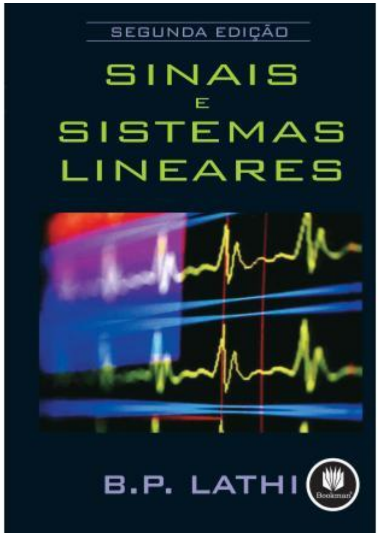
TRANSFORMADA DE FOURIER EM TEMPO DISCRETO (DTFT) E TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)

Larissa Driemeier

LIVRO TEXTO

Essa aula é baseada nos livros:

[1]



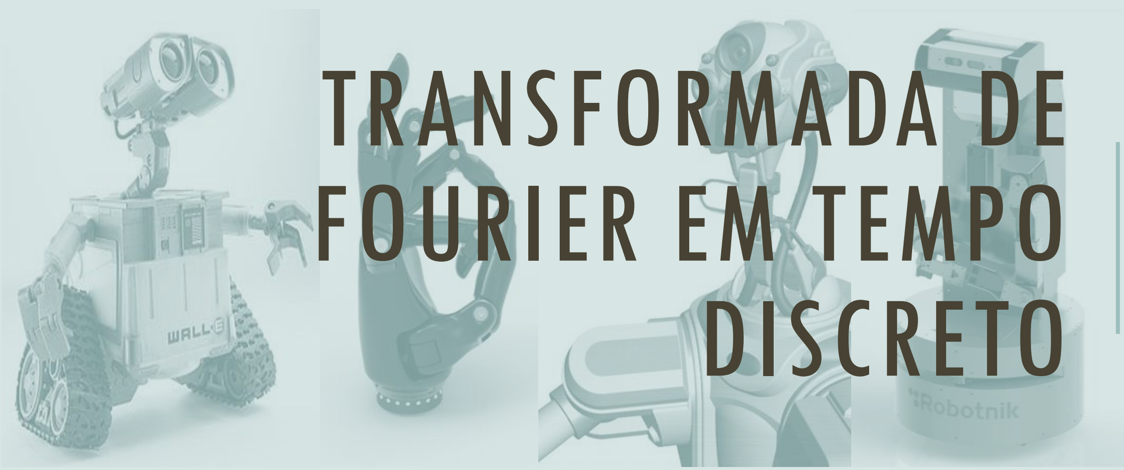
2nd ed – 2007

[2]

INTRODUCTION TO
Signal
Processing
Sophocles J. Orfanidis
Rutgers University

http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/intro2sp

Download gratuito da internet



TRANSFORMADA DE FOURIER EM TEMPO DISCRETO

DTFT

Um sinal aperiódico pode ser visto como um sinal periódico com um período infinito.

$T \rightarrow \infty$ e $\frac{1}{T} \longrightarrow \frac{d\omega}{2\pi}$

FS ⟷ **FT**

Síntese

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$$

Análise

$$X[k] = \frac{1}{T} \int_{T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Harmônicos $X[k]$ distanciados
$\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T$

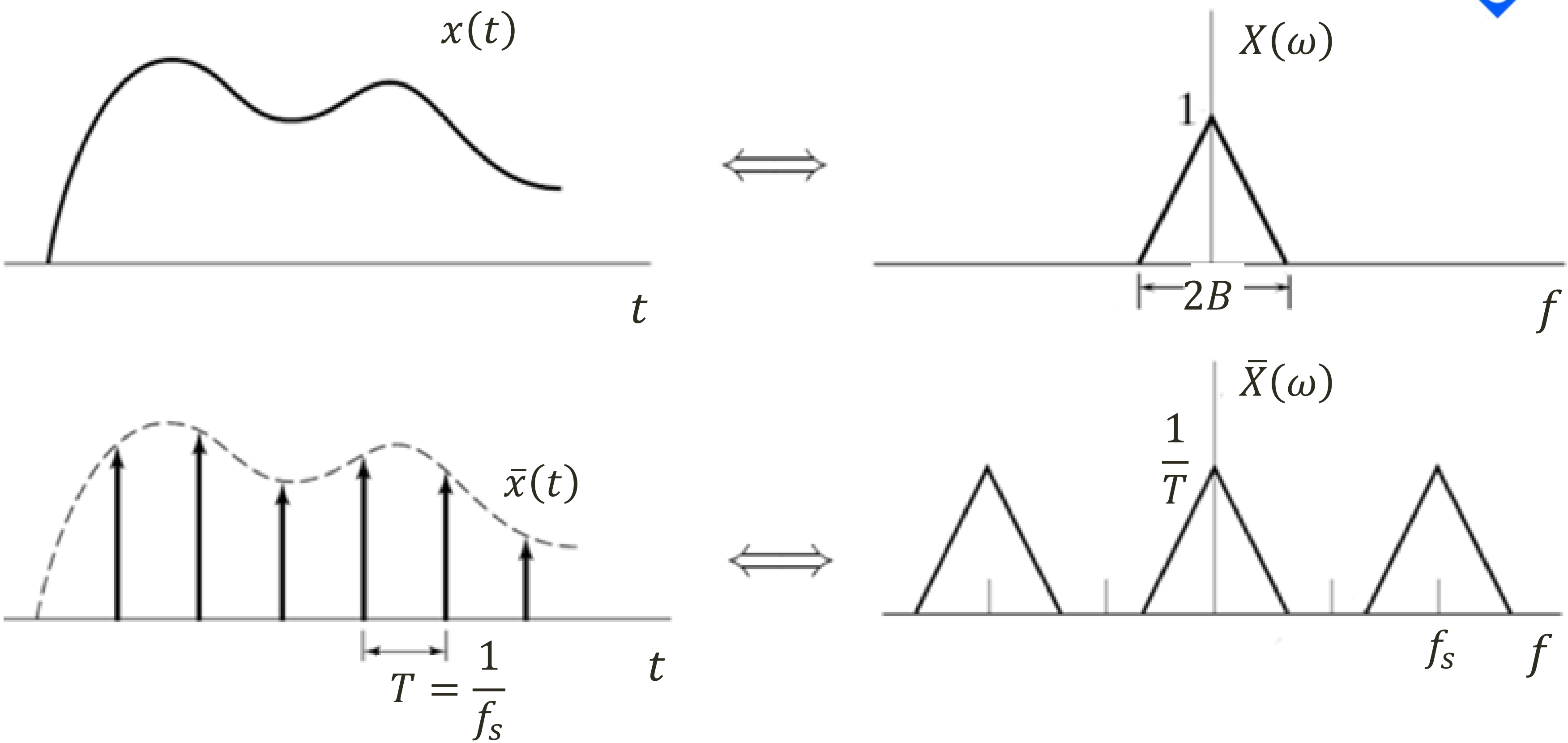
Síntese

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Análise

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Valores contínuos $X(\omega)$



$$\bar{x}(t) = \sum_{k} x(t)\,\delta(t-kT)$$

$$\bar{X}(\omega) = \frac{1}{T} X(\omega - n\omega_s)$$

TRANSFORMADA DE FOURIER EM TEMPO DISCRETO

$$\bar{x}(t) = x(nT) = x(t)\delta_T(t) = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-kT)}$$

$$\boxed{\bar{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}(t)e^{-j\omega t}dt \quad + \quad \Omega = \omega T = \frac{2\pi\omega}{\omega_s}}$$

$$\downarrow$$

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\Omega k} \Rightarrow x[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega k}d\Omega$$

FT ⟷ DTFT

Síntese

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Análise

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Síntese

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\Omega k}$$

Análise

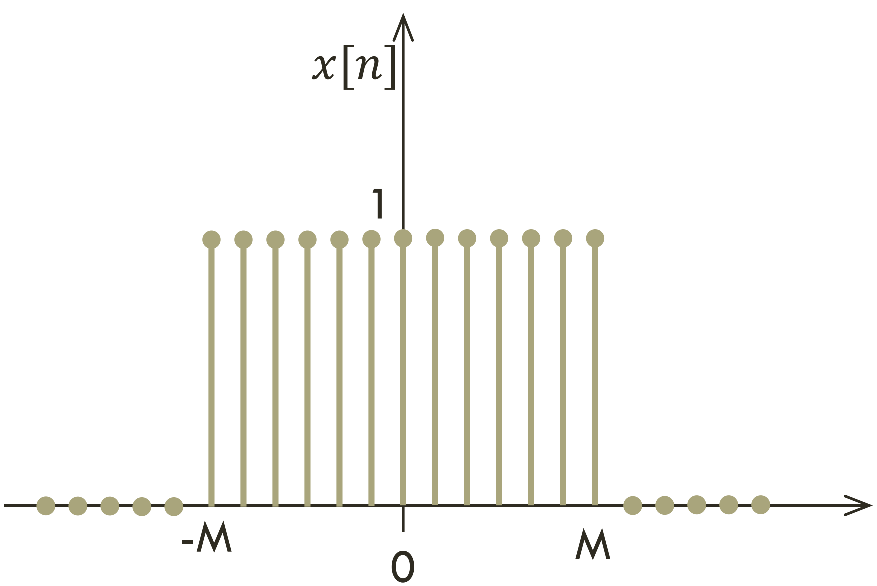
$$x[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega k}d\Omega$$

Valores contínuos $X(\omega)$ do sinal contínuo $x(t)$

Valores contínuos $X(\Omega)$ do sinal discreto $x[k]$

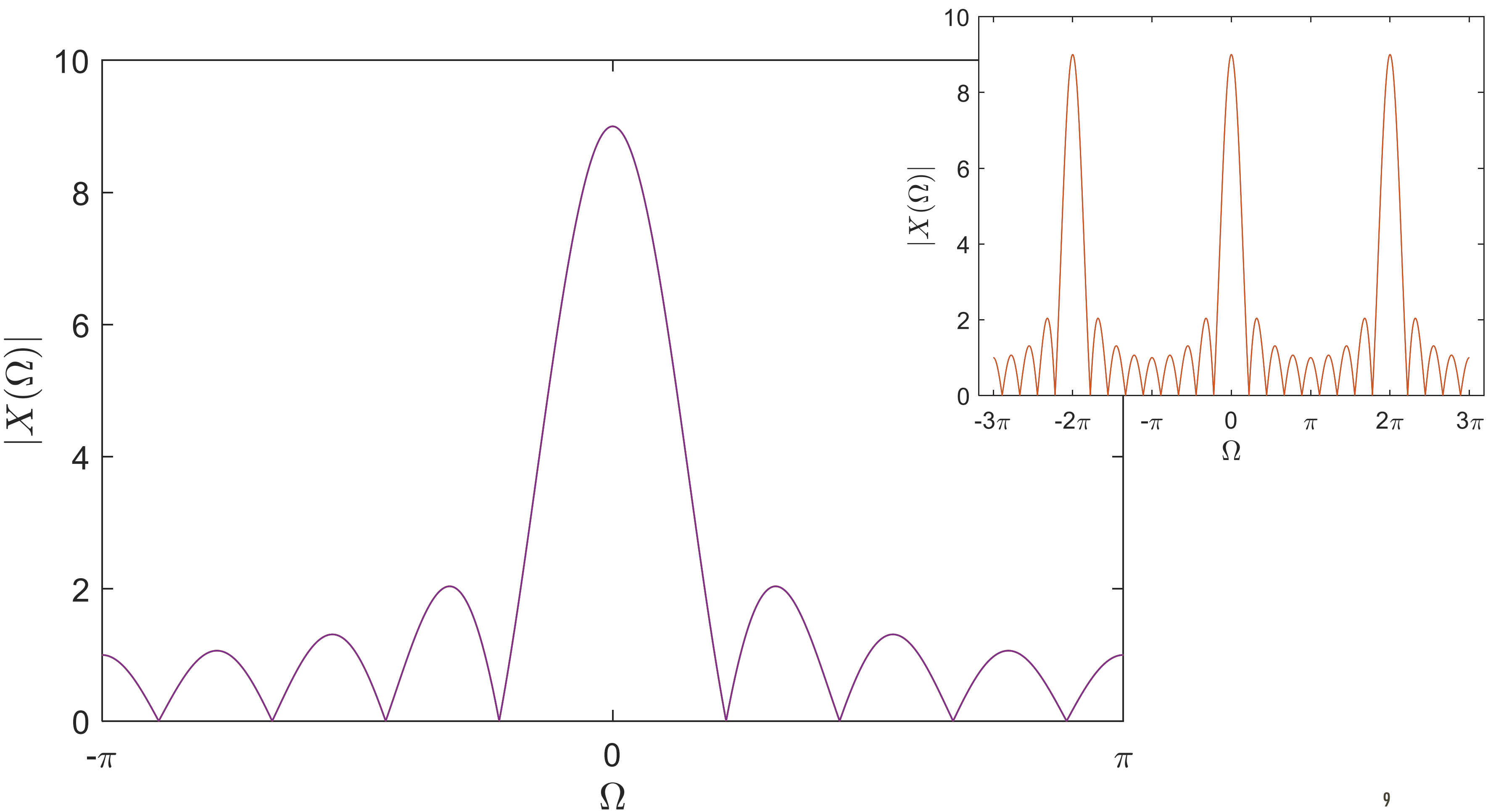
EXEMPLO...

