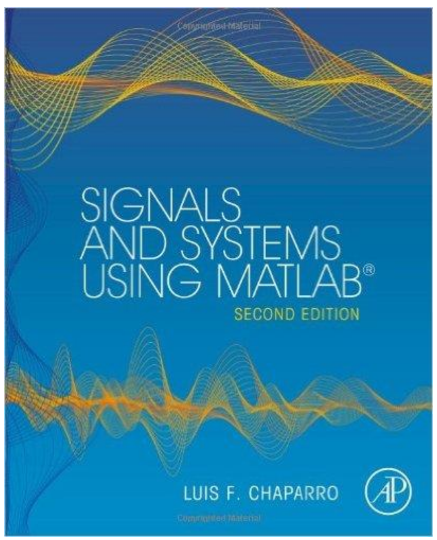
AMOSTRAGEM

Larissa Driemeier

LIVRO TEXTO

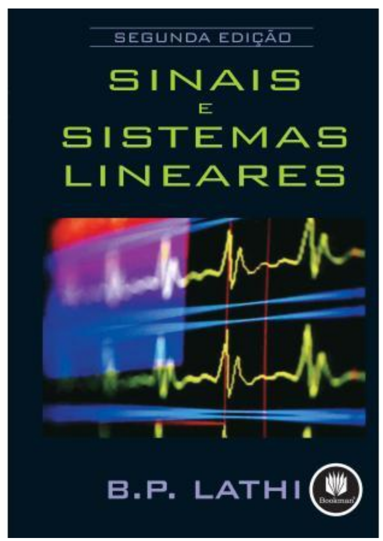
Essa aula é baseada nos livros:

[1]



2nd ed – 2015

[2]



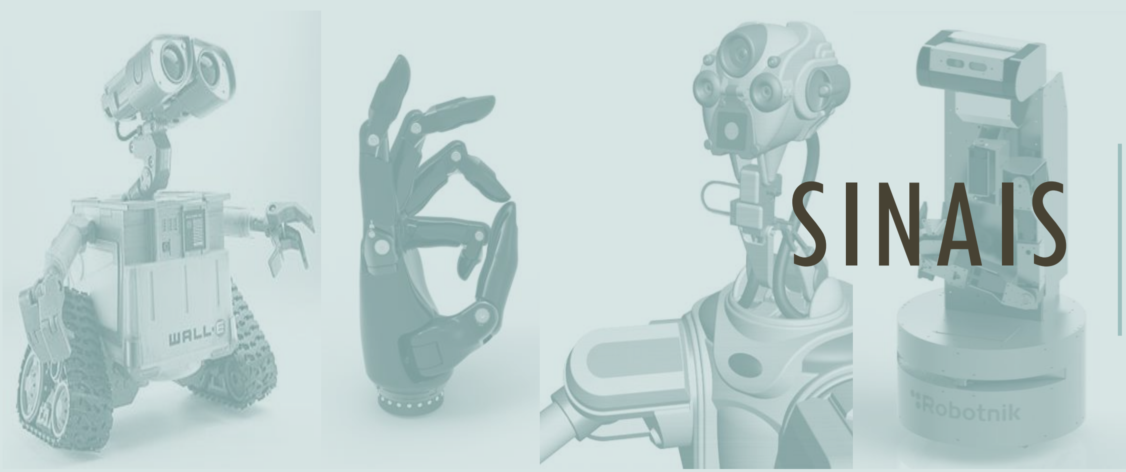
2nd ed – 2007

[3]

INTRODUCTION TO
Signal
Processing
Sophocles J. Orfanidis
Rutgers University

http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/intro2sp

Download gratuito da internet



SINAIS

Digital vs analógico

ANALÓGICO VS DIGITAL

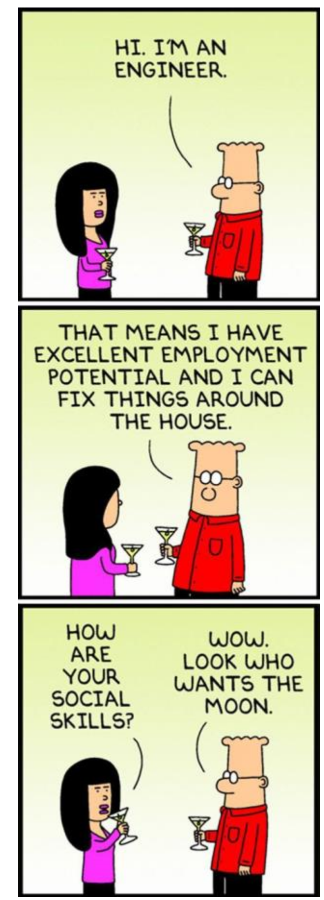
Vivemos em um mundo analógico, dinâmico e não linear!!!!

https://cdn.sparkfun.com

MODELO

"Engineering is the art of molding materials we don't wholly understand, into shapes we can't fully analyze, so as to withstand forces we can't really assess, in such a way that the community at large has no reason to suspect the extent of our ignorance." ...

