

Análise de Covariância

Pórtia Piscitelli Cavalcanti

Universidade de São Paulo

Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"

Sumário

Introdução

Modelo

Estimação dos parâmetros

Análise de Variância e teste F

Exemplo de Aplicação

Introdução

- ▶ Fatores que influenciam o experimento.
- ▶ Controle local.
- ▶ Medição de fatores relevantes para a precisão do experimento.

Análise de Covariância (ANCOVA)

ANCOVA

- ▶ Fisher (1934)
- ▶ Ajuste do efeito de uma variável resposta que sofreu influência de uma FV não controlada.
- ▶ Análise de variância (ANOVA) e regressão.

Principais usos

- ▶ Aumentar a precisão de experimentos.
- ▶ Remover efeitos de variáveis perturbadoras.
- ▶ Esclarecer a natureza dos efeitos dos tratamentos.

Covariável

- ▶ Variável auxiliar ou concomitante.
- ▶ Uma ou mais covariáveis.
- ▶ Necessita estar correlacionada com a variável resposta.
- ▶ Não afetada pelo tratamento.
- ▶ **Exemplo:** pesos de animais.

Sumário

Introdução

Modelo

Estimação dos parâmetros

Análise de Variância e teste F

Exemplo de Aplicação

Modelo

- DIC com uma covariável

Modelo estatístico

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, a; j = 1, \dots, n,$$

Modelo ANCOVA

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Modelo

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_a \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ \vdots \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{an} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \beta$$

Modelo

Suposições

1. A variável resposta e a covariável estão relacionadas linearmente. $H_0 : \beta = 0$
2. Os tratamentos com mesmo coeficiente angular.
 $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_a$
3. A covariável não afeta as diferenças entre as médias dos tratamentos.

Sumário

Introdução

Modelo

Estimação dos parâmetros

Análise de Variância e teste F

Exemplo de Aplicação

Estimação dos parâmetros

Reescrevendo o modelo $\mathbf{y} = \mathbf{Z}\alpha + \mathbf{X}\beta + \varepsilon$ como

$$\mathbf{y} = [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \varepsilon = \mathbf{U}\theta + \varepsilon$$

em que $\mathbf{U} = [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]$ e $\theta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

Estimação dos parâmetros

Sistema de equações normais

$$U'U\hat{\theta} = U'y$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}' \\ \mathbf{X}' \end{bmatrix} [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}' \\ \mathbf{X}' \end{bmatrix} y$$

$$\begin{cases} \mathbf{Z}'\mathbf{Z}\hat{\alpha} + \mathbf{Z}'\mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{Z}'y \\ \mathbf{X}'\mathbf{Z}\hat{\alpha} + \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{X}'y \end{cases}$$

Estimação dos parâmetros

Através da inversa generalizada de $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$,

$$\hat{\alpha} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y} - (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{X}\hat{\beta} = \hat{\alpha}_0 - (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{X}\hat{\beta}$$

Por substituição de $\hat{\alpha}$ no sistema

$$\hat{\beta} = [\mathbf{X}'(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{X}]^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{y} = R(x^2)^{-1}R(xy)$$

em que $\mathbf{P} = \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'$.

Sumário

Introdução

Modelo

Estimação dos parâmetros

Análise de Variância e teste F

Exemplo de Aplicação

Análise de Variância e teste F

Tabela 1: Tabela da ANOVA.

FV	GL	SQ		SP
		X	Y	XY
Tratamento	$a - 1$	$SQTrat(X)$	$SQTrat(Y)$	$SPTrat$
Resíduo	$a(n - 1)$	$R(x^2)$	$R(y^2)$	$R(xy)$
Total	$an - 1$	$SQT(X)$	$SQT(Y)$	SPT

Análise de Variância e teste F

Com esses resultados é possível calcular $\hat{\beta}$ e a $SQRL$.

$$\hat{\beta} = \frac{R(xy)}{R(x^2)}$$

$$SQRL = \frac{(R(xy))^2}{R(x^2)}$$

- Método do resíduo condicional.

Análise de Variância e teste F

Tabela 2: Tabela da ANCOVA.

FV	GL	Ajuste pela regressão		
		SQ	QM	Fc
Trat.	$a - 1$	$SQTrat* = SQT* - SQR*$	$QMTrat* = \frac{SQTrat*}{a - 1}$	$\frac{QMTrat*}{QMR*}$
Resíduo	$a(n - 1) - 1$	$SQR* = R(y^2) - SQRL$	$QMR* = \frac{SQR*}{a(n - 1) - 1}$	
Total	$an - 2$	$SQT* = SQT(Y) - \frac{(SQT(XY))^2}{SQT(X)}$		

Análise de Variância e teste F

1. Hipótese $H_0 : \beta = 0$:

$$F_1 = \frac{\frac{SQRL}{SQR*}}{a(n-1)-1}$$

2. Hipótese $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0$ ajustada para a covariável:

$$F_3 = \frac{QMTrat*}{QMR*}$$

Análise de Variância e teste F

3. Hipótese $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_a$:

$$F_2 = \frac{\sum_i^a \frac{R(xy)_i^2}{R(x^2)_i} - \frac{R(xy)^2}{R(x^2)}}{\frac{a-1}{\frac{R(y^2) - (R(xy))'\hat{\beta}}{a(n-2)}}}$$

em que $\hat{\beta} = R(x^2)^{-1} R(xy)$.