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{para } n = -M, \dots, 0, \dots, M \\ 0 & cc \end{cases}$$



DTFT

$$X(\Omega) = \frac{\sin[\Omega\,(2M+1)/2]}{\sin \Omega/2}$$



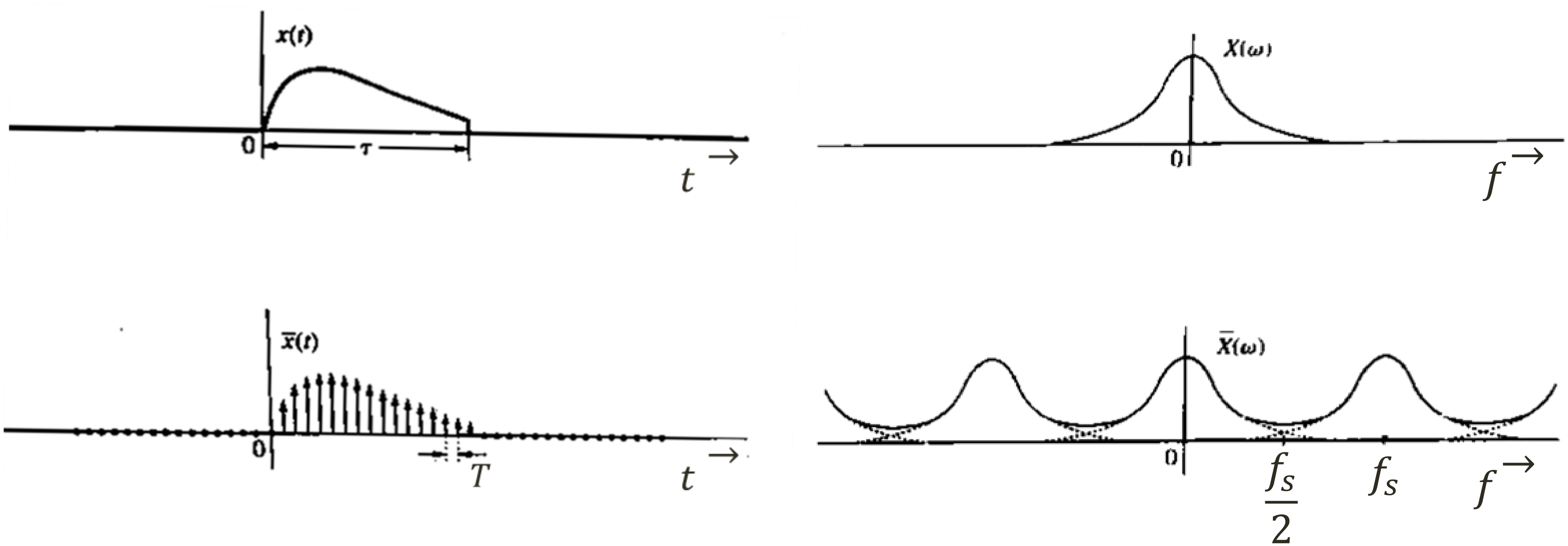
DTFT

DTFT não pode ser computada...

$$\boxed{X(\Omega)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\Omega k}$$

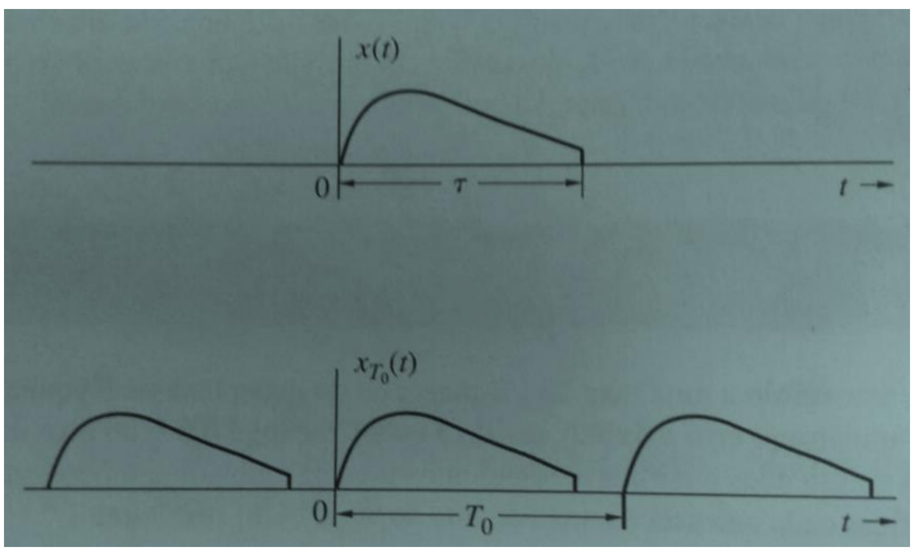
LIMITAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

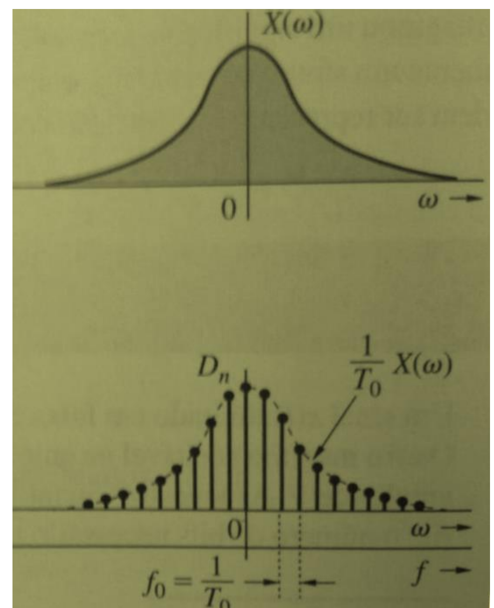
Um sinal não pode ser limitado no domínio do tempo e da frequência ao mesmo tempo!!!

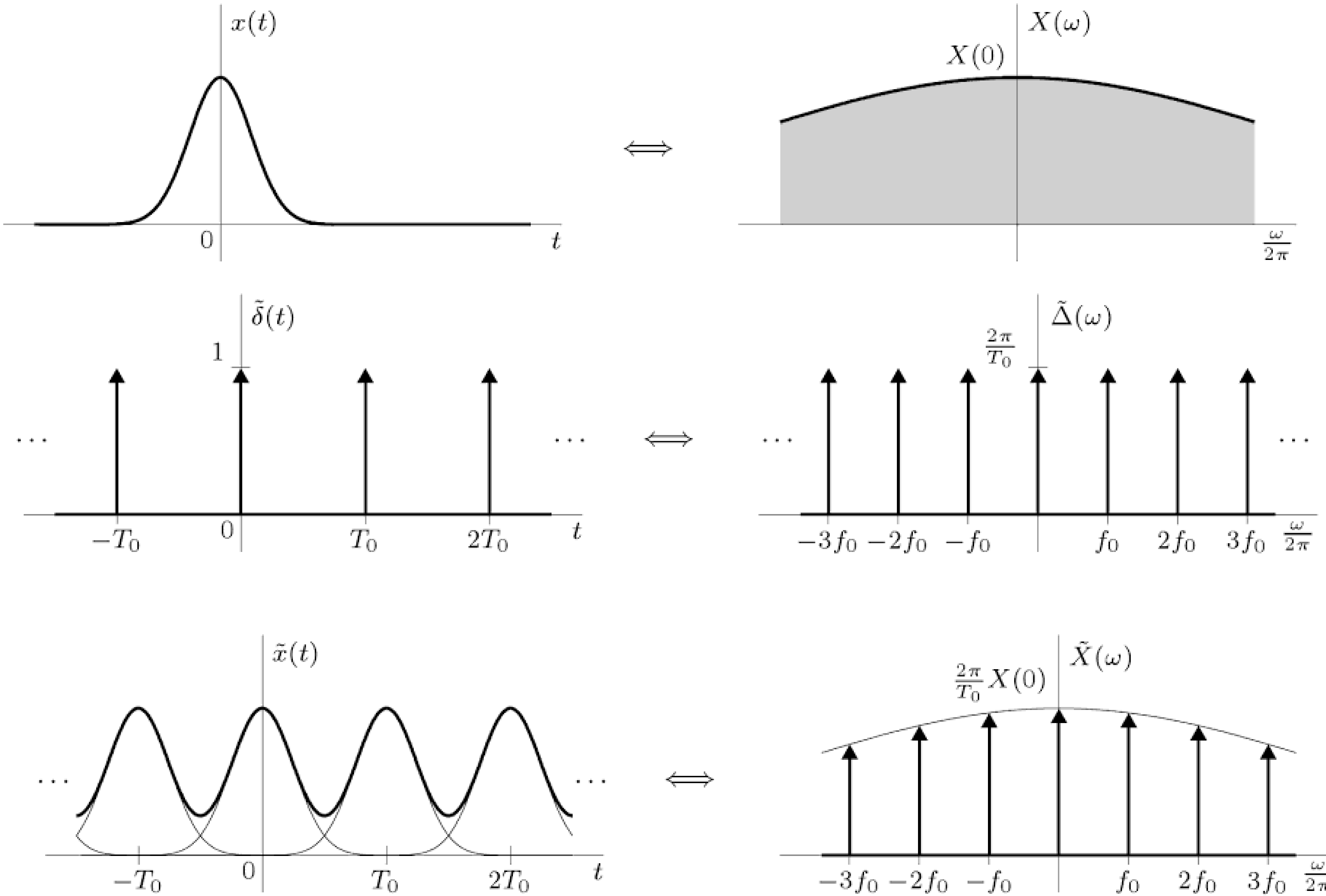


DUAL DA AMOSTRAGEM NO TEMPO: AMOSTRAGEM ESPECTRAL

Teorema da amostragem espectral afirma que o espectro $X(\omega)$ de um sinal $x(t)$ limitado no tempo pode ser reconstruído das amostras de $X(\omega)$ tomadas a uma taxa $R\ amostras/Hz$ se $R > \tau$ (largura ou duração do sinal, em segundos)







$x(t)$
0
t
$\Longleftrightarrow$
$X(\omega)$
$X(0)$
$\frac{\omega}{2\pi}$
$\tilde{\delta}(t)$
1
$\cdots$
$-T_0$
0
T_0
$2T_0$
t
$\tilde{\Delta}(\omega)$
$\frac{2\pi}{T_0}$
$-3f_0$
$-2f_0$
$-f_0$
f_0
$2f_0$
$3f_0$
$\frac{\omega}{2\pi}$
$\tilde{x}(t)$
$\tilde{X}(\omega)$
$\frac{2\pi}{T_0}X(0)$

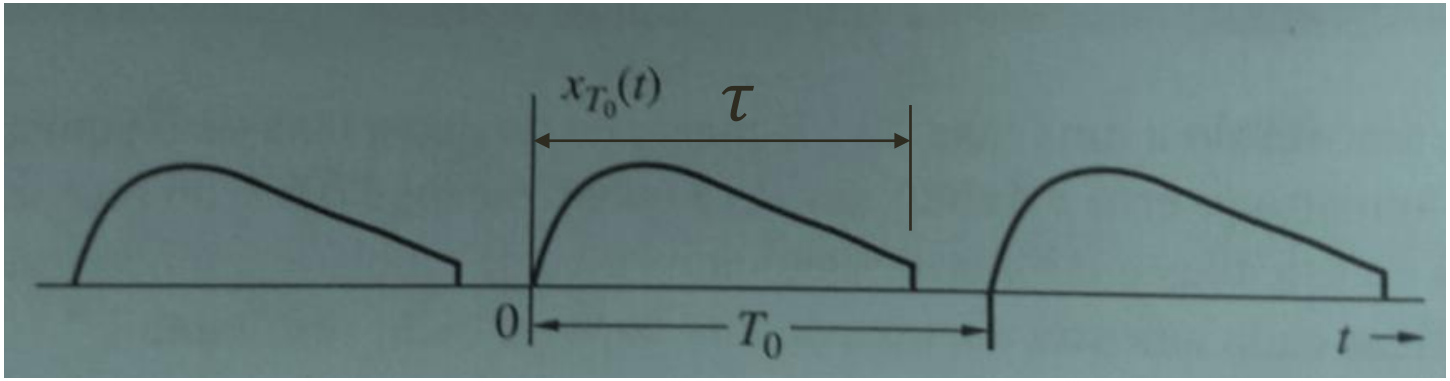
REPLICAÇÃO PERIÓDICA NO TEMPO PRODUZ AMOSTRAGEM ESPECTRAL

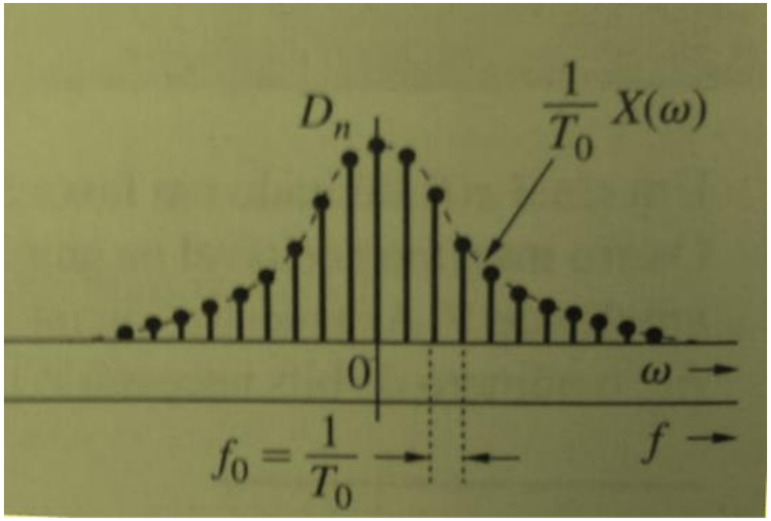
$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\, e^{jk\omega_0 t}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$X[k] = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)$$

Ou seja, o espectro periódico $x_{T_0}(t)$ resulta no espectro de $X(\omega)$ amostrado. Desde que $T_0 > \tau$, os ciclos sucessivos não se sobrepõem e $x(t)$ pode ser recuperado de $x_{T_0}(t)$. Tal recuperação implica indiretamente que $X(\omega)$ pode ser reconstruído de suas amostras.

