Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"

Análise de Covariância

Pórtya Piscitelli cavalcanti

Piracicaba
2016

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em toda pesquisa, é importante que o experimentador esteja sempre atento para tentar "controlar" cuidadosamente todos os fatores que influenciam nos resultados finais do experimento (Zelen, 1957). De acordo com Fisher (1934), a precisão de um experimento pode ser aumentada consideravelmente pela equalização de potenciais fontes de erro entre os diferentes tratamentos a serem comparados.

Assim, a utilização do princípio do controle local permite atenuar condições experimentais heterogêneas de modo que os tratamentos sejam distribuídos equitativamente e a possível fonte de erro seja minimizada ou eliminada (Fisher, 1934). Contudo, na prática, nem sempre é possível ou interessante controlar todos os fatores, mesmo que esses possam ser quantificados (Zelen, 1957). Desta forma, tem-se como alternativa a medição dos fatores que forem relevantes para a precisão do experimento a fim de tentar corrigir a influência exercida sobre a variável resposta (Fisher, 1934).

Nesse contexto, a análise de covariância (ANCOVA), proposta por Fisher em 1934, permite ajustar o efeito de uma variável resposta que sofreu influência de uma variável ou uma fonte de variação não controlada, combinando dois procedimentos amplamente aplicados: a análise de variância (ANOVA) e a regressão (Fisher, 1934).

Na ANCOVA, a variável medida na condição inicial da unidade experimental é uma variável auxiliar, também chamada de variável concomitante ou covariável (Cochran, 1957). Em um mesmo experimento, pode haver mais de uma covariável. Esta, complementa o controle local e na grande maioria das situações simplesmente o substitui.

É importante ressaltar que a covariável necessita estar correlacionada com a variável resposta e deve-se garantir que ela não seja afetada pelo tratamento, para que se possa fazer uso de tal análise. Como exemplo tem-se uma situação em que existem animais de pesos diferentes e a variável resposta de interesse é o peso final dos animais. Neste caso, antes do início do experimento, o peso inicial dos animais é obtido e utilizado como covariável no experimento.

Dentre os principais usos da ANCOVA, Cochran (1957) destaca: aumentar a precisão de experimentos randomizados; remover efeitos de variáveis pertubadoras em estudos observacionais; esclarecer a natureza dos efeitos dos tratamentos; ajustar regressões em classificações múltiplas; e analisar dados que possuem *missing data*.

2 MODELO

O modelo linear aditivo, para um dado delineamento experimental, é o mesmo da ANOVA acrescido de termos adicionais para as covariáveis e as pressuposições para o modelo são a soma das pressuposições da ANOVA e da regressão.

Considerando um experimento balanceado com um fator e uma covariável. O modelo estatístico pode ser escrito da seguinte maneira:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, \ldots, a; j = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

em que y_{ij} é a variável resposta, X_{ij} é uma covariável, na qual y_{ij} possui uma regressão linear com o coeficiente de regressão β. As contantes μ e α_i são a média geral e o efeito do i-ésimo tratamento. Os resíduos ε_{ij} são variáveis aleatórias, sobre as quais assume-se independência e distribuição normal com média zero e variância homogênea.

Em geral, um modelo de ANCOVA pode ser escrito como

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{2.2}$$

Considerando, então as an observações de (2.1) tem-se que

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_a \end{bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ \vdots \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{an} \end{bmatrix}$$

e $\boldsymbol{\beta} = \beta$.

Neste caso em que o modelo possui um fator e uma covariável, deve-se verificar se três suposições são atendidas para que a ANCOVA seja bem sucedida:

1. A variável resposta e a covariável estão relacionadas linearmente. Assim, parte do erro no modelo é previsível e pode ser removida para reduzir a variância do erro.

2. Os tratamentos apresentam o mesmo coeficiente angular.

3. A covariável não afeta as diferenças entre as médias dos tratamentos.

A primeira pressuposição pode ser checada testando $H_0 : \beta = 0$, em que β é o coeficiente angular da regressão da variável dependente sobre a covariável. A segunda proessuposição pode ser checada testando $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_a$, em que β_i é o coeficiente angular do i-ésimo tratamento. E a terceira pressuposição pode ser checada realizando uma ANOVA sobre a covariável.