James E. Amrhein - Masonry Institute of America (Retired) (talk), September 2009 (UTC)



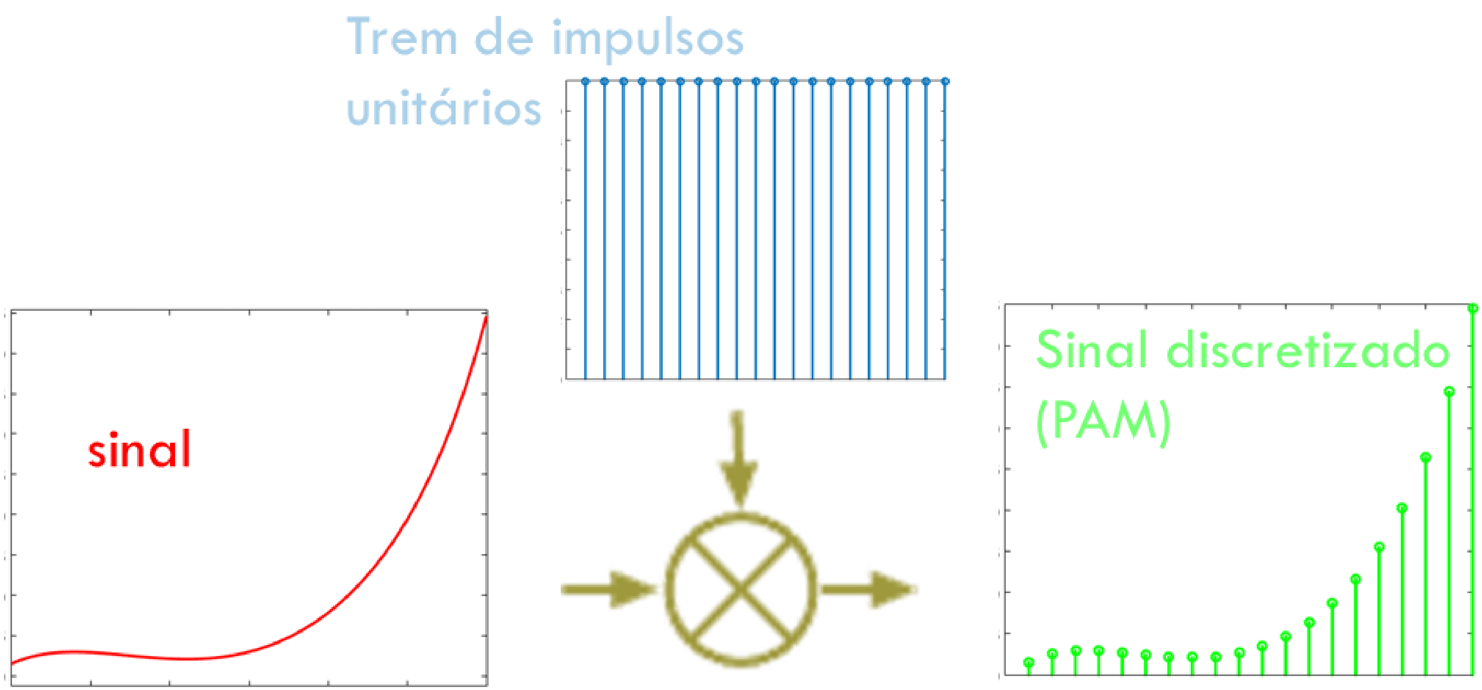
AMOSTRAGEM

"Amostragem é a ponte entre os mundos do contínuo e do discreto"

Lathi, 2007

AMOSTRAGEM

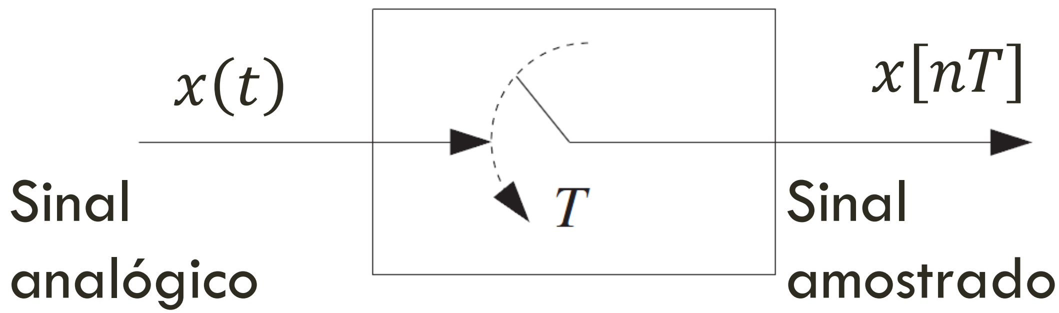
Discretização temporal do sinal analógico original



Impulsos medidos e guardados como sinais amostrados

..., 3.44, 4.67 , 6.39 , 8.69, ...

Amostrador ideal



COMO ESCOLHER A FREQUÊNCIA DE AMOSTRAGEM????