CONDIÇÃO PARA RECUPERAÇÃO DO SINAL

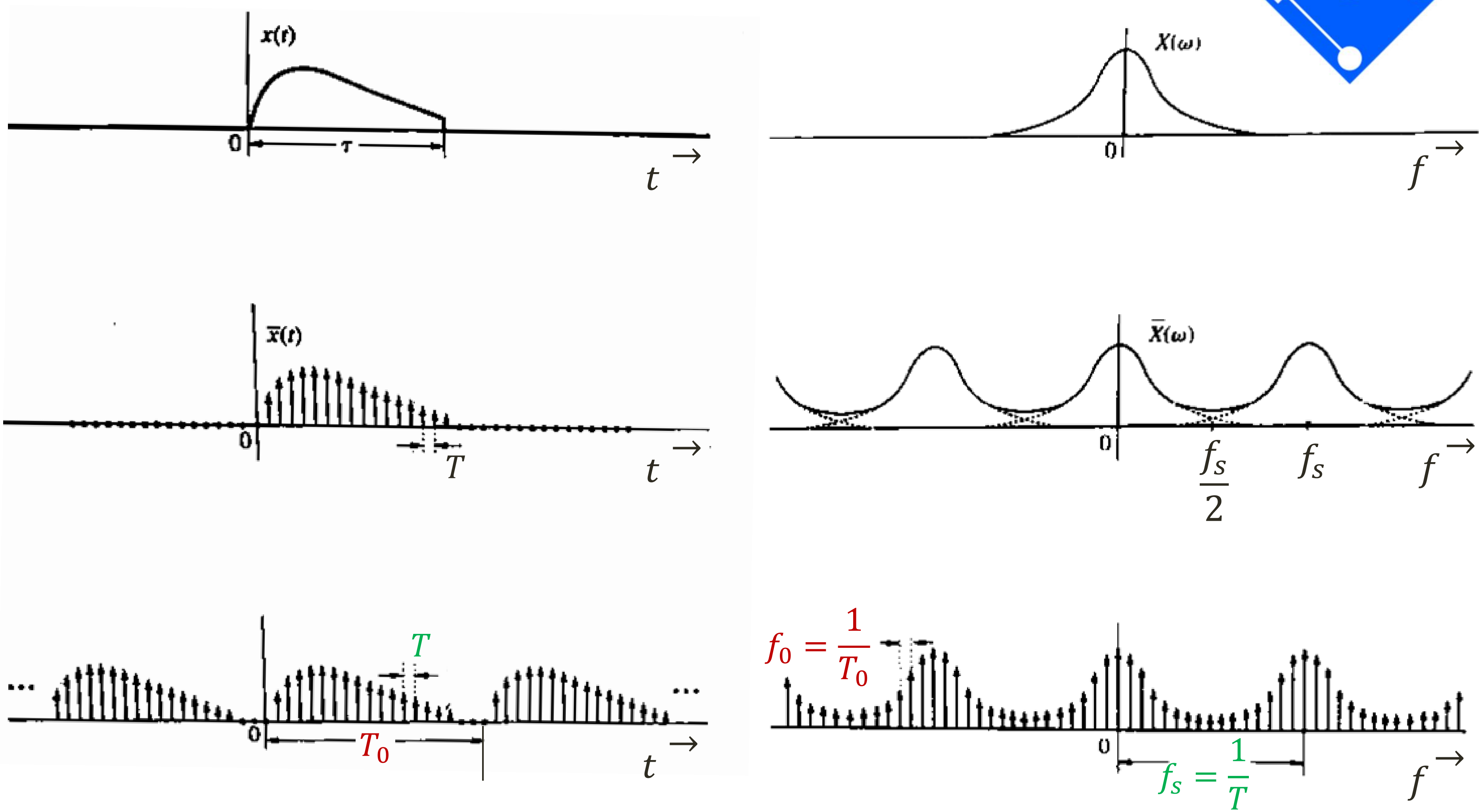




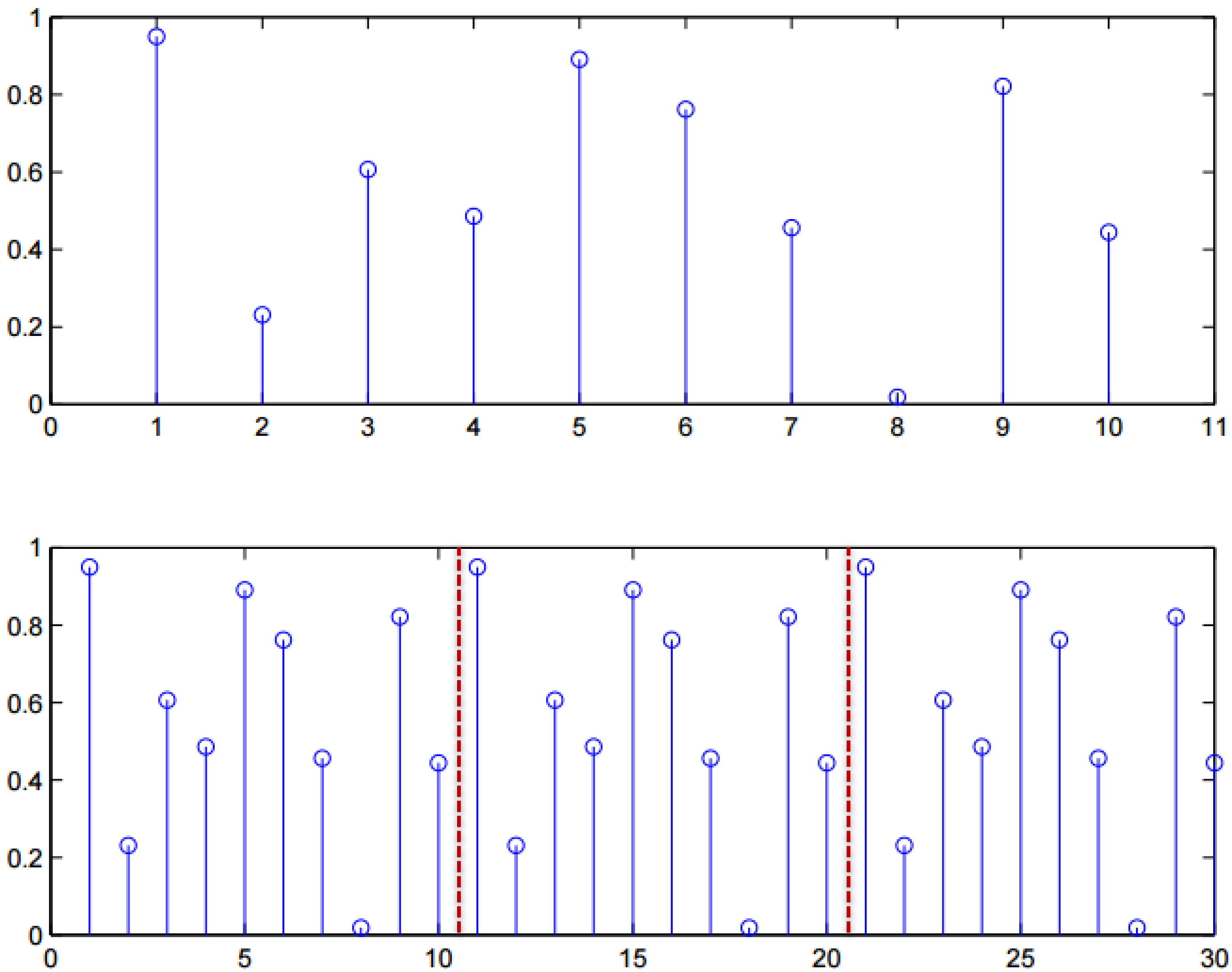
$$T_0 > \tau$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0} < \frac{1}{\tau} \ \ Hz$$

$$R = \frac{1}{f_0} > \tau \ amostras/Hz$$



x(t)
0
τ
t →
X(ω)
0
f →
x̄(t)
0
T
t →
X̄(ω)
0
$\frac{f_s}{2}$
f_s
f →
T
0
T_0
t →
$f_0 = \frac{1}{T_0}$
0
$f_s = \frac{1}{T}$
f →



Periodicidade implícita à DFT

DTFT

DFT

Síntese

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega k}$$

Síntese

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$para \;\; n = 0,1,\dots,N-1$$

Análise

$$x[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega k}d\Omega$$

Análise

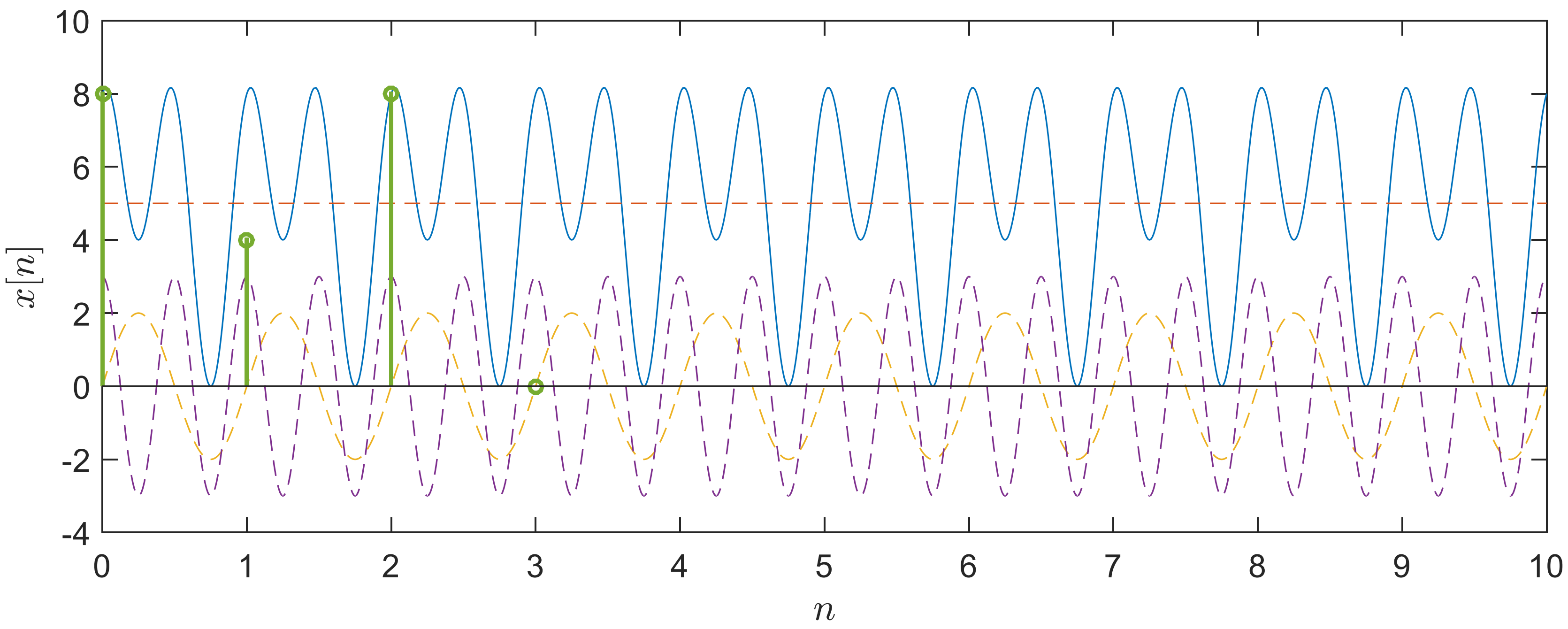
$$x[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

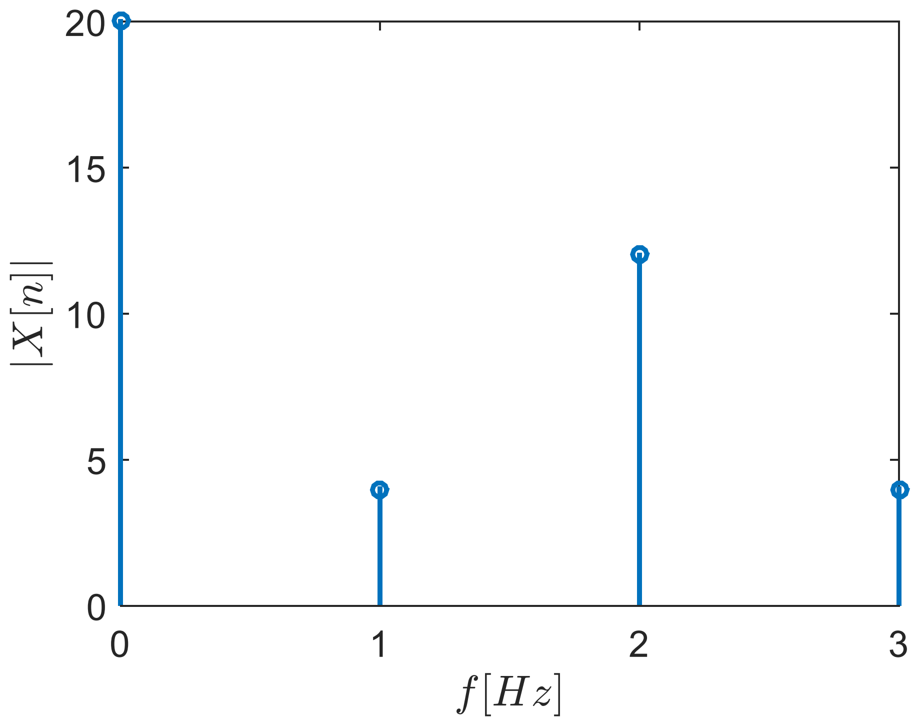
$$para \;\; k = 0,1,\dots,N-1$$

EXEMPLO

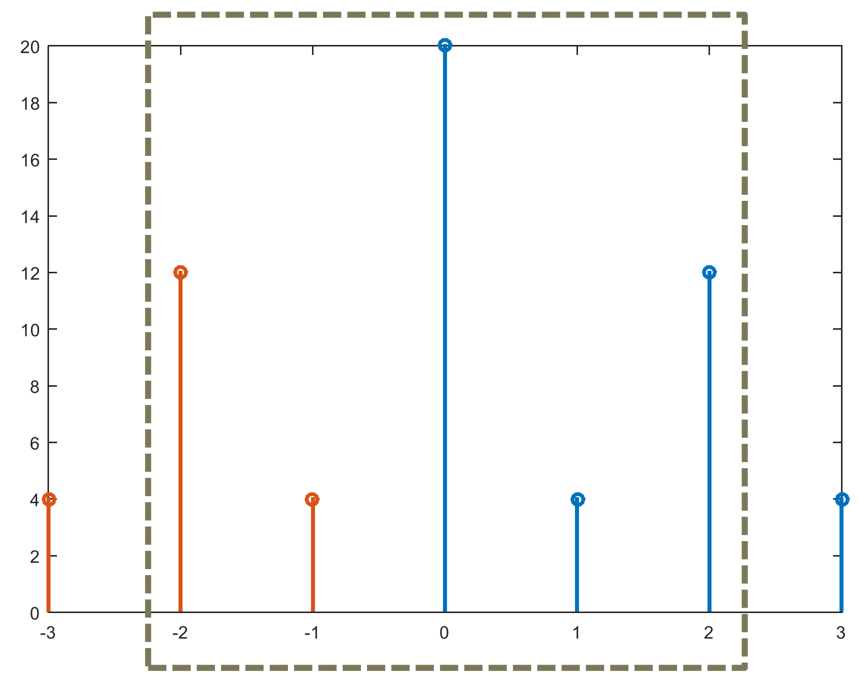
$$x(t) = 5 + \cos(2\pi t - \pi/2) + 3\cos 4\pi t$$

O sinal será amostrado à $f_s = 4\ Hz$, de $t = 0$ até $t = \frac{3}{4}$.