Considerando agora um experimento balanceado com um fator e q covariáveis, o modelo estatístico se torna:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_1 x_{ij1} + \ldots + \beta_q x_{ijq} + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, \ldots, a; j = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Assim, o modelo de ANCOVA apresenta os mesmos $\boldsymbol{Z}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ de (2.2) e $\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$ tem a forma

$$\boldsymbol{X\beta} = \begin{bmatrix} x_{111} & x_{112} & \cdots & x_{11q} \\ x_{121} & x_{122} & \cdots & x_{12q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1a1} & x_{1a2} & \cdots & x_{1aq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_q \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

3 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS

Os parâmetros $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ do modelo descrito em (2.2) podem ser estimados pelo método dos mínimos quadrados. Neste procedimento de estimação deve-se assumir que $\boldsymbol{Z}$ é de posto incompleto, como nos modelos superparametrizados de ANOVA, $\boldsymbol{X}$ é de posto completo como nos modelos de regressão, e que $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ e $cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 I$.

Reescrevendo o modelo $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Z\alpha} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ como

$$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{U\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.1}$$

em que $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}]$ e $\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}$, tem-se o sistema de equações normais para (3.1): $\boldsymbol{U'U\hat{\theta}} = \boldsymbol{U'y}$, que pode ser escrito na forma particionada

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z'} \\ \boldsymbol{X'} \end{bmatrix} [\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}]\boldsymbol{\hat{\theta}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z'} \\ \boldsymbol{X'} \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{3.2}$$

Assim, (3.2) pode ser expressa como dois conjuntos de equações em $\boldsymbol{\hat{\alpha}}$ e $\boldsymbol{\hat{\beta}}$ a seguir.

$$\begin{cases} \boldsymbol{Z'Z\hat{\alpha}} + \boldsymbol{Z'X\hat{\beta}} = \boldsymbol{Z'y} \\ \boldsymbol{X'Z\hat{\alpha}} + \boldsymbol{X'X\hat{\beta}} = \boldsymbol{X'y} \end{cases}$$

Como as colunas da matriz $\boldsymbol{Z}$ são linearmente dependentes, a inversa de $\boldsymbol{Z'Z}$ não é usual. Contudo, através da inversa generalizada de $\boldsymbol{Z'Z}$, o parâmetro $\boldsymbol{\alpha}$ pode ser estimado por

$$\boldsymbol{\hat{\alpha}} = (\boldsymbol{Z'Z})^{-1}\boldsymbol{Z'y} - (\boldsymbol{Z'Z})^{-1}\boldsymbol{Z'X\hat{\beta}} = \boldsymbol{\hat{\alpha}_0} - (\boldsymbol{Z'Z})^{-1}\boldsymbol{Z'X\hat{\beta}} \tag{3.3}$$

Substituindo a solução (3.3) no sistema, é possível estimar o parâmetro $\boldsymbol{\hat{\beta}}$:

$$\boldsymbol{\hat{\beta}} = [\boldsymbol{X'(I-P)X}]^{-1}\boldsymbol{X'(I-P)y} = R(x^2)^{-1}R(xy) \tag{3.4}$$

em que $\boldsymbol{P = Z(Z'Z)^{-1}Z'}$, $R(x^2) = \boldsymbol{X'(I-P)X}$ e $R(xy) = \boldsymbol{X'(I-P)y}$.

4 ANÁLISE DE VARIÂNCIA E TESTE F

A fim de testar as suposições mencionadas sobre a ANCOVA, primeiramente deve-se prosseguir com a ANOVA e, em seguida, realizar o ajuste pela regressão.

Considerando um experimento em delineamento inteiramente casualizado com um fator e uma covariável, conforme o modelo (2.1), inicialmente deve-se fazer os cálculos da ANOVA para a variável resposta Y de maneira usual. Mas é preciso fazer cálculos análogos também para a variável X e para os produtos XY, como pode-se observar na Tabela 4.1 abaixo (Gomes, 1987).

Tabela 4.1. Tabela da ANOVA.

FV	GL	SQ		SP
		X	Y	XY
Tratamento	$a-1$	$SQTrat(X)$	$SQTrat(Y)$	$SPTrat$
Resíduo	$a(n-1)$	$R(x^2)$	$R(y^2)$	$R(xy)$
Total	$an-1$	$SQT(X)$	$SQT(Y)$	SPT

Em que

$$SQT(Y) = \sum_{ij}^{an} y_{ij} - \frac{(y_{..})^2}{an}$$

$$SQT(X) = \sum_{ij}^{an} x_{ij} - \frac{(x_{..})^2}{an}$$

$$SPT = \sum_{ij}^{an} x_{ij}y_{ij} - \frac{(x_{..})(y_{..})}{an}$$

$$SQTrat(Y) = \sum_{i}^{a} \frac{y_{i.}}{n} - \frac{(y_{..})^2}{an}$$

$$SQTrat(X) = \sum_{i}^{a} \frac{x_{i.}}{n} - \frac{(x_{..})^2}{an}$$

$$SPTrat = \sum_{i}^{a} \frac{(y_{i.})(x_{i.})}{n} - \frac{(x_{..})(y_{..})}{an}$$

As somas de quadrados e produtos dos resíduos são encontradas por diferença (total − tratamento).