DOMÍNIO DO TEMPO

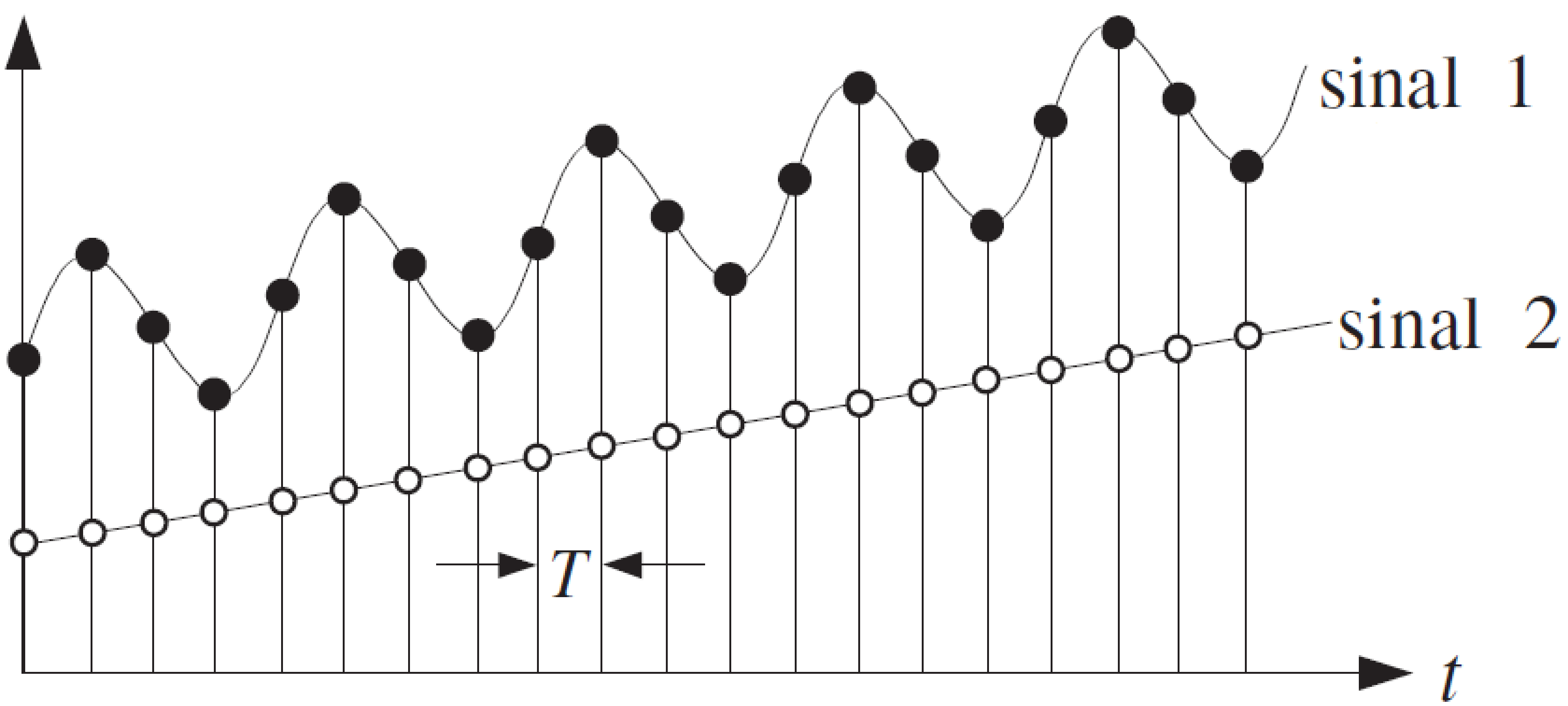
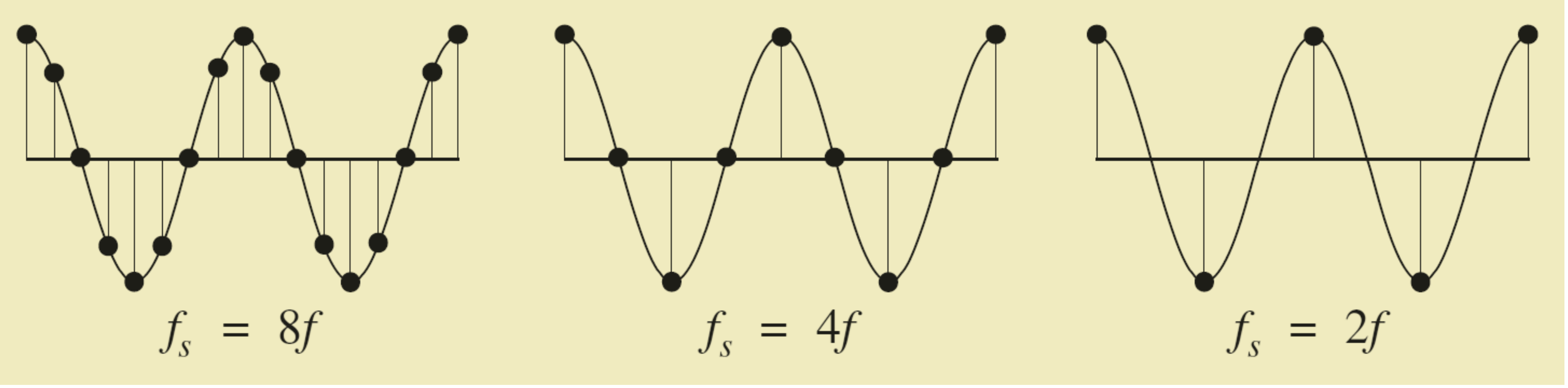


