Física I para Engenharia
IFUSP - 432195
P3 - 18/07/2014

A prova tem duração de 120 minutos. Resolva cada questão na folha correspondente. Use o verso se necessário. Escreva de forma legível, a lápis ou tinta. Seja ético: a prova é individual e sem consulta a anotações ou qualquer outro material.

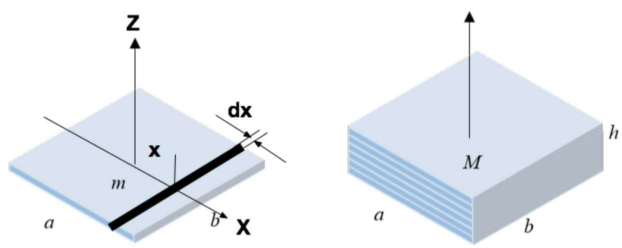
Nome	Assinatura	Nº. USP	Turma

1) Uma placa metálica fina de massa m tem forma retangular com lados a e b. Calcule

a) (1,0) o momento de inércia em relação ao seu centro de massa;

b) (1,0) o momento de inércia em relação a um dos seus vértices

c) (0,5) Suponha agora que foram empilhadas várias dessas placas metálicas formando um conjunto de altura h e de massa total M. Qual é o novo momento de inércia em relação ao centro de massa conforme figura abaixo?



item a   item c

SOLUÇÃO:

a) Vamos usar o teorema dos eixos paralelos e calcular o momento de inércia de uma barra delgada com o eixo de rotação passando a uma distância x do seu centro. Assim sendo podemos escrever que:

$$dI = dI_{CM} + x^2 dm$$

onde dI_{CM} é o elemento infinitesinal do momento de inércia da barra de comprimento b em relação ao seu centro de massa. Podemos então escrever que:

$$dI = \frac{b^2}{12}dm + x^2 dm = \frac{b^2}{12}\sigma b dx + x^2 \sigma b dx$$

$$\begin{aligned} I_{cm} &= \sigma\frac{b^3}{12}\int_{-a/2}^{a/2} dx + \sigma b \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx \\ &= \sigma a\frac{b^3}{12} + \frac{\sigma b}{3}\left(\frac{a}{8}^3 + \frac{a}{8}^3\right) = \frac{\sigma ab}{12}b^2 + \frac{\sigma ab}{12}a^2 = \frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right) \end{aligned}$$

b) Pelo teorema dos eixos paralelos

$$I = I_{cm} + md^2$$

onde d é a distância do eixo ao centro de massa

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right) \end{aligned}$$

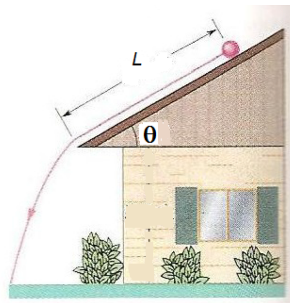
Então

$$\begin{aligned} I &= \frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right)+\frac{m}{4}\left(a^2+b^2\right) \\ &= \frac{m}{3}\left(a^2+b^2\right) \end{aligned}$$

c) A expressao para o momento de inércia não se altera ao se empilhar verticalmente várias placas, sendo apenas necessário usar o novo valor da massa:

$$I_{cm}=\frac{M}{12}\left(a^2+b^2\right)$$

2) Um corpo esférico sólido de raio igual a R e massa de M, parte do repouso e rola, sem deslizar, uma distância de L, descendo o telhado de uma casa, cuja inclinação é igual a θ. Dado $I_{cm}^{\text{esfera}} = \frac{2}{5}MR^2$,



a) (1,0) Qual a aceleração linear do corpo durante o rolamento?

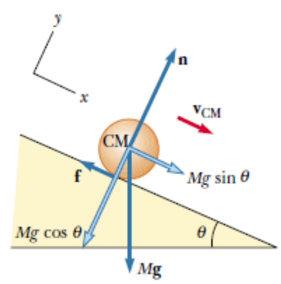
b) (0.5) Qual é a força de atrito f?

c) (0,5) Qual e a velocidade do centro de massa da esfera quando ele sai do telhado?

d) (0,5) Supondo agora que não existe força de atrito, o que acontecerá com a velocidade do centro de massa da esfera quando ela abandona o telhado (aumente, ou diminui e porque?).

SOLUÇÃO:

a)



Do diagrama de forças temos

$$\begin{aligned} \sum F_x &= Mg\sin\theta - f = Ma_{cm} \qquad (1) \\ \sum F_y &= n - Mg\cos\theta = 0 \end{aligned}$$

$$\tau_{cm} = fR = I_{cm}\alpha$$

Como $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$ e $\alpha = a_{cm}/R$, obtemos

$$f = \frac{I_{cm}\alpha}{R} = \frac{\frac{2}{5}MR^2}{R}\frac{a_{cm}}{R} = \frac{2}{5}Ma_{cm}$$

Substituindo na equação 1:

$$a_{cm} = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

b)

$$f = \frac{2}{5} M a_{cm} = \frac{2}{5} M \left(\frac{5}{7} g \sin\theta \right) = \frac{2}{7} M g \sin\theta$$