Com esses resultados é possível calcular as estimativas do coeficiente de regressão $\hat{\beta}$ e do coeficiente de correlação r.

$$\hat{\beta} = \frac{R(xy)}{R(x^2)}$$

$$r = \frac{R(xy)}{\sqrt{R(x^2)R(y^2)}}$$

Esse valor de r pode ser testado pelo teste de t:

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{a(n-1)-1}$$

.

A seguir, pode-se calcular a soma de quadrados da regressão linear (SQRT):

$$SQRL = \frac{(R(xy))^2}{R(x^2)}$$

.

De acordo com GOMES (1987), para obter as somas de quadrados dos tratamentos ajustada de acordo com a regressão, deve ser aplicado o método do resíduo condicional. Para isto, deve-se somar as somas dos produtos do resíduo às somas correspondentes a tratamentos, o que equivale à SQT neste delineamento.

Sendo assim, a Tabela 4.2 apresenta a ANOVA com o ajustamento relativo à regressão, representado por um asterisco.

Tabela 4.2. Tabela da ANCOVA.

Ajuste pela regressão				
FV	GL	SQ	QM	Fc
Tratamento	$a-1$	$SQTrat* = SQT * - SQR*$	$QMTrat* = \dfrac{SQTrat*}{a-1}$	$\dfrac{QMTrat*}{QMR*}$
Resíduo	$a(n-1)-1$	$SQR* = R(y^2) - SQRL$	$QMR* = \dfrac{SQR*}{a(n-1)-1}$	
Total	$an-2$	$SQT* = SQT(Y) - \dfrac{(SQT(XY))^2}{SQT(X)}$		

Face ao exposto, as três suposições podem ser testadas:

1. Hipótese $H_0 : \beta = 0$:

$$F_1 = \frac{SQRL}{\dfrac{SQR*}{a(n-1)-1}} \tag{4.1}$$

2. Hipótese $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_a$:

$$F_2 = \frac{\dfrac{\sum_i^a \dfrac{R(xy)_i^2}{R(x^2)_i} - \dfrac{\boldsymbol{R(xy)}^2}{\boldsymbol{R(x^2)}}}{a-1}}{\dfrac{R(y^2) - (\boldsymbol{R(xy)})'\hat{\boldsymbol{\beta}}}{a(n-2)}} \tag{4.2}$$

em que $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{R(x^2)}^{-1}\boldsymbol{R(xy)}$.

3. Hipótese $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_a = 0$ ajustada para a covariável:

$$F_3 = \frac{QMTrat*}{QMR*} \tag{4.3}$$

5 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Um experimento foi conduzido em delineamento inteiramente casualizado com o intuito de comparar três tipos de máquinas utilizadas na produção de fios de algodão. Foi medida a resistência dos fios de algodão de modo que a resposta avaliada foi o comprimento (cm) que o fio atingiu antes de se romper. Como cada fio possui um diâmetro diferente, e isso afeta a resistência, utilizou-se essa informação como covariável. Na Tabela 5.1 podem ser observados os dados.

Tabela 5.1. Comprimento (Y) e diâmetro (X), ambos em cm, de fios de algodão produzidos por três tipos de máquinas.

	Máquina 1		Máquina 2		Máquina 3	
Observação	Y	X	Y	X	Y	X
1	36	20	40	22	35	21
2	41	25	48	28	37	23
3	39	24	39	22	42	26
4	42	25	45	30	34	21
5	49	32	44	28	32	15
Total	207	126	216	130	180	106

5.1 Modelo

O modelo estatístico desse exemplo é:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, \ldots, a; j = 1, \ldots, n,$$

em que y_{ij} o comprimento (cm), X_{ij} é o diâmetro de cada fio de algodão, β é o coeficiente de regressão linear. As contantes μ e α_i são a média geral e o efeito da i-ésima máquina, e ε_{ij} é o erro experimental.