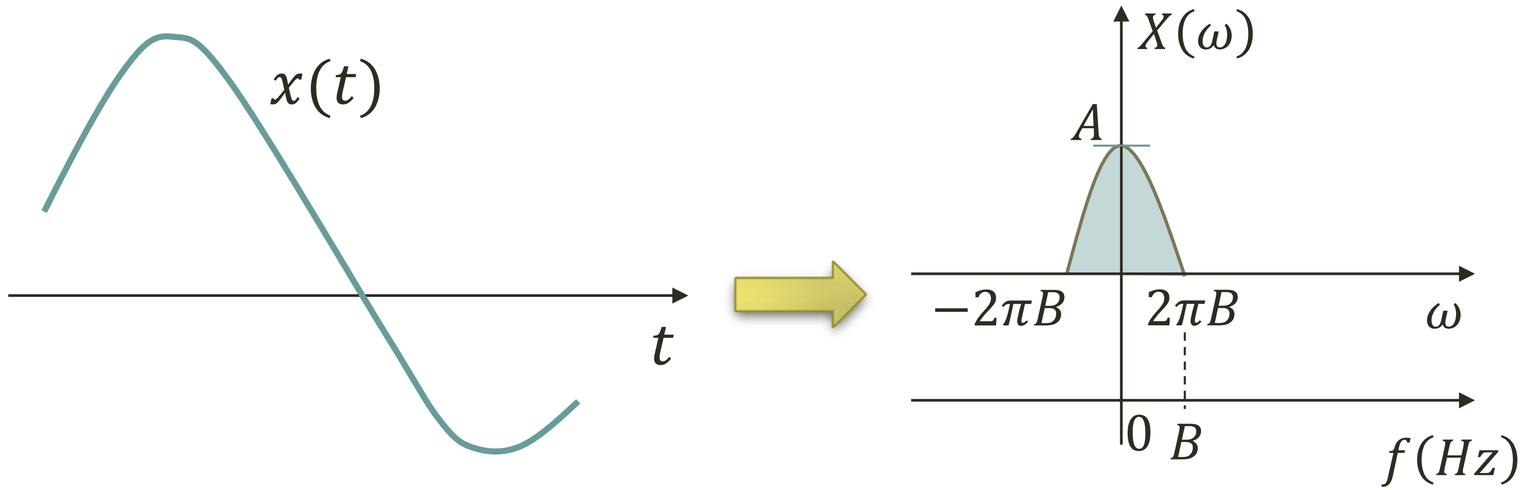
Figura extraída de [3]