Nyquist



DTFT VS DFT

A DTFT é a transformada de Fourier (FT convencional) de um sinal de tempo discreto. Sua saída é periódica e contínua em frequência.

A DFT pode ser visto como a versão de amostragem (no domínio da frequência) da saída DTFT. Ela é usada para calcular o espectro frequência de um sinal discreto no tempo usando o computador, já que os computadores só podem lidar com um número finito de valores. A DFT e a sua inversa estão implementadas no Matlab como `fft` and `ifft`

DFT

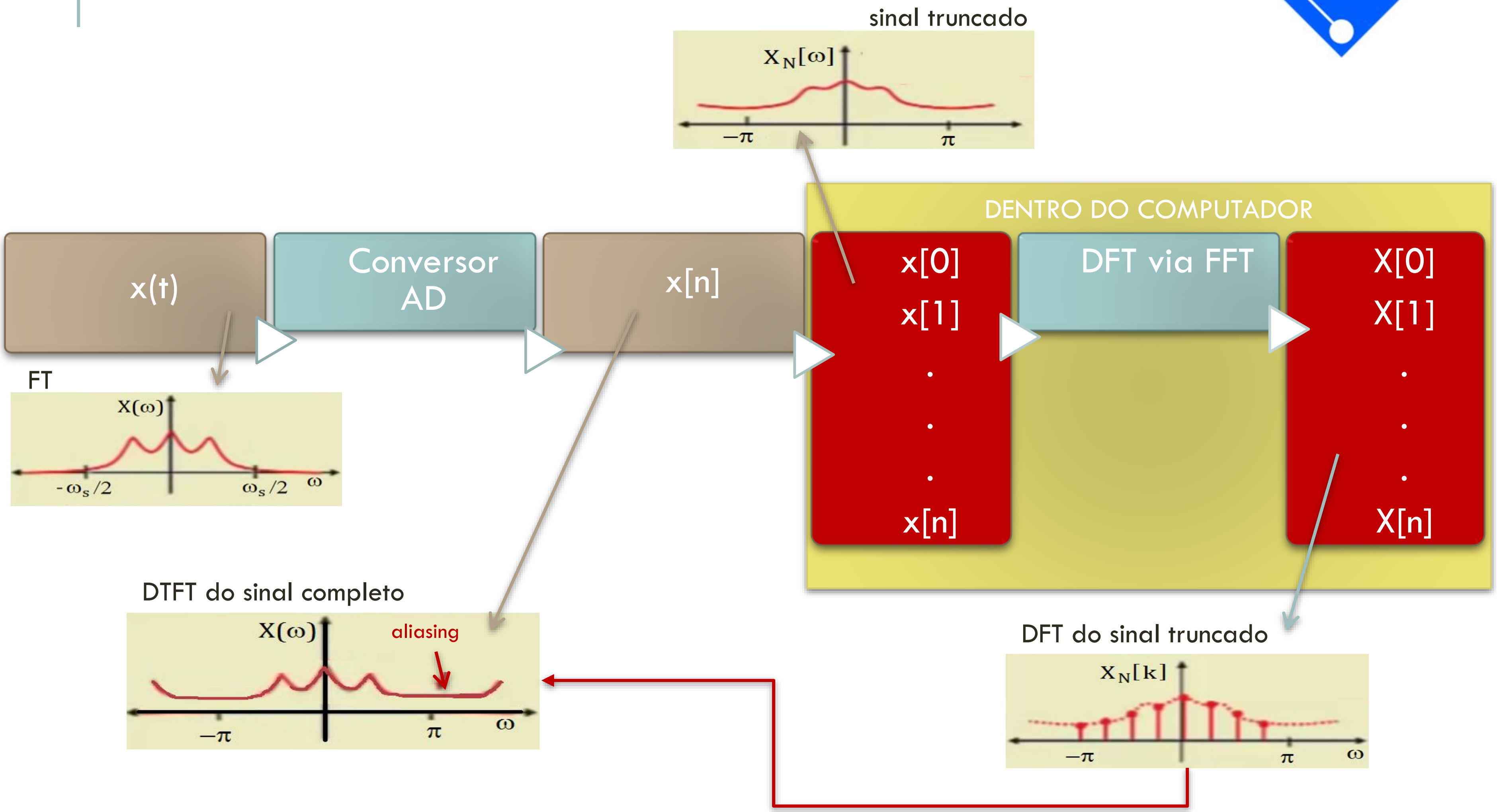
Na verdade o que se deseja é: **FT** (Transformada de Fourier)

No entanto o que é realmente realizado é a : **DFT** (Transformada Discreta de Fourier)

DFT é uma amostragem da TDFT, que é a FT em tempo discreto, no domínio da frequência

$$X[k] = X(\omega)\Big|_{\omega=2\pi k/N}$$

ERROS ACUMULADOS...



DTFT VS DFT EM DOIS CASOS...

Caso 1: Para x[n] de duração finita.

$$\ldots \quad 0 \quad 0 \quad \underbrace{x[0] \quad x[3] \quad x[2] \quad \ldots \quad x[n-1]}_{\text{n termos não nulos}} \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

– O sinal é nulo fora da faixa de que capturamos o sinal. Temos, portanto, todos os dados significativos referentes ao sinal.
– Suposição teórica (difícil de ocorrer na prática) para base da hipótese seguinte...

Caso 2: Para x[n] de duração *infinita.*

– O sinal tem duração maior do que a faixa que capturamos. **Não temos**, portanto, todos os dados significativos referentes ao sinal.
– Qual o efeito desse problema na análise? Quanto tempo precisamos capturar determinado sinal???

DFT E DTFT: CASO DE DURAÇÃO FINITA

Se $x[n] = 0$ para $n < 0$ e $n \geq N$, então a DTFT é:

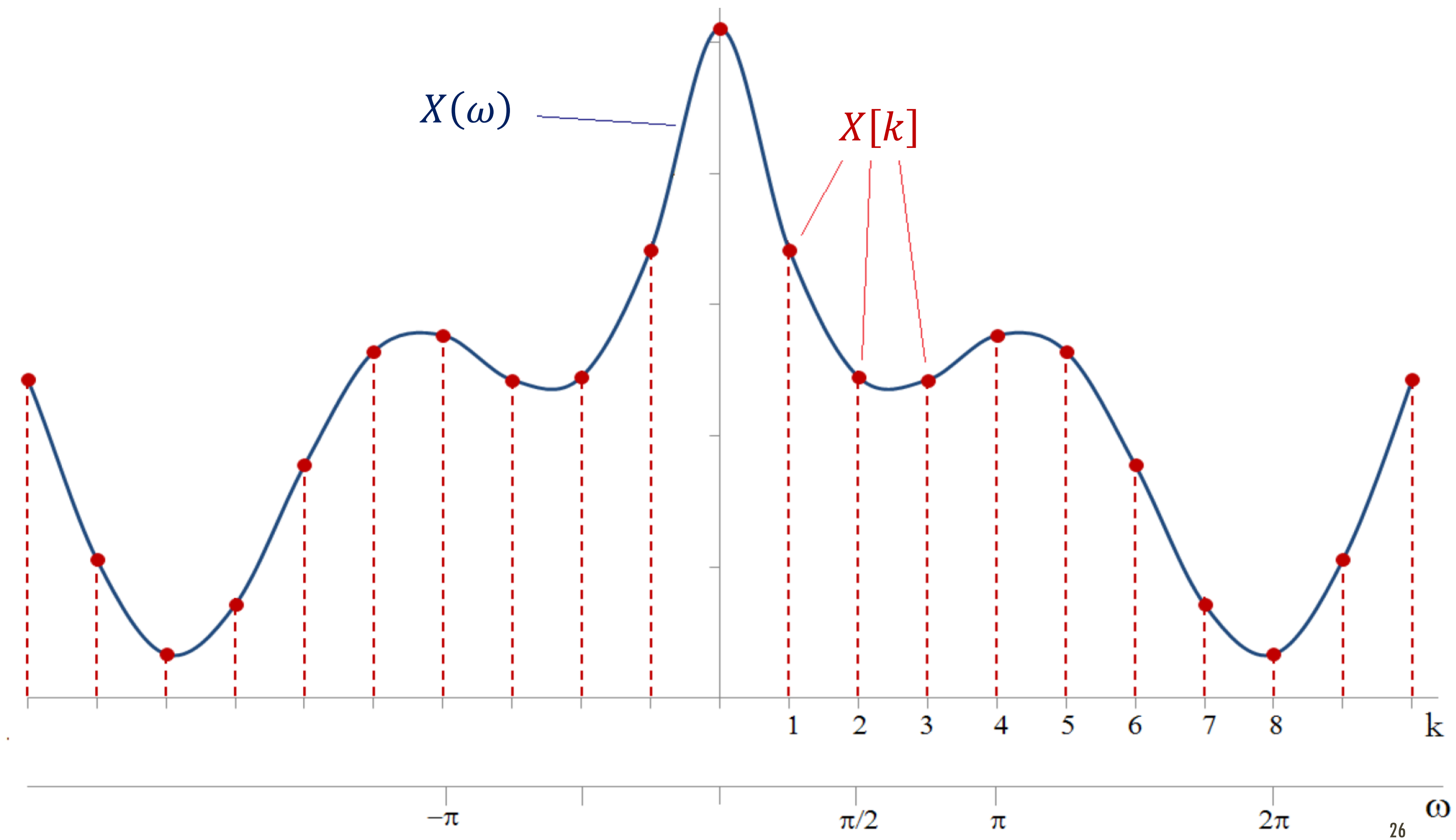
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\Omega n}$$

Se, com N amostras computa-se a DFT, então...

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

Comparando-se os dois casos: $X[k] = X(k2\pi/N)$

Os pontos da DFT caem sobre a curva definida pela DTFT. Isto é, $X[k]$ são amostras de $X(\omega)$ em $\omega = k2\pi/N$.



TRUQUE ZERO-PADDING

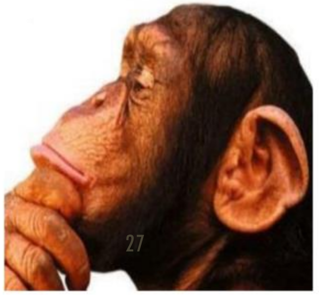
Depois de coletados os N pontos de amostragem, colocamos alguns zeros adicionais ao final da lista para *enganar* o processo DFT (como são zeros não alteram os valores na soma DFT).

Supondo que tenhamos N_z pontos, incluindo os zeros que adicionamos...

O espaçamento entre os pontos da DFT será de $2\pi/N_z$, que é menor que $2\pi/N$.

No MatLab,

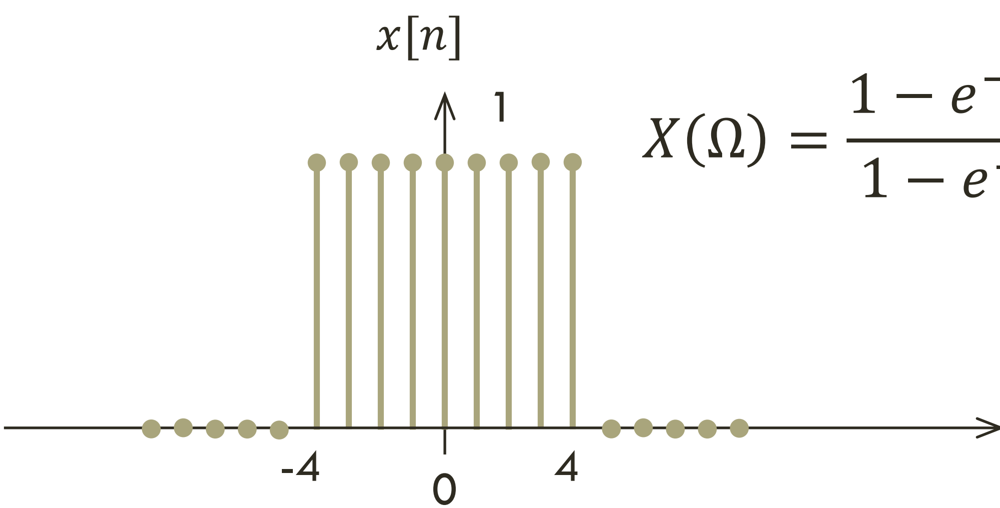
$X = fft(x, N'); \; \% \; FFT \; size \; N' = number \; of \; zeros > length(x)$