O modelo de ANCOVA é

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Z\alpha} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

em que

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 20 \\ \vdots \\ 32 \\ \vdots \\ 28 \\ \vdots \\ 15 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

5.2 Estimação dos Parâmetros

Primeiramente foi calculada a matriz $\boldsymbol{P}$ a fim de calcular as somas de quadrados e produtos dos resíduos matricialmente:

$$R(x^2) = \boldsymbol{X'(I - P)X} = 195,6$$

$$R(xy) = \boldsymbol{X'(I-P)y} = 186,6$$

$$R(y^2) = \boldsymbol{y'(I-P)y} = 206$$

Em seguida foi calculado $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, utilizando (3.4), e $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$, utilizando (3.3):

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = 0,954$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} 12,883 \\ 4,477 \\ 5,513 \\ 2,893 \end{bmatrix}$$

Foi calculado também o coeficiente de correlação $r = 0,93$ e realizado o teste t para $H_0 = \rho = 0$, que obteve valor-$p <$ 0,0001 indicando haver uma forte correlação positiva entre o diâmetro e o comprimento que o fio de algodão atingiu antes de se romper.

5.3 Análise de Variância e Teste F

Através das fórmulas da seção (4), foi construída a Tabela 5.2 com os cálculos para a variável X, a variável Y e para o produto XY.

Tabela 5.2. Tabela da ANOVA.

FV	GL	SQ		SP
		X	Y	XY
Máquinas	2	66,13	140,40	96,00
Resíduo	12	195,60	206,00	186,60
Total	14	261,73	346,40	282,60

Na sequência foi calculada a soma de quadrados da regressão linear e aplicado o método do resíduo condicional para encontrar a soma de quadrados dos tratamentos ajustada pela covariável.

$$SQRL = \frac{(R(xy))^2}{R(x^2)} = \frac{(186,6)^2}{195,6} = 178,014$$

$$SQT* = SQT(Y) - \frac{(SQT(XY))^2}{SQT(X)} = 346,4 - \frac{(282,6)^2}{261,73} = 41,27$$

$$SQR* = R(y^2) - SQRL = 206 - 178,014 = 27,99$$

$$SQTrat* = SQT * -SQR* = 41,27 - 27,99 = 13,28$$

$$QMTrat* = \frac{SQTrat*}{a-1} = \frac{13,28}{2} = 6,64$$

$$QMR* = \frac{SQR*}{a(n-1)-1} = \frac{27,99}{11} = 2,54$$

$$\frac{QMTrat*}{QMR*} = \frac{6,64}{2,54} = 2,61$$

Na Tabela 5.3 encontram-se os resultados da ANOVA após o ajuste relativo à regressão.

Tabela 5.3. Tabela da ANCOVA.

Ajuste pela regressão				
FV	GL	SQ	QM	Fc
Máquinas	2	13,28	6,64	2,61
Resíduo	11	27,99	2,54	
Total	13	41,27		

Assim, a tabela da ANCOVA está apresentada na Tabela 5.4

Tabela 5.4. Tabela da ANCOVA.

Ajuste pela regressão					
FV	GL	SQ	QM	Fc	valor-p
Intercepto	1	87,43	87,43	34,37	0,0001
Máquinas	2	13,28	6,64	2,61	0,1181
Diâmetro	1	178,01	178,01	69,97	<0,0001
Resíduo	11	27,99	2,54		

Avaliando a hipótese $H_0 : \beta = 0$, verifica-se que existem evidências para rejeitar H_0, pois o valor-p foi menor que pelo menos 5% de significância ($p < 0,0001$), logo existe uma relação linear significativa entre o diâmetro do fio do algodão e o comprimento que o fio atingiu antes de se romper.

Avaliando a hipótese $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, verifica-se que não existem evidências para rejeitar H_0, pois o valor-p foi maior que 5% de significância ($p < 0,1181$), logo não existe diferença entre as resistências dos fios de algodão produzidos pelas três máquinas.

Para avaliar a hipótese $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$, foram estimados $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ e $\hat{\beta}_3$ e foi realizado o teste F conforme (4.2).

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,104 \\ 0,857 \\ 0,864 \end{bmatrix}$$

Foi encontrado $Fc = 0,49$ que proporciona um valor-p = 0,6293. Logo, não existem evidências para rejeitar H_0, pois o valor-p foi maior que 5% de significância. Assim, é possível concluir neste caso que não há interação das máquinas com o diâmetros dos fios de algodão. A não rejeição da hipótese H_0 é um indicativo de que as 3 retas de regressão são paralelas.