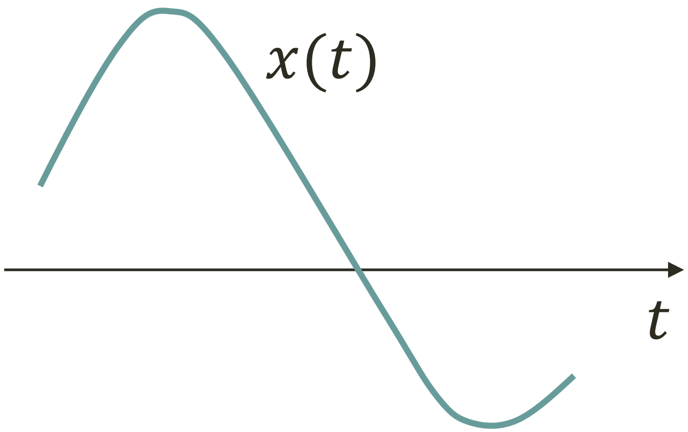
AMOSTRAGEM DE SENOIDES

$$x(t) = \cos \omega t = \cos 2\pi f t$$

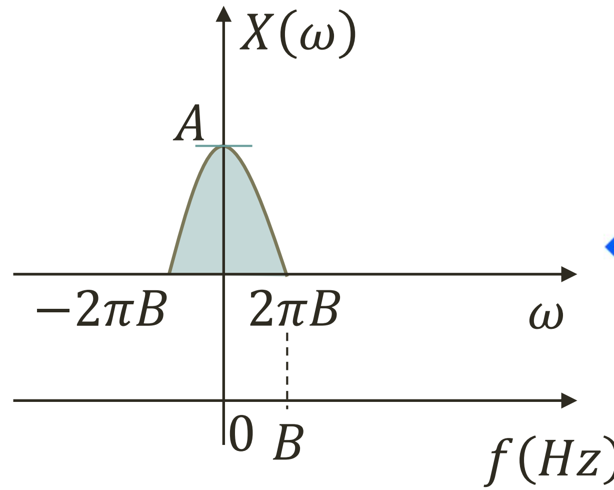


DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

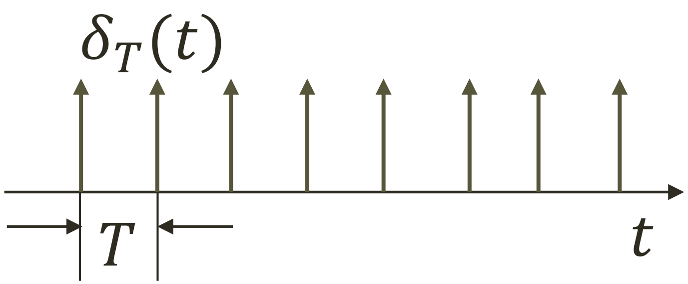




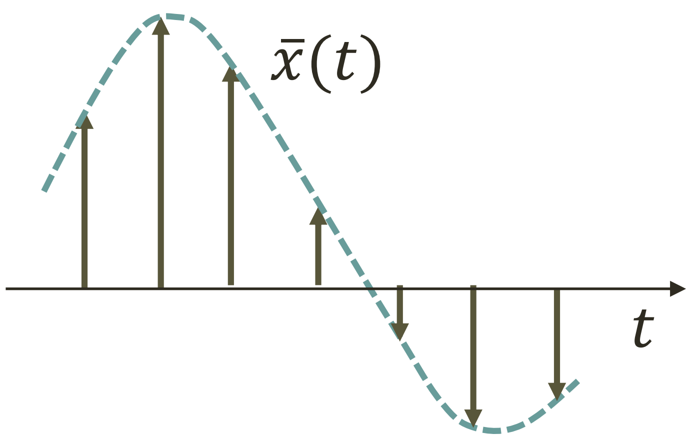
$x(t)$
t



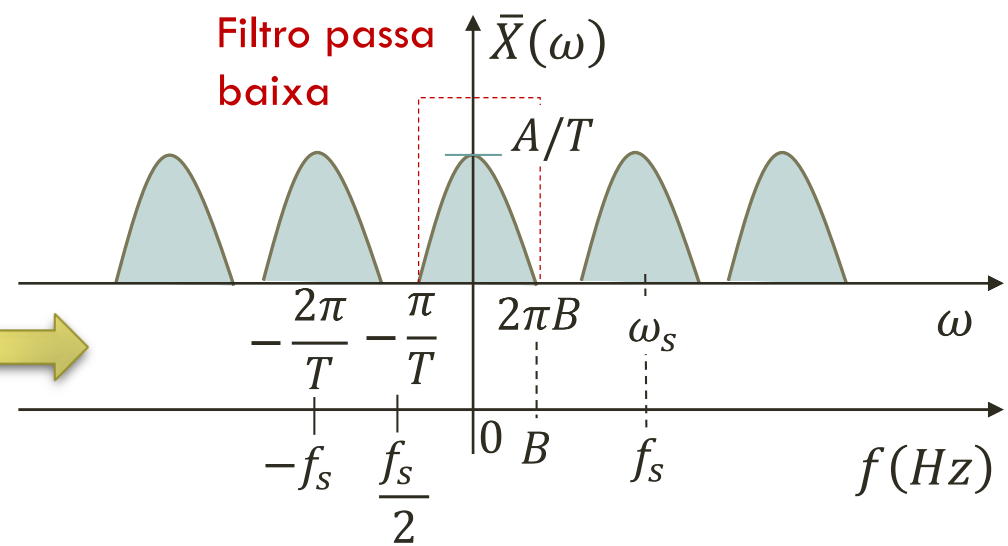
$X(\omega)$
A
$-2\pi B$
$2\pi B$
ω
0
B
$f\,(Hz)$



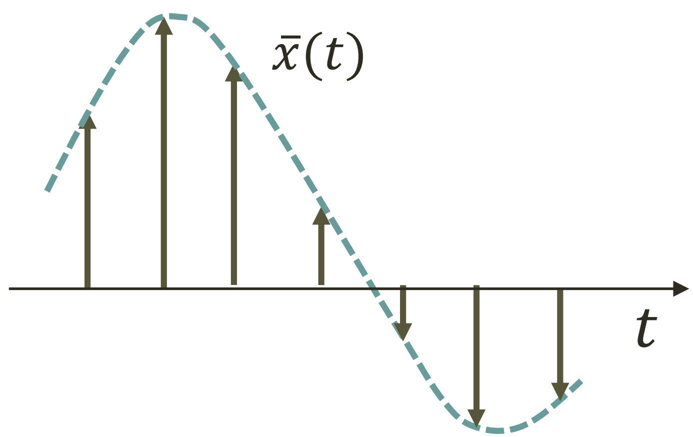
$\delta_T(t)$
T
t



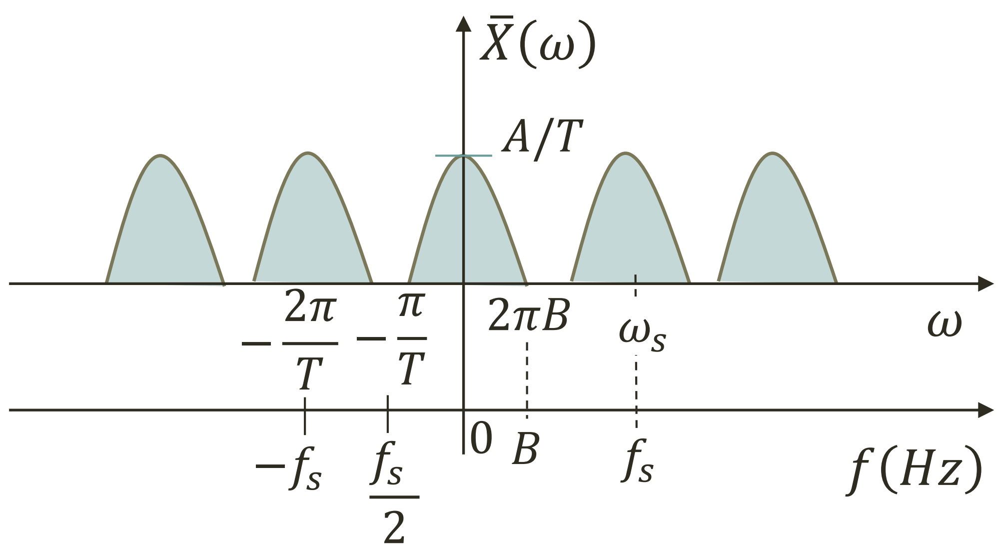
$\bar{x}(t)$
t



Filtro passa baixa
$\bar{X}(\omega)$
A/T
$-\frac{2\pi}{T}$
$-\frac{\pi}{T}$
$2\pi B$
ω_s
ω
$-f_s$
$\frac{f_s}{2}$
0
B
f_s
$f\,(Hz)$