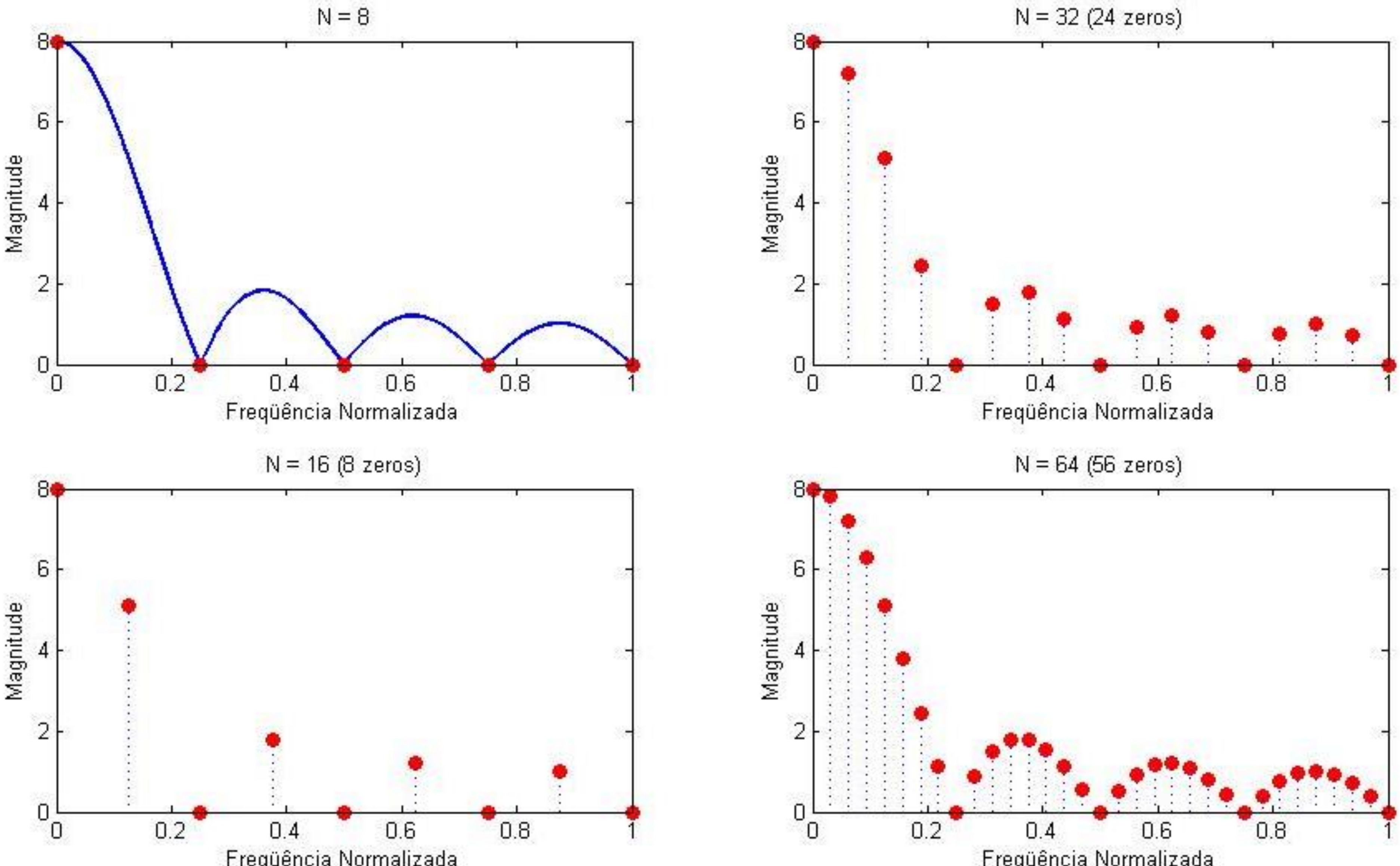
EXEMPLO
IMPORTÂNCIA DO ZERO-PADDING

1. Fazer a DFT da sequência $x[n]$ com 9 pontos.
2. Utilizar o truque do *zero-padding* para 16, 32, e 64 pontos.

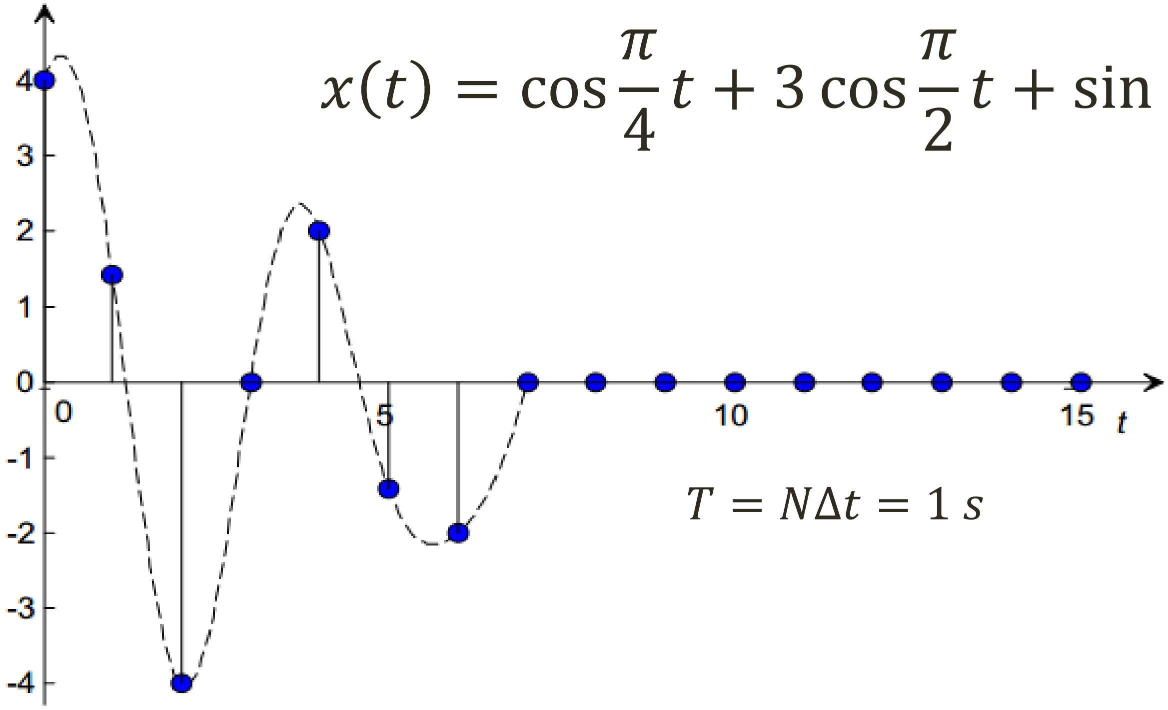
DTFT do sinal $x[n]$ foi já mostrado



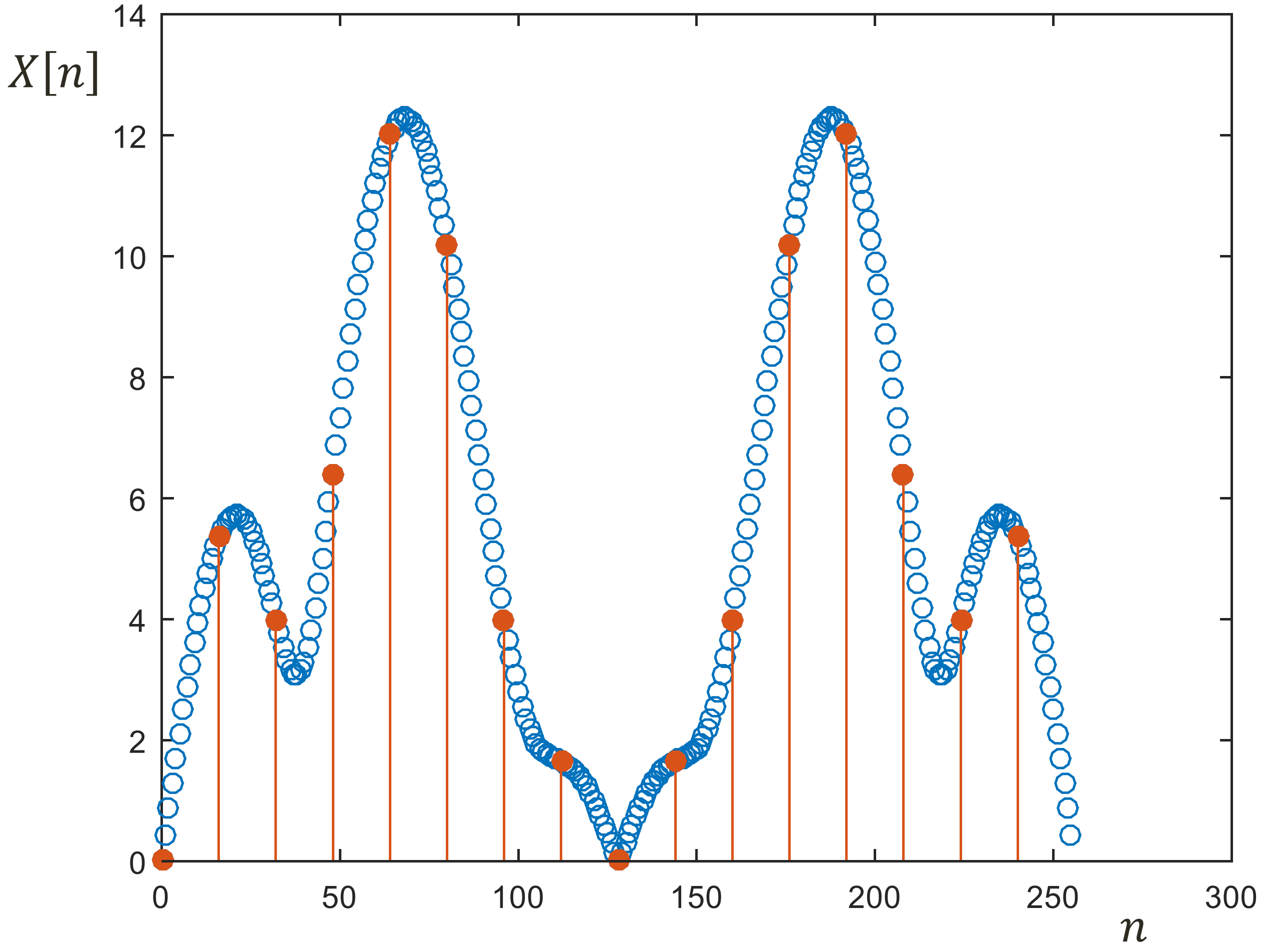
$$X(\Omega) = \frac{1 - e^{-j9\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}}$$


N = 8
Magnitude
Freqüência Normalizada
N = 32 (24 zeros)
Magnitude
Freqüência Normalizada
N = 16 (8 zeros)
Magnitude
Freqüência Normalizada
N = 64 (56 zeros)
Magnitude
Freqüência Normalizada

$$x(t) = \cos\frac{\pi}{4}t + 3\cos\frac{\pi}{2}t + \sin\ \frac{3\pi}{4}t$$



$$T = N\Delta t = 1\ s$$




```
k = 0:7;
f16 = [cos(2*pi.*k/8) + 3*cos(4*pi.*k/8)+ sin(6*pi.*k/8) zeros(1,8)];
f256 = [f16 zeros(1,240)];
plot(0:255,abs(fft(f256)),'o');
hold;
stem(0:16:255, abs(fft(f16)),'filled');
```

DFT E DTFT: CASO DE DURAÇÃO *INFINITA*

Nossa amostragem tem uma dimensão finita... E o sinal real é maior que essa amostragem.

$x[n]$ $\qquad\qquad n = \cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

Obviamente, perdemos informação...

Imagina-se que o sinal tenha duração finita...

$$x_N[n] = \begin{cases} x[n] & \text{para } n = 0,1,2,\dots,N-1 \\ 0 \; cc \end{cases}$$

E aí pode-se calcular a DFT de N amostras:

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_N[n] e^{-j2\pi kn/N} \qquad \text{para } k = 0,1,\dots,N-1$$

A questão é: qual a relação entre a DFT obtida do sinal truncado $x_N[n]$ em relação àquela obtida com $x[n]$?

Verdadeira DTFT:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

DTFT do sinal truncado:

$$X_N(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N[n]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$$

DFT do sinal coletado:

$$X_N[\Omega] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

O que **QUEREMOS** ver

DFT não mostra a DTFT do sinal completo

A visão **DISTORCIDA** do que queremos ver

DFT é uma amostra da DTFT **do sinal truncado**

O que **PODEMOS** ver

Vamos entender qual o erro que está na DTFT truncada e, consequentemente, na DFT.
Depois disso, entender como minimizar o erro!

Vamos entender como $X_N(\Omega)$ se relaciona com $X(\Omega)$!!!!

$$x_N[n] = \boxed{x[n]}\boxed{u_q[n]}$$

$$u_q[n] = u[n]u[n-q]$$

DTFT

Convolução no domínio da frequência...

$$\boxed{U_q(\Omega) = \frac{\sin[N\Omega/2]}{\sin[\Omega/2]} e^{-j(N-1)\Omega/2}}$$