Sumário

Introdução

Modelo

Estimação dos parâmetros

Análise de Variância e teste F

Exemplo de Aplicação

Exemplo de Aplicação

Tabela 3: Comprimento (Y) e diâmetro (X), ambos em cm, de fios de algodão produzidos por três tipos de máquinas.

Observação	Máquina 1		Máquina 2		Máquina 3	
	Y	X	Y	X	Y	X
1	36	20	40	22	35	21
2	41	25	48	28	37	23
3	39	24	39	22	42	26
4	42	25	45	30	34	21
5	49	32	44	28	32	15
Total	207	126	216	130	180	106

Exemplo de Aplicação

Modelo estatístico

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, 5,$$

Modelo de ANCOVA

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Exemplo de Aplicação

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 20 \\ \vdots \\ 32 \\ \vdots \\ 28 \\ \vdots \\ 15 \end{bmatrix}$$

Exemplo de Aplicação

$$R(x^2) = \mathbf{X}'(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{X} = 195,6$$

$$R(xy) = \mathbf{X}'(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{y} = 186,6$$

$$R(y^2) = \mathbf{y}'(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{y} = 206$$

$$\hat{\beta} = 0,954; \hat{\alpha} = \begin{bmatrix} 12,883 \\ 4,477 \\ 5,513 \\ 2,893 \end{bmatrix}$$

$$r = 0,93 \text{ e valor-}p < 0,0001$$

Exemplo de Aplicação

Tabela 4: Tabela da ANOVA.

FV	GL	SQ		SP
		X	Y	XY
Máquinas	2	66,13	140,40	96,00
Resíduo	12	195,60	206,00	186,60
Total	14	261,73	346,40	282,60

Exemplo de Aplicação

Tabela 5: Tabela da ANOVA.

Ajuste pela regressão				
FV	GL	SQ	QM	Fc
Máquinas	2	13,28	6,64	2,61
Resíduo	11	27,99	2,54	
Total	13	41,27		

Exemplo de Aplicação

Tabela 6: Tabela da ANCOVA.

Ajuste pela regressão					
FV	GL	SQ	QM	Fc	valor-p
Intercepto	1	87,43	87,43	34,37	0,0001
Máquinas	2	13,28	6,64	2,61	0,1181
Diâmetro	1	178,01	178,01	69,97	<0,0001
Resíduo	11	27,99	2,54		

Exemplo de Aplicação

Testando $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$

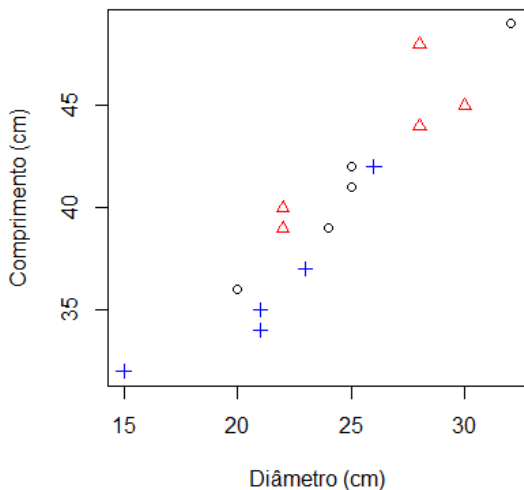
$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,104 \\ 0,857 \\ 0,864 \end{bmatrix}$$

$F_c = 0,49$ e valor- $p = 0,6293$

Exemplo de Aplicação

- ▶ Existe uma relação linear entre o diâmetro do fio do algodão e o comprimento que o fio atingiu antes de se romper.
- ▶ Não existe diferença entre as resistências dos fios de algodão produzidos pelas três máquinas.
- ▶ Não há interação das máquinas com o diâmetros dos fios de algodão.

Exemplo de Aplicação



ANCOVA no R

```
# Teste sobre a inclinação da reta de regressão
dados.Cov<-aov(resp ~ Maq + Cov, data = dados)
summary(dados.Cov)
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Maq	2	140.40	70.20	27.59	5.17e-05 ***
Cov	1	178.01	178.01	69.97	4.26e-06 ***
Residuals	11	27.99	2.54		

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

ANCOVA no R

Teste sobre o efeito do tratamento ajustado

```
dados.trat<-aov(resp ~ Cov + Maq, data = dados)  
summary(dados.trat)
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Cov	1	305.13	305.13	119.933	2.96e-07 ***
Maq	2	13.28	6.64	2.611	0.118
Residuals	11	27.99	2.54		

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

ANCOVA no R

Análise de Covariância

require(car)

Anova(dados.Cov, type = "III")

ou

Anova(dados.trat, type = " III ")

Anova Table (Type III tests)

Response: resp

	Sum Sq	Df	F value	Pr(>F)
(Intercept)	87.434	1	34.3664	0.0001089 ***
Maq	13.284	2	2.6106	0.1180839
Cov	178.014	1	69.9694	4.264e-06 ***
Residuals	27.986	11		

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Referências

Cochran, W. G., 1957 Analysis of covariance: Its nature and uses. *Biometrics* **13**: 261?281.

Fisher, R. A., 1934 *Statistical Methods for Research Workers*. Oliver and Boyd Ltd.

Gomes, F. P., 1987 *Curso de estatística experimental*. Livraria Nobel S.A, São Paulo, 12th edition.

Zelen, M., 1957 The analysis of covariance for incomplete block designs. *Biometrics* **13**: 309?332.

Obrigada!