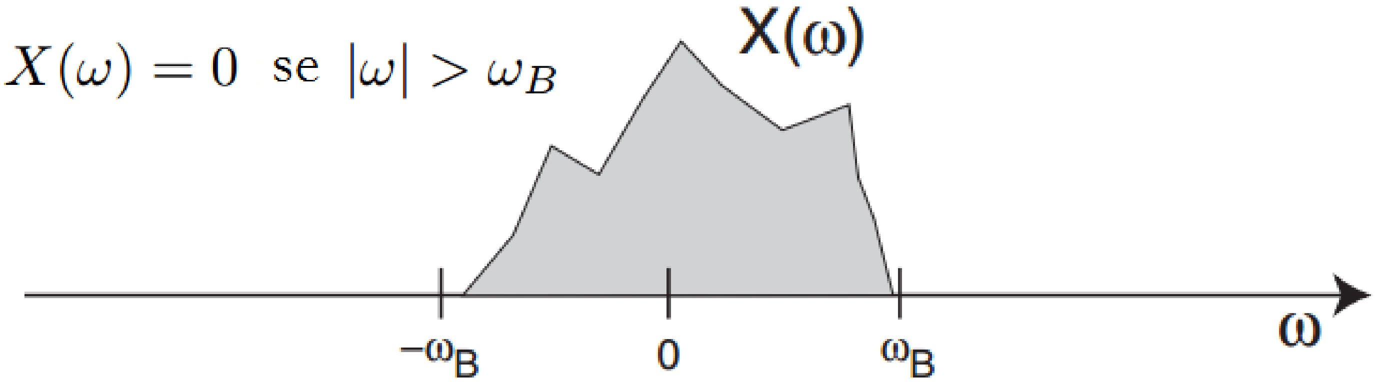


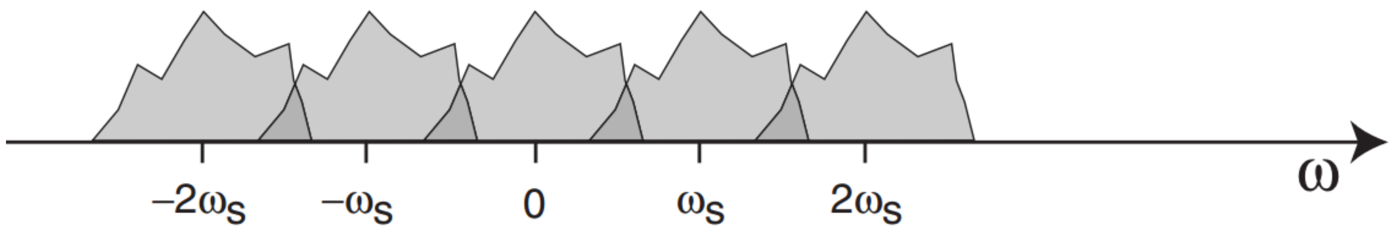
$$\bar{x}(t) = x(nT) = x(t)\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_0)$$



$$\bar{X}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

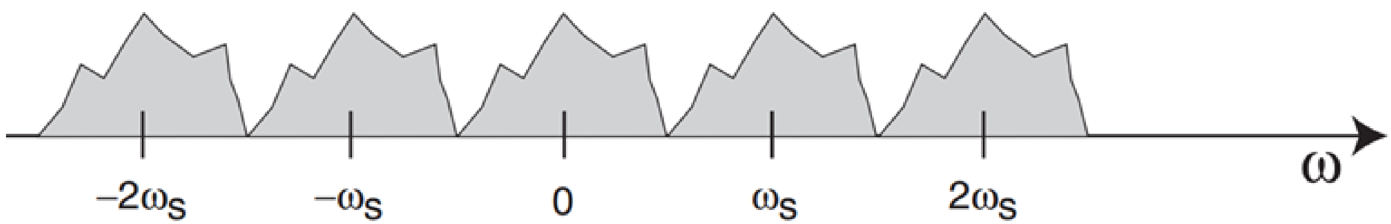
$$X(\omega) = 0 \text{ se } |\omega| > \omega_B$$





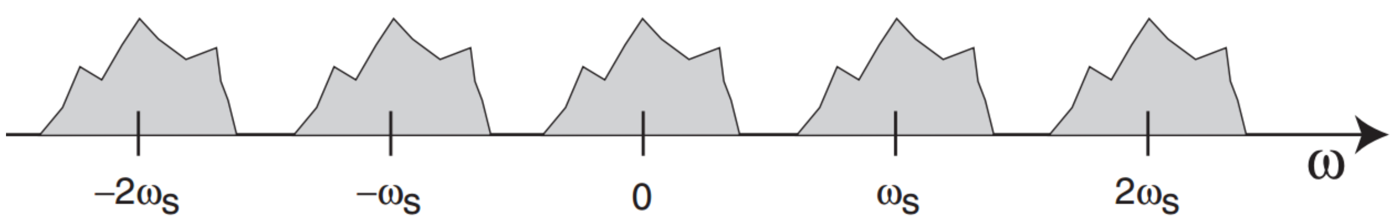
$$f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} \ll B$$