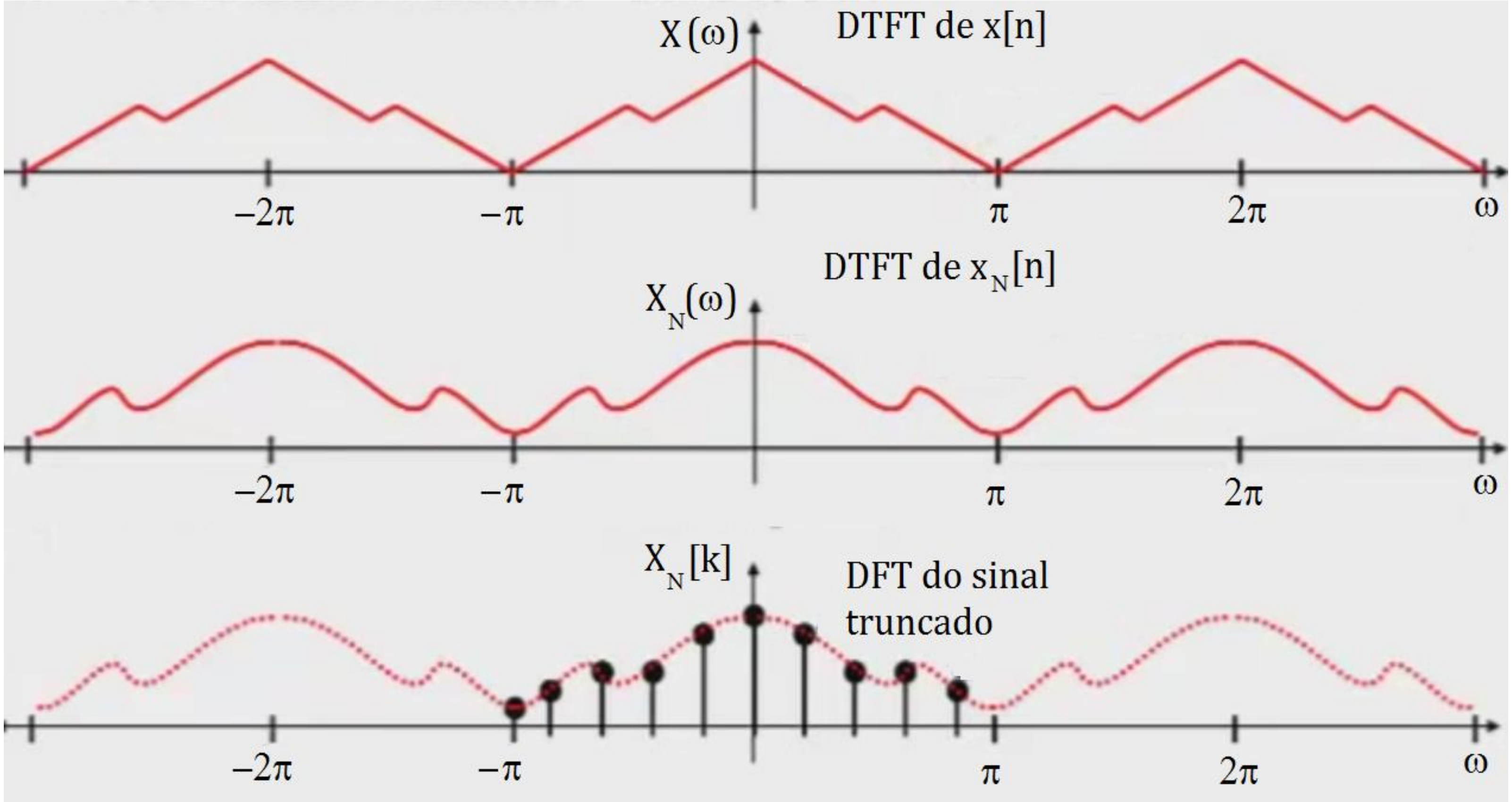
$$N = 2q + 1$$

$$X_N(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)\, U_q(\Omega - \lambda) d\lambda$$

Causa distorção de $X(\omega)$

Quanto mais dados coletar, menor é a distorção, dado que $U_q(\Omega) \to \delta(\Omega)$

EXEMPLO...



X(ω)
DTFT de x[n]
−2π
−π
π
2π
ω
DTFT de x_N[n]
X_N(ω)
−2π
−π
π
2π
ω
X_N[k]
DFT do sinal truncado
−2π
−π
π
2π
ω

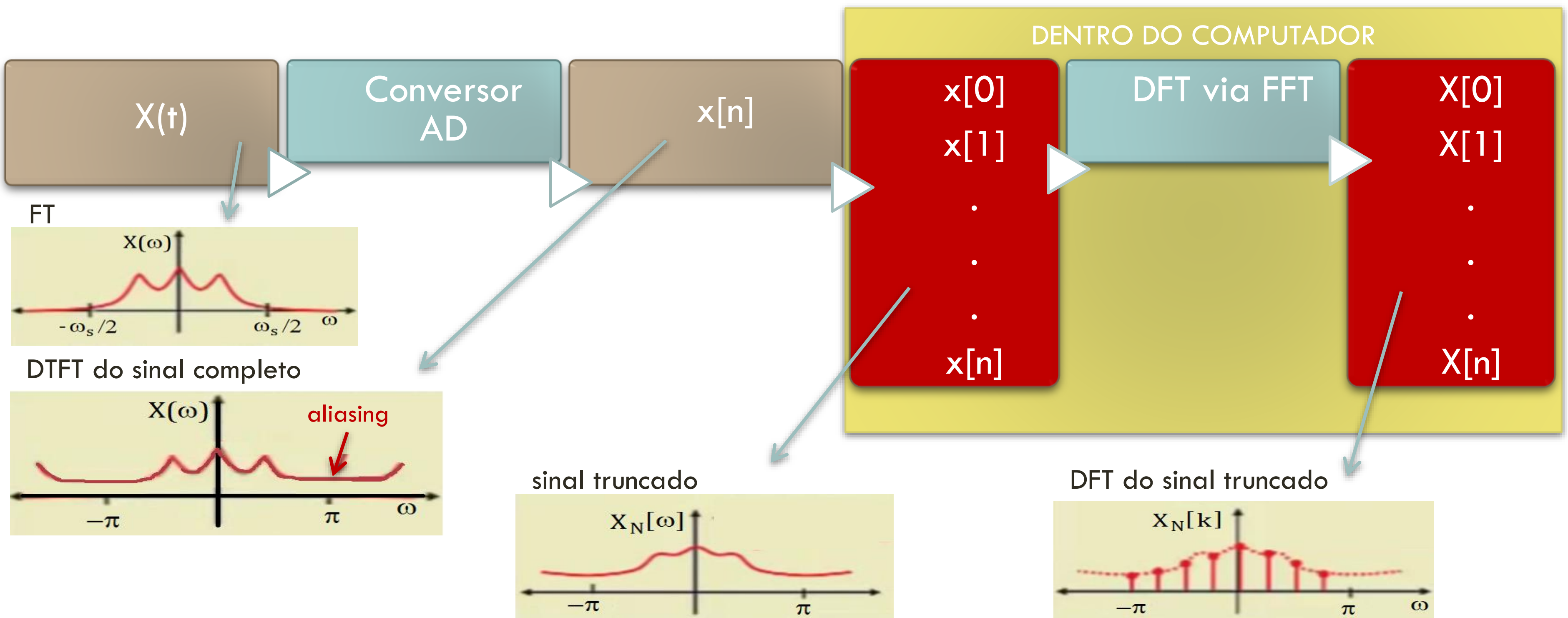
PONTOS SOBRE SINAL DE DURAÇÃO *INFINITA*...

DTFT de um sinal coletado é uma versão *distorcida* da DTFT do sinal de duração infinita ;

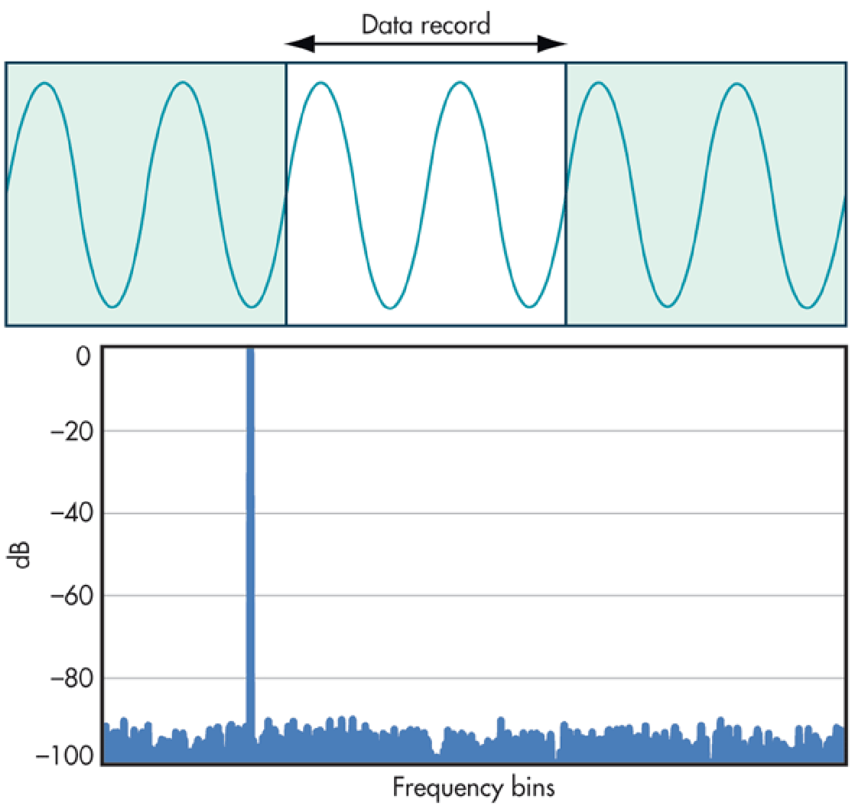
A DFT do sinal representa pontos da curva DTFT –uma visão não exata da verdadeira DTFT!

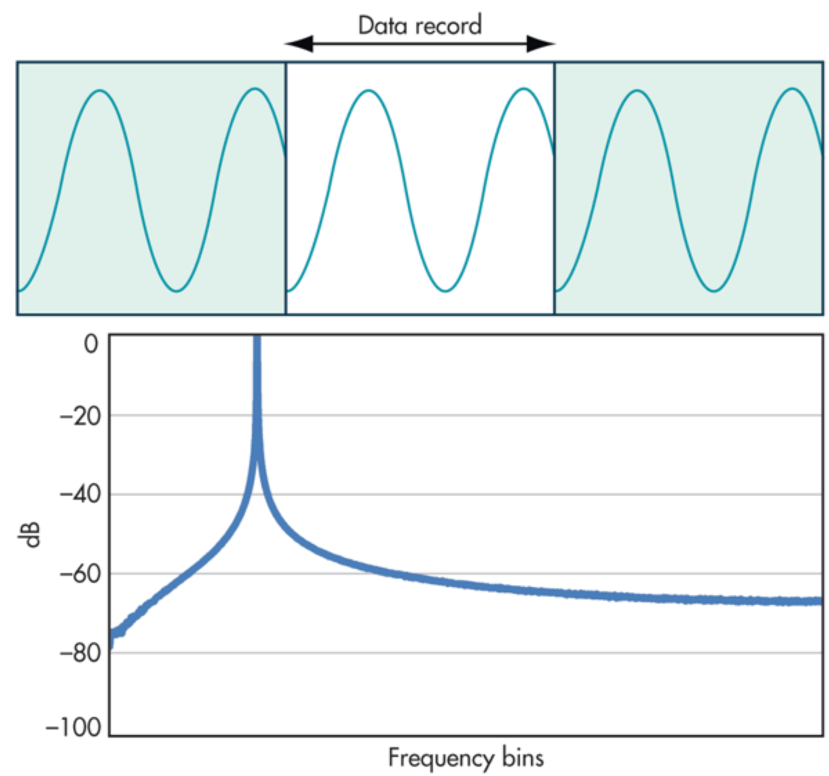
Nosso truque *Zero-padding* aumenta a densidade de pontos da DFT, gerando uma visão melhor **da DTFT distorcida**!

ERROS ACUMULADOS...



LEAKAGE... OUTRO PROBLEMA DO SINAL TRUNCADO

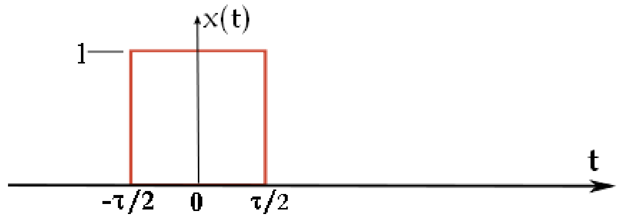




JANELAMENTO

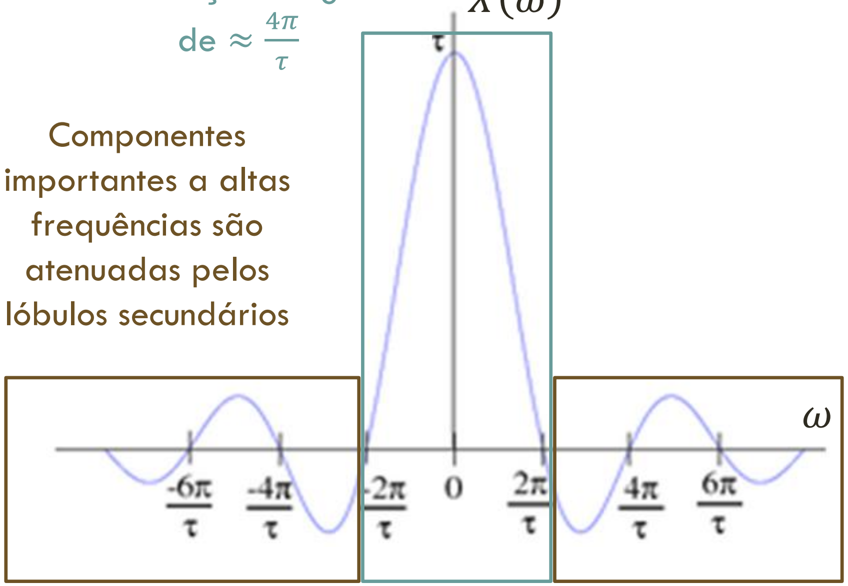
Diferentes tipos de janelas podem ser utilizados.

A mais simples é a retangular, que é igual a 1 durante o intervalo de tempo que se pretende analisar, e igual a zero fora desse intervalo.