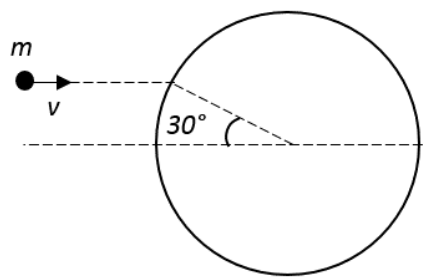
c) É possível resolver pela equação de Torricelli

$$\begin{aligned} v_f &= \sqrt{v_0^2 + 2 a_{cm} \Delta s} \\ &= \sqrt{\frac{10}{7} g L \sin\theta} \end{aligned}$$

ou por conservação de energia

$$\begin{aligned} Mg\,(L \sin\theta) &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} M R^2 \right) \left(\frac{v}{R} \right)^2 \\ g\,(L \sin\theta) &= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right] v^2 \\ \rightarrow v &= \sqrt{\frac{10}{7} g L \sin\theta} \end{aligned}$$

3) Uma bala de massa m é disparada com velocidade v contra um disco homogêneo de massa M e raio R, inicialmente parado, que se encontra deitado sobre uma superfície horizontal lisa sem atrito. Suponha que a bala atinja o disco como indicado na figura e fique retida na superfície do disco. Considere que o centro de massa do sistema (disco + bala) após a colisão coincide com o centro do disco. Dado: $I_{cm}^{disco} = \frac{1}{2}MR^2$



a) (0,5) Qual é a velocidade do centro de massa do disco após a colisão?
b) (1,0) Qual é a velocidade angular do sistema (disco + bala) após a colisão?
c) (1,0) Qual é a variação de energia do sistema devido à colisão?
———-

Solução:

a) Trata-se de uma colisão inelástica, portanto são conservados apenas a quantidade de momento linear e angular:

$$
\begin{aligned}
mv &= (m+M)\, v_{cm} \\
R\sin\theta mv &= I\omega = \frac{1}{2}(M+2m)\, R^2\omega
\end{aligned}
$$

$$v_{cm} = \frac{m}{m+M}v$$

b)

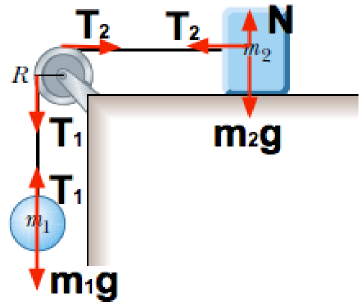
$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{R\sin\theta m}{\frac{1}{2}(M+2m)\, R^2}v \\
&= 2\frac{m\sin\theta}{(M+2m)\, R}v
\end{aligned}
$$

Note que era possível assumir ainda que, como $m \ll M$, então $I^{\text{disco+m}} = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 \approx \frac{1}{2}MR^2$.

c)

$$
\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{1}{2}mv^2 - \left[\frac{1}{2}(m+M)\, v_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right] \\
&= \left\{\frac{1}{2}m - \left[\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(M+2m)\, R^2\left(2\frac{m\sin\theta}{(M+2m)\, R}\right)^2\right]\right\}v^2 \\
&= \left\{m - \left[\left(\frac{m^2}{m+M}\right) + 2\frac{m^2\sin^2\theta}{(M+2m)}\right]\right\}\frac{1}{2}v^2 \\
&= \left\{1 - \left[\left(\frac{m}{m+M}\right) + 2\frac{m\sin^2\theta}{(M+2m)}\right]\right\}\frac{1}{2}mv^2
\end{aligned}
$$

4) Uma esfera de massa m_1 e um bloco de massa m_2 estão conectados por uma corda de massa depressível que passa por uma polia como mostrado na figura abaixo. O raio da polia é R e o momento de inércia em relação a seu eixo de rotação é I. O bloco m_2 desliza sobre uma superfície horizontal sem atrito.



a) (1,0) Determinar aceleração linear sofrida pelos objetos

b) (0,5) Determinar as acelerações angular αsofrida pela polia

d) (1,0) Calcule a velocidade angular da polia quando a esfera, que parte do repouso, estiver descido uma altura h.

———-

Solução:

a)A figura acima mostra as forças que atuam no sistema. Portanto podemos escrever que:

$$
\begin{array}{c}
+\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_2 = m_2 a \end{cases} \\
\hline
m_1 g + (T_2 - T_1) = a\,(m_1 + m_2)
\end{array}
$$

Torque.

$$\tau = R\,(T_1 - T_2) = I\alpha \Rightarrow (T_1 - T_2) = \frac{I\alpha}{R} = \frac{Ia}{R^2}$$

Então

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + I/R^2}$$

b) A relação entre a aceleração angular e a linear é dada por

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{a}{R} \\
&= \frac{m_1 g}{R\,(m_1 + m_2) + I/R}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{a}{R} \\
&= \frac{m_1 g}{R\,(m_1 + m_2) + I/R}
\end{aligned}
$$

Note que apenas torques externos contribuem para a alteração do momento angular do sistema. Assim, a força que a corda exerce sobre os objetos são "internas" em relação ao sistema que estamos considerando e portanto elas não exercem torque líquido sobre o eixo.

c)

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{2hm_1 g}{m_1 + m_2 + I/R^2}}$$

Então

$$\omega = \sqrt{\frac{2hm_1 g}{R^2 \left(m_1 + m_2\right) + I}}$$