Subamostragem



$$f_s = B$$

Frequência de Nyquist



$$f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} \gg B$$

Superamostragem

TEOREMA DA AMOSTRAGEM

Se um sinal analógico $x(t)$ tem banda limitada, ou seja, se a frequência mais elevada do sinal é B ou seja,

$$X(\omega) = 0 \text{ para } |f| > B,$$

então, é suficiente uma amostragem a qualquer taxa

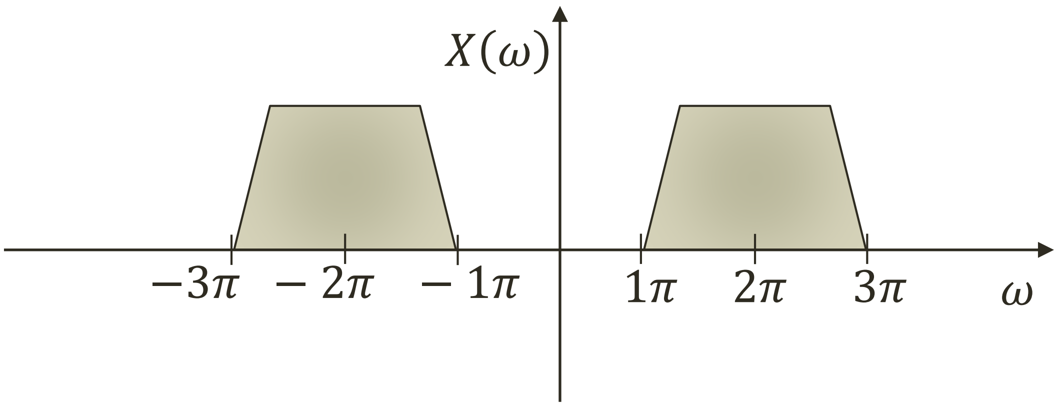
$$f_s > 2B$$

TESTE...

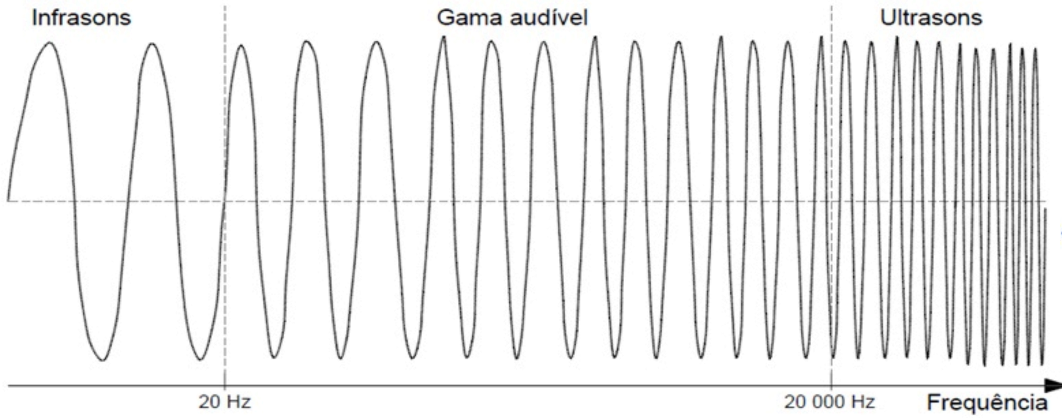
Encontre T_s máximo para correta amostragem de $x(t)$,

A. $x(t) = \sin(2\pi t) + \cos(5\pi t + 0{,}1) + \cos(\pi t)$

B.



ENTÃO...



Os sons audíveis pelo ouvido humano têm uma frequência entre 20Hz e 20kHz.

Qual o intervalo máximo de amostragem T_s que podemos usar para amostrar um sinal sem perda de informação audível?

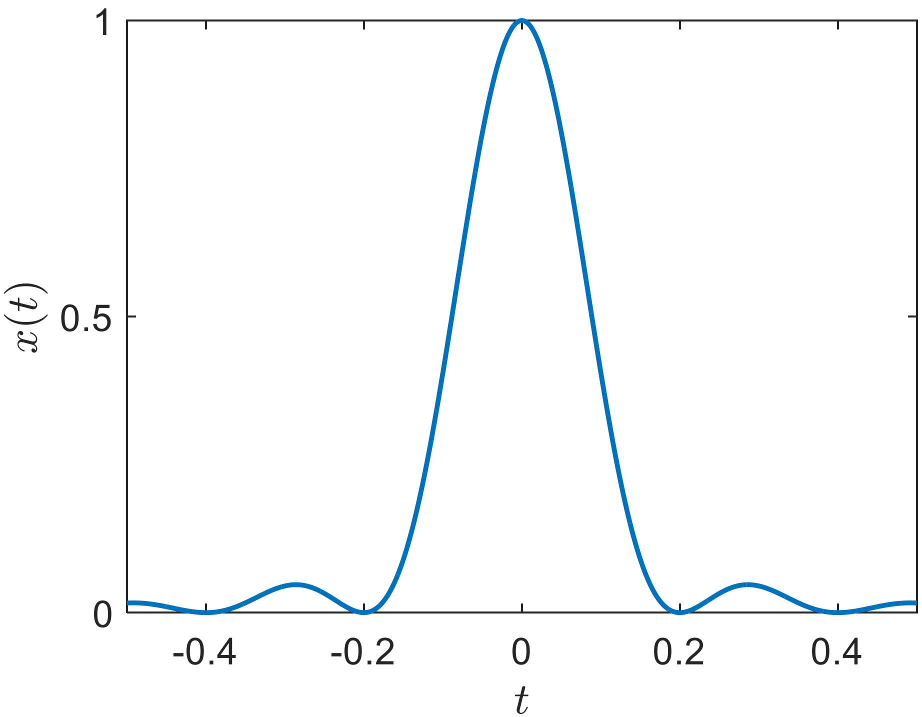
A. 100 μs
B. 50 μs
C. 25 μs
D. $100\pi\ \mu s$
E. $50\pi\ \mu s$
F. $25\pi\ \mu s$

