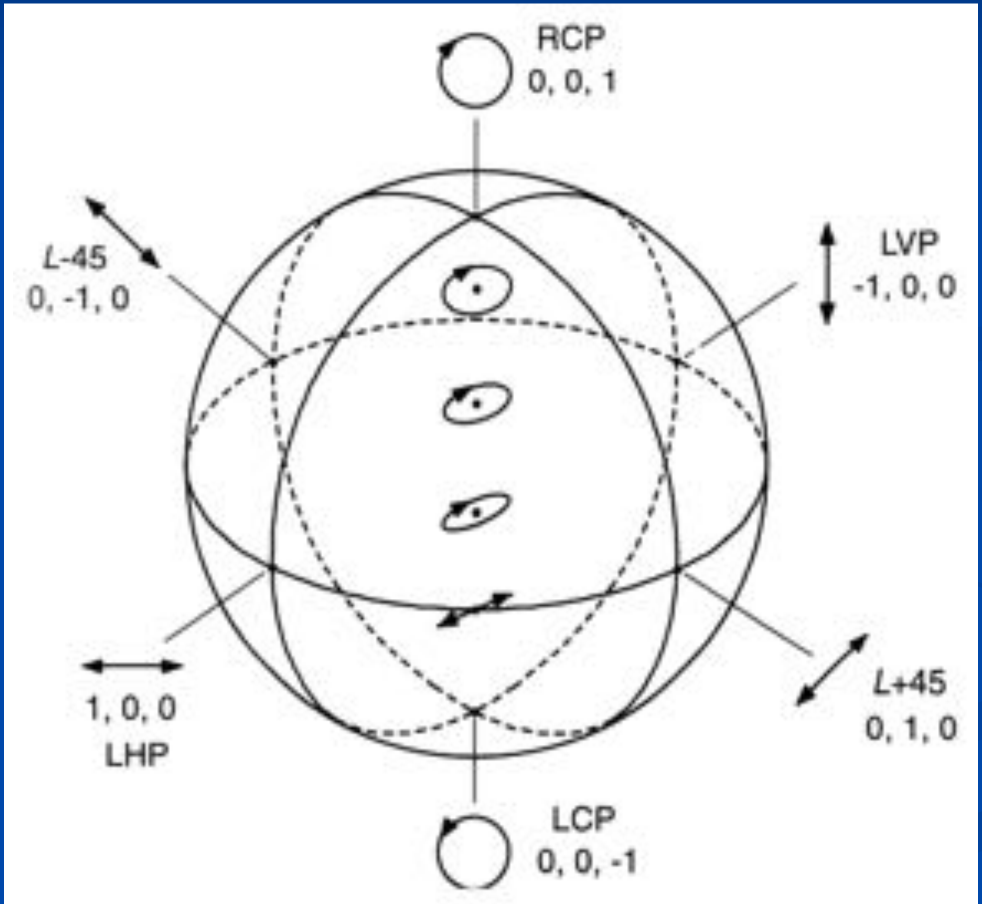
$$\begin{bmatrix} 1 \\ s1 \\ s2 \\ s3 \end{bmatrix} = \frac{1}{S_0} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$$

$$DOP = \sqrt{s1^2 + s2^2 + s3^2}$$



Esfera de Poincaré

- Ferramenta gráfica em espaço real, 3D, que permite uma descrição conveniente de ondas polarizadas e de transformações de polarização causadas pela propagação através de dispositivos;



Continua...