REFERÊNCIAS

Cochran, W. G., 1957 Analysis of covariance: Its nature and uses. Biometrics **13**: 261–281.

Fisher, R. A., 1934 *Statistical Methods for Research Workers*. Oliver and Boyld Ltd.

Gomes, F. P., 1987 *Curso de estatística experimental*. Livraria Nobel S.A, São Paulo, 12th edition.

Zelen, M., 1957 The analysis of covariance for incomplete block designs. Biometrics **13**: 309–332.

APÊNDICES

Programas - R

```
##############################
# Leitura dos dados
##############################
dados=read.table("cov.R",h=T)
attach(dados)
dados$maq<−as.factor(dados$maq)
str(dados)

# Gráfico que relaciona a variável resposta e a covariável
with(dados, plot(resp ~ cov, col = c(1, 2, 4)[maq], pch = (1:3)[maq], xlab="Diâmetro (cm)",
    ylab="Comprimento (cm)"))
##############################


##############################
# Estimação dos parâmetros

a=3
n=5

# Matriz delineamento
col1=c(rep(1,n a))
col2=c(rep(1,n), rep(0,2 n))
col3=c(rep(0,n), rep(1,n), rep(0,n))
col4=c(rep(0,2 n), rep(1,n))
Z=cbind(col1,col2,col3,col4)

# Vetor de covariáveis e variável dependente
X=dados$cov
Y=dados$resp

library(MASS)

# Matriz P
P=Z% %ginv(crossprod(Z))% %t(Z)
I=diag(a n)

# Soma de quadrados e produtos dos resíduos
Rx2=t(X)% %(I−P)% %X
Rxy=t(X)% %(I−P)% %Y
Ry2=t(Y)% %(I−P)% %Y

# Estimativa de Beta
```

```
beta=solve(Rx2)%  %Rxy

# Estimativa de Alfa
alfa=ginv(crossprod(Z))%  %t(Z)%  %Y − ginv(crossprod(Z))%  %t(Z)%  %X%  %beta

# Coeficiente de correlação
r=Rxy/sqrt(Rx2  Ry2)
tc=(r/sqrt(1−rˆ2))  sqrt(a  (n−1)−1)
1−pt(tc,(a  (n−1)−1))
###############################


###############################
# Teste para efeito  de tratamentos ajustado

# Soma de Quadrados de Resíduo (modelo reduzido)
SQR.aj=Ry2 − ((Rxyˆ2)/Rx2)

# Soma de Quadrados Total (modelo completo)
modelo.r=lm(resp˜cov)
h=model.matrix(modelo.r)
H=h%  %solve(crossprod(h))%  %t(h)
SQT.aj=t(Y)%  %(I−H)%  %Y

# Soma de quadrados Tratamento ajustado
SQA=SQT.aj−SQR.aj
F1=(SQA/(a−1))/(SQR.aj/ ((a  (n−1))−1))
###############################


###############################
# Teste sobre a inclinação
SQRL=(((Rxy)ˆ2)/Rx2)
F2=SQRL/(SQR.aj/(a  (n−1)−1))
###############################

###############################
# Teste para homogeneidade de inclinações
X2=matrix(c(dados[1:5,2], rep(0,a  n), dados [6:10,2],  rep(0,a  n),  dados [11:15,2]) ,a  n,  byrow=F)
R1x2=t(X2)%  %(I−P)%  %X2
R1xy=t(X2)%  %(I−P)%  %Y
R1y2=t(Y)%  %(I−P)%  %Y
beta1=solve(R1x2)%  %R1xy
SQF=R1y2−(t(R1xy)%  %beta1)
F3=((SQR.aj−SQF)/2)/(SQF/(a  (n−2)))
qf (0.95,2,9)
1−pf(F3,2,9)
```

```
##############################
# UTILIZANDO FUNÇÕES PRONTAS
##############################

# Teste sobre a inclinação da reta de regressão
dados.cov<-aov(resp ~ maq + cov, data = dados)
summary(dados.cov)
##############################


##############################
# Teste sobre o efeito do tratamento ajustado
dados.trat<-aov(resp ~ cov + maq, data = dados)
summary(dados.trat)
##############################


##############################
# Análise de Covariância
require(car)
Anova(dados.cov, type = "III")
# ou
Anova(dados.trat, type = "III")
##############################
```