EXEMPLO

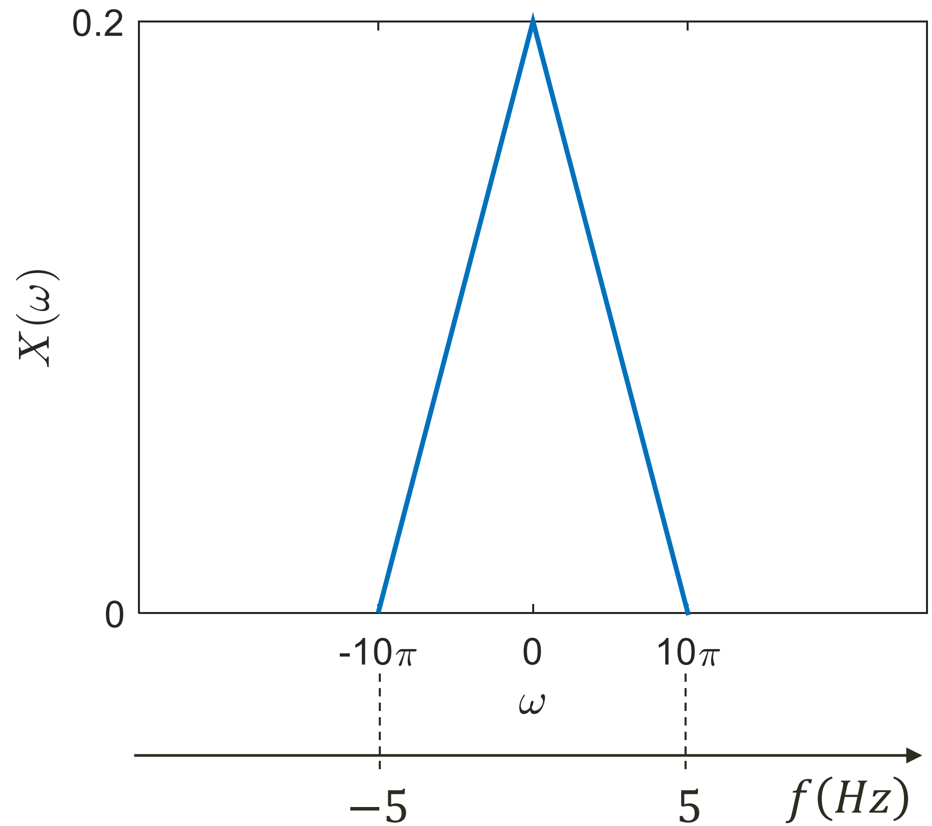
Sonata No 1 In G Minor Presto - Johann Sebastian Bach, amostrada a:

A. 44.1 kHz
B. 22 kHz
C. 11 Hz
D. 5.5 kHz
E. 2.8 kHz

EXEMPLO



$$x(t) = \mathrm{sinc}^2(5\pi t)$$

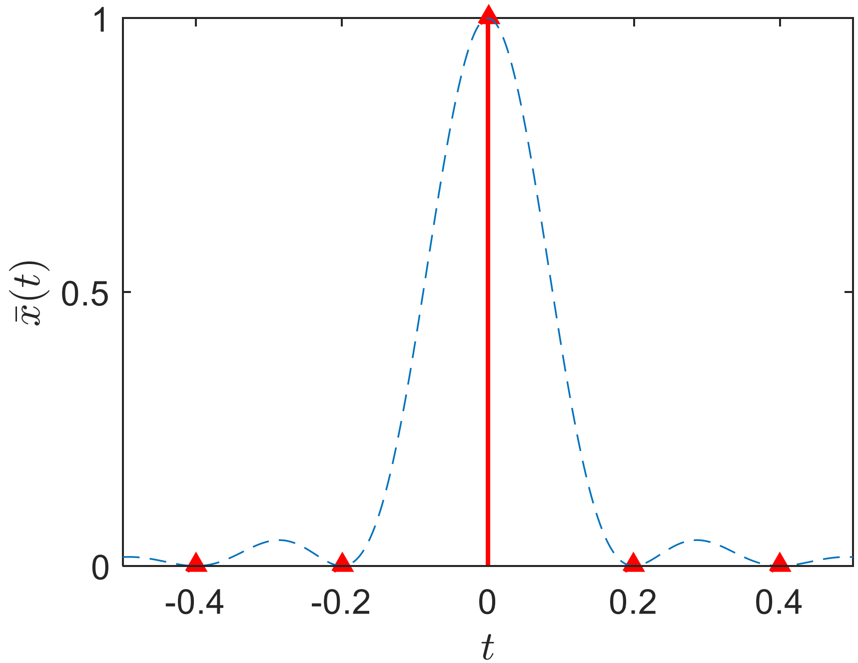