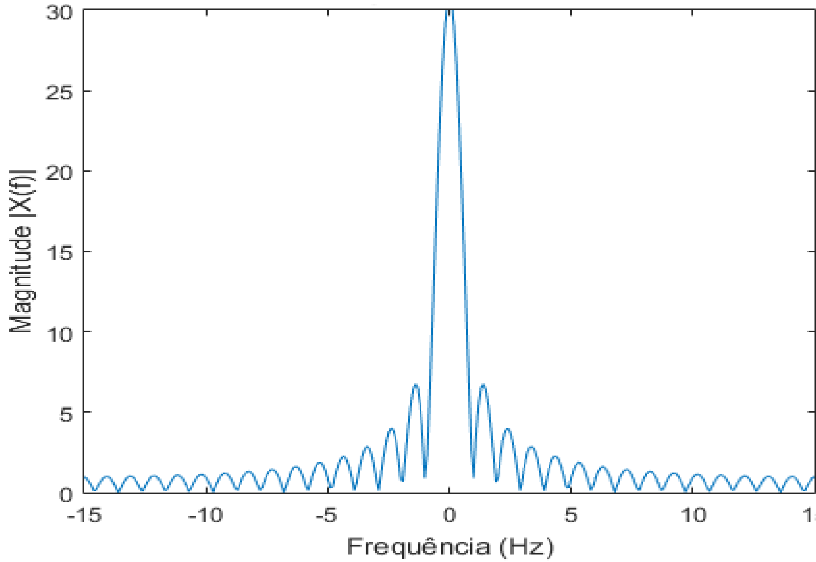


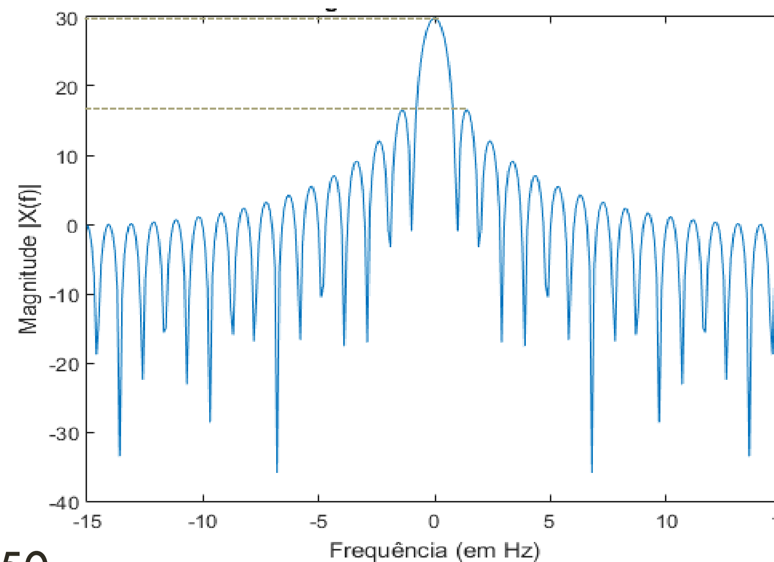
Lóbulo principal define a resolução: largura de $\approx \frac{4\pi}{\tau}$

Componentes importantes a altas frequências são atenuadas pelos lóbulos secundários

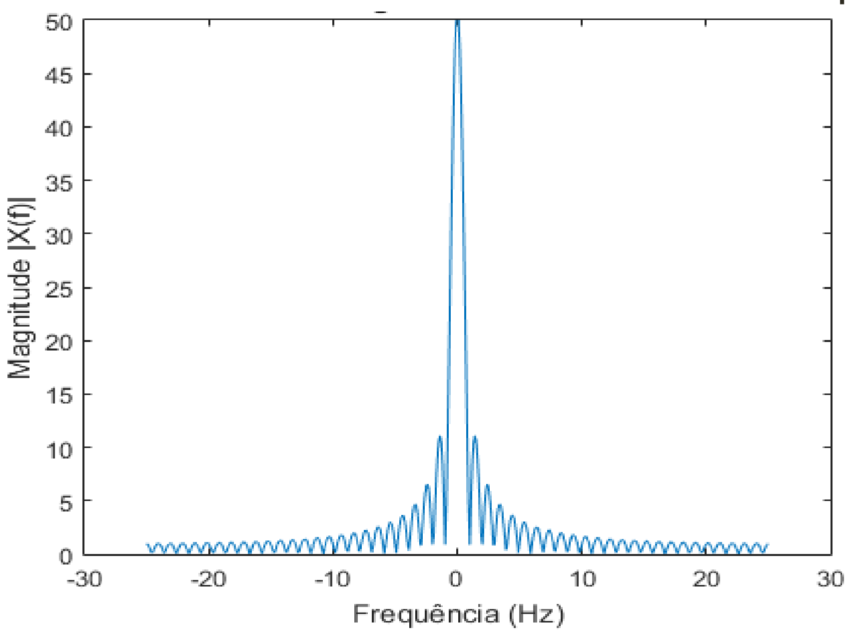


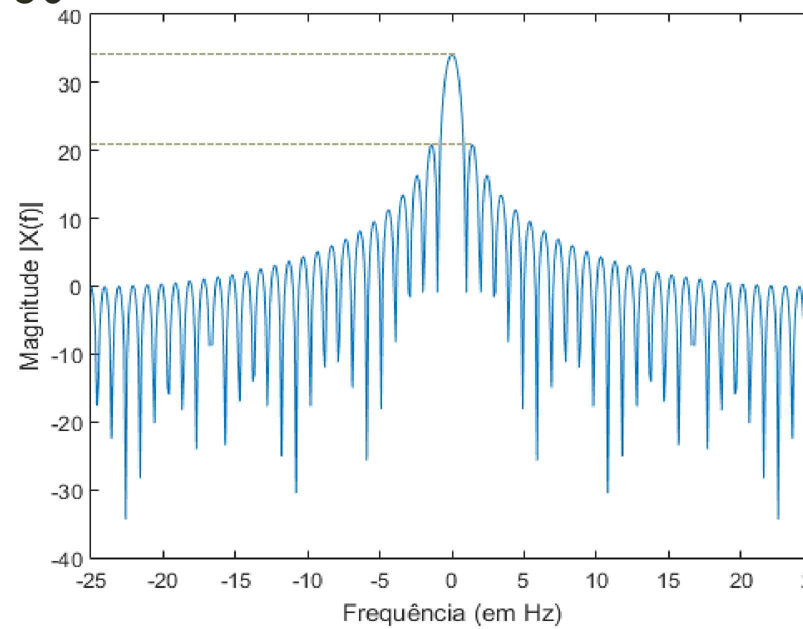
N=25


Magnitude |X(f)|
Frequência (Hz)


Magnitude |X(f)|
Frequência (em Hz)

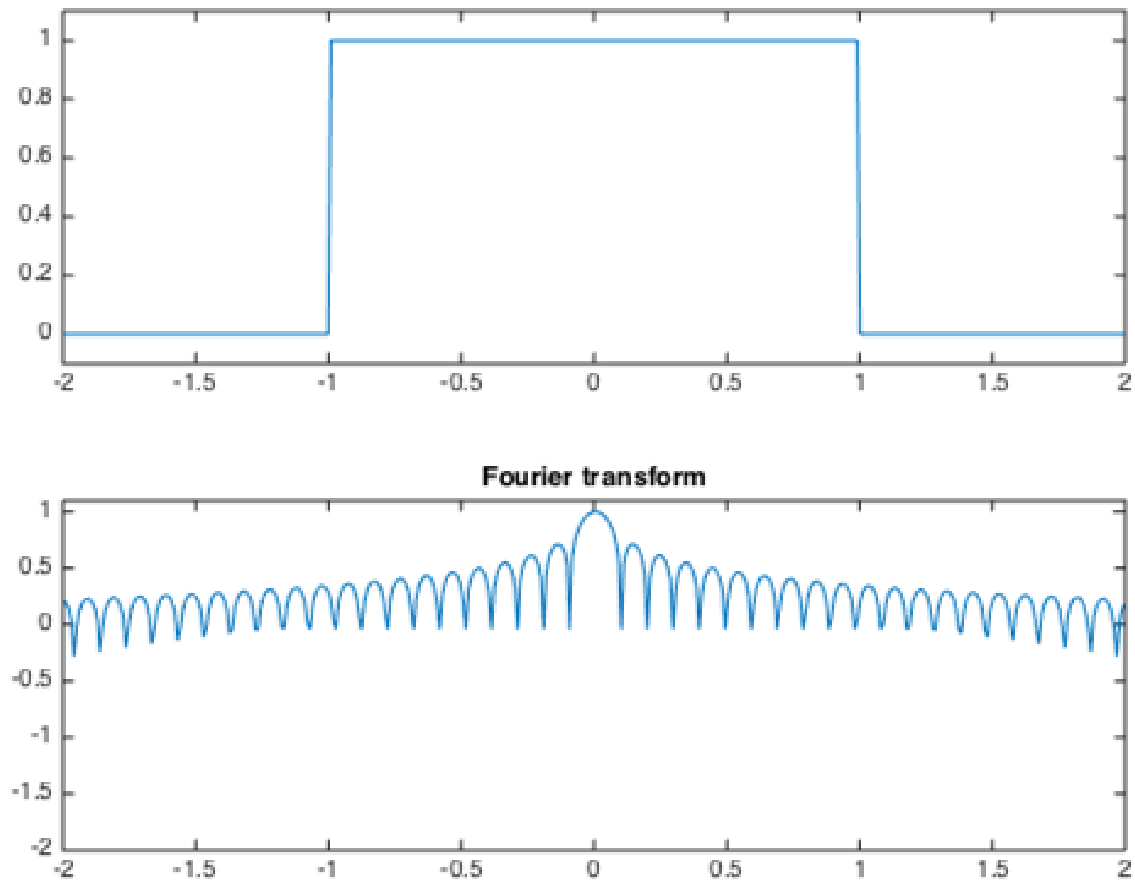
N=50


Magnitude |X(f)|
Frequência (Hz)


Magnitude |X(f)|
Frequência (em Hz)

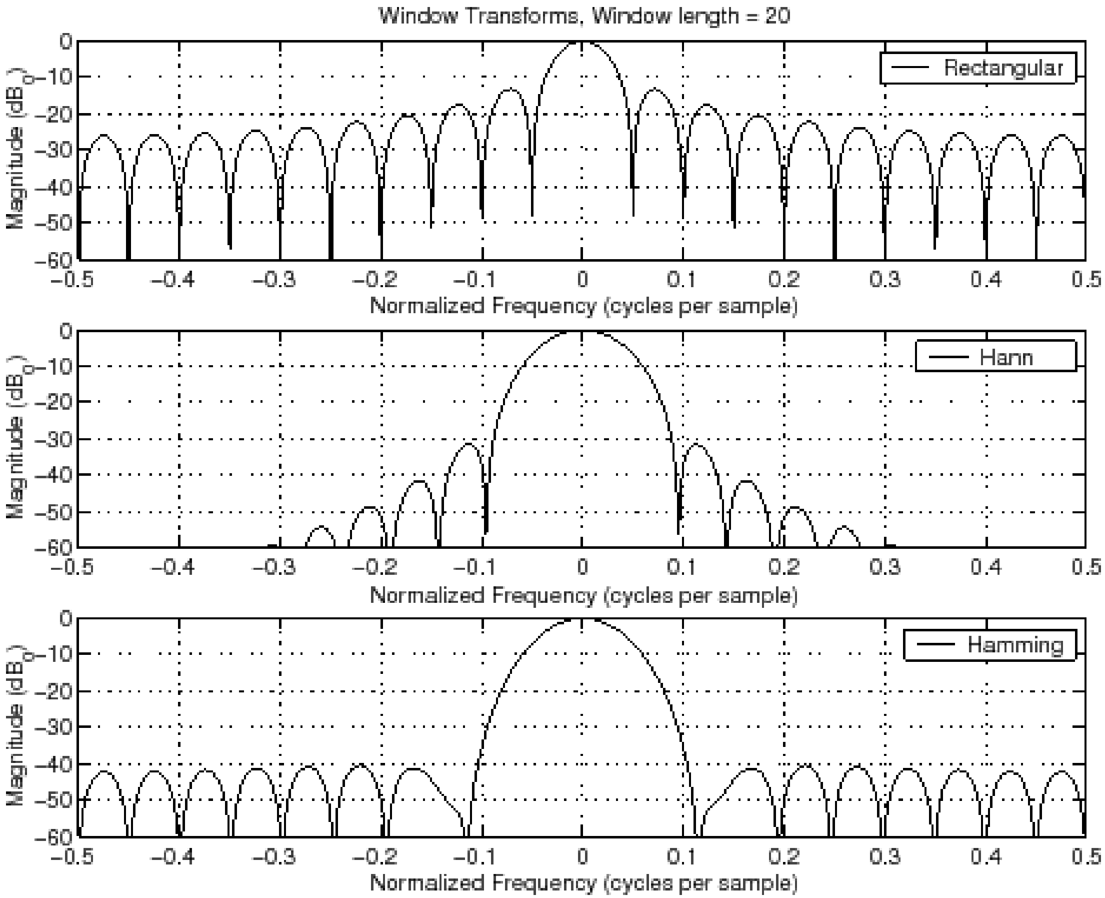
JANELAMENTO

Quanto mais estreito for o lóbulo principal, melhor a resolução frequencial. No entanto, quanto mais estreito o lóbulo principal, mais altos se tornam os lóbulos laterais, que aparecem como ruído de fundo no espectrograma. A janela retangular fornece boa resolução frequencial, mas os lóbulos laterais são muito altos, resultando em muito ruído de fundo.

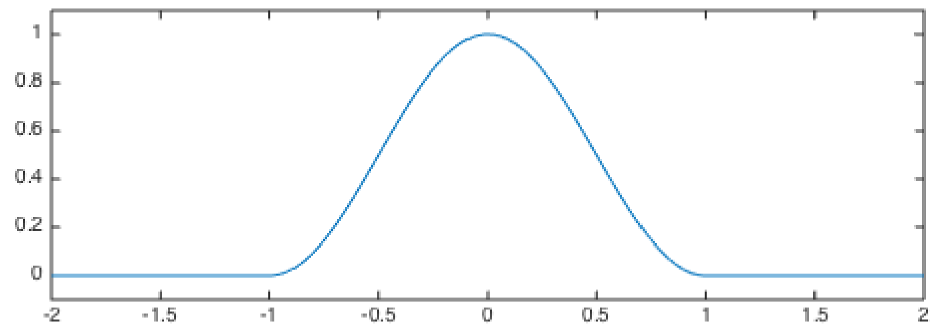


OUTRAS JANELAS...

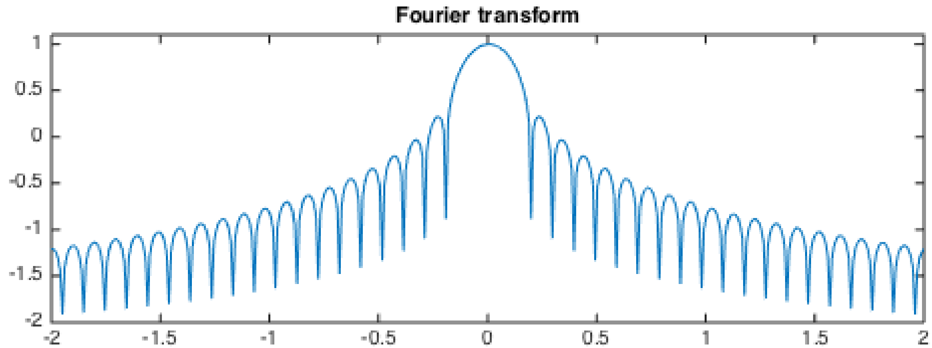
As janelas de Hamming e Hanning são criadas com base em funções trigonométricas.



HANNING



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2



Fourier transform
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

HANNING

Por exemplo, a janela de Hanning (também chamado de Hann), em homenagem ao vienense Julius Ferdinand von Hann (1839-1921), é dada por:

$$w(k) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{M-1}\right)\right] \qquad k = 0, \dots, M-1$$

No MatLab,

$w \ = \ hanning(M);$ ou $w \ = \ hann(M);$

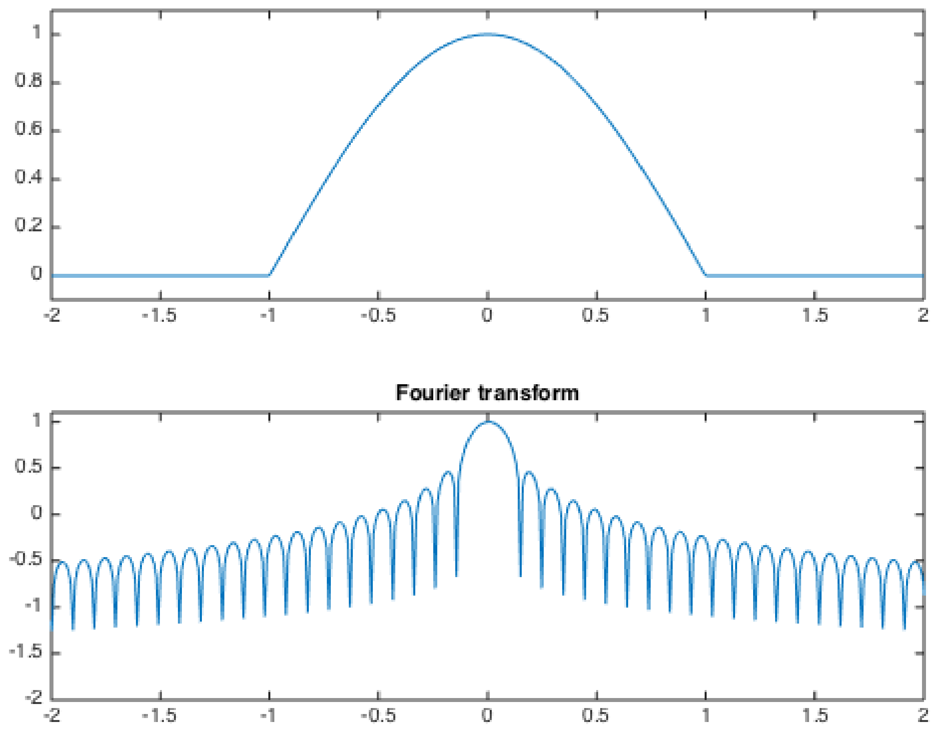
Que equivalem, respectivamente, a:

$$w \ = \ .54 \ - \ .46 * \cos(2 * pi * (1{:}M)'/(M+1));$$

$$w \ = \ .54 \ - \ .46 * \cos(2 * pi * (0{:}M-1)'/(M-1));$$

```
>> hanning(3)
ans = 0.5 1 0.5
>> hann(3)
ans = 0 1 0
```

HAMMING



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
Fourier transform
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

HAMMING

O janelamento começa em 0,08, sobe para 1 no meio do período, e depois cai novamente até 0,08 no final.

$$w(k) = 0{,}54 - 0{,}46\cos\left(\frac{2\pi k}{M-1}\right), \qquad k = 0, \dots, M-1$$

No MatLab,

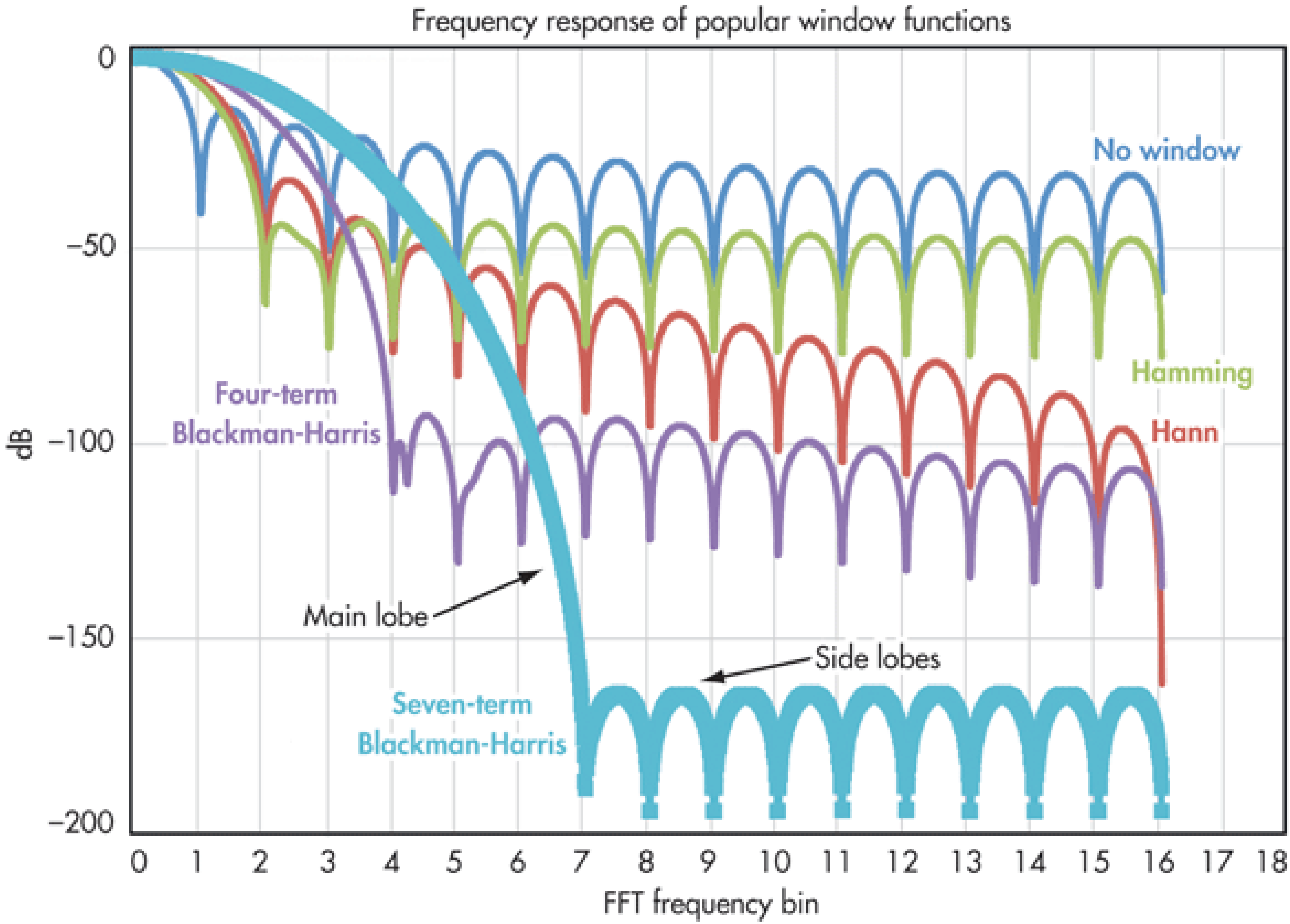
$$w \; = \; hamming(M);$$

Que é equivalente a:

$$w \; = \; .54 \; - \; .46 * \cos(2 * pi * (0{:}\, M-1)'/(M-1))$$

Opção '*periodic*' no MatLab utiliza M em vez de $M-1$

```
>> hamming(3)
ans = 0.0800 1.0000 0.0800
>> hamming(3,'symmetric')
ans = 0.0800 1.0000 0.0800
>> hamming(3,'periodic')
ans = 0.0800 0.7700 0.7700
>> hamming(4)
ans = 0.0800 0.7700 0.7700 0.0800
```


Frequency response of popular window functions
0
−50
−100
−150
−200
dB
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
FFT frequency bin
No window
Hamming
Hann
Four-term Blackman-Harris
Main lobe
Side lobes
Seven-term Blackman-Harris

Erro de distorção (smearing): controlar através da escolha apropriada do tamanho da amostra e do uso de *windowing*

Este é o único dado que conseguimos computar... Com todos esses erros *pendurados*...

Erro de Grid: controlar através da escolha apropriada do tamanho da amostra N e do uso do truque de *zero padding*.

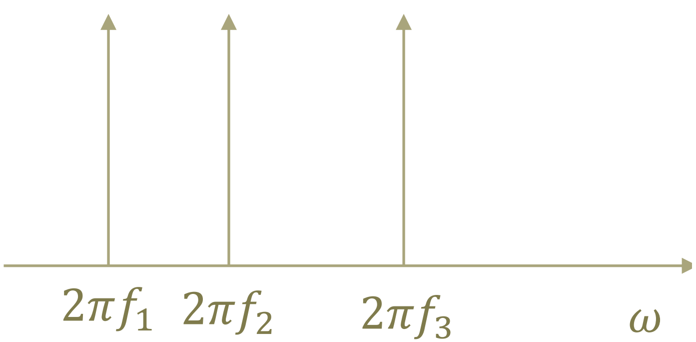
Erro de aliasing: controlar através da escolha apropriada da taxa de amostragem

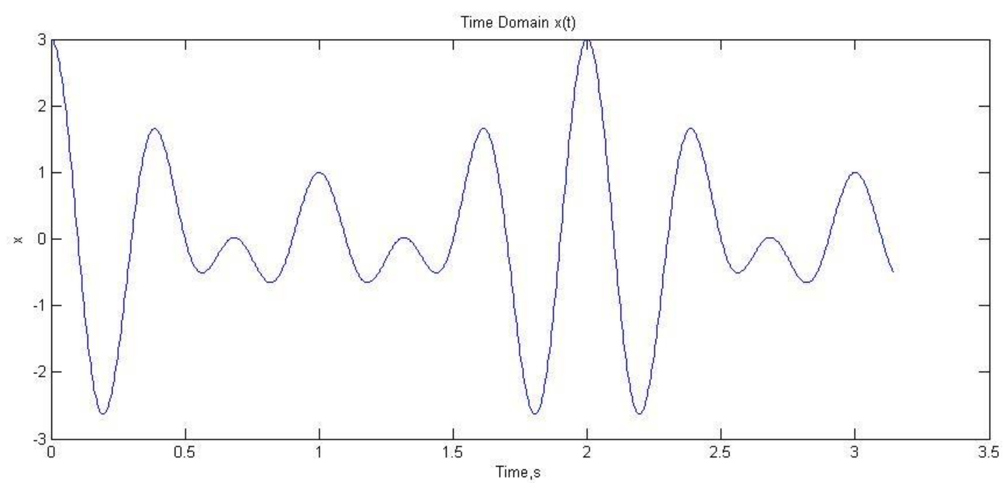
EXEMPLO

Vamos analisar o sinal sinusoidal composto de três frequências,

$$x = \cos(2\pi f_1 nT) + \cos(2\pi f_2 nT) + \cos(2\pi f_3 nT)$$

onde f_s é a taxa de amostragem, e $T_s = \frac{1}{f_s}$ é o período de amostragem.





ALIASING

$f_1 = 2000$ Hz

$f_2 = 2500$ Hz

$f_3 = 3000$ Hz

$f_s = 200$ Hz ; $f_s = 5000$ Hz ; $f_s = 10000$ Hz

FFT (FAST FOURIER TRANSFORM)

É simplesmente uma forma mais rápida de calcular a DFT: A FFT utiliza alguns algoritmos que permitem reduzir o número de operações para $N\log_2 N$

Para utilizar a FFT, é necessário que o número de amostras seja uma potência de 2 – a FFT é executada mais rapidamente com um vetor cujo comprimento é uma potência de 2.

Para $N = 1000, DFT = 1\,000\,000, FFT = 10\,000$ operações

A FFT no Matlab

Matlab permite o cálculo fácil da DFT via FFT. Se tivermos um vetor A, de n elementos,

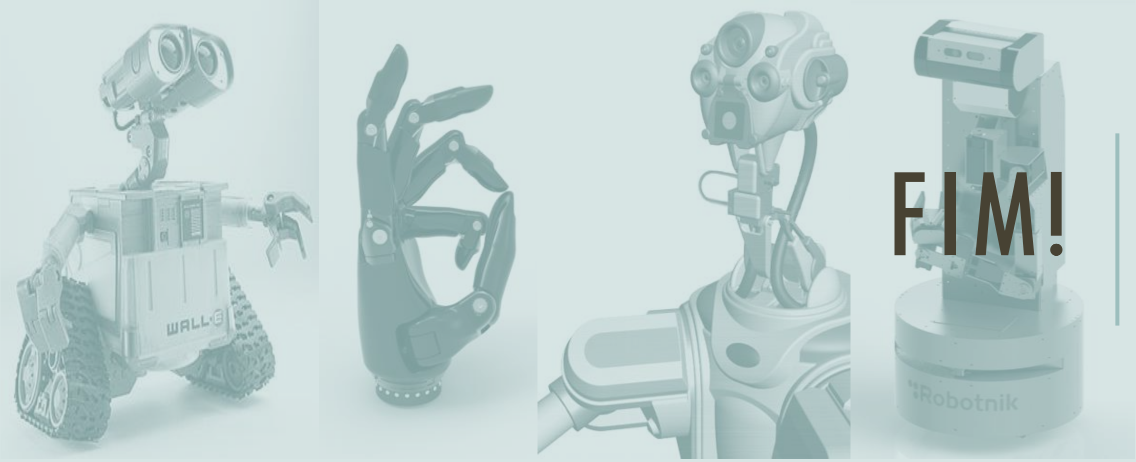
$$>>FFTdeA = fft(A);$$

ENTENDENDO UM POUCO MAIS A FFT

Com o exemplo de uma amostra de 30 pontos de uma função cosseno, frequência de 10 amostras por período.

Serão analisadas duas situações: 3

i. diferentes valores de N na `fft: fft(x,N)`
ii. Diferentes valores de N na amostragem aumentando o número de períodos e mantendo a taxa de aquisição constante



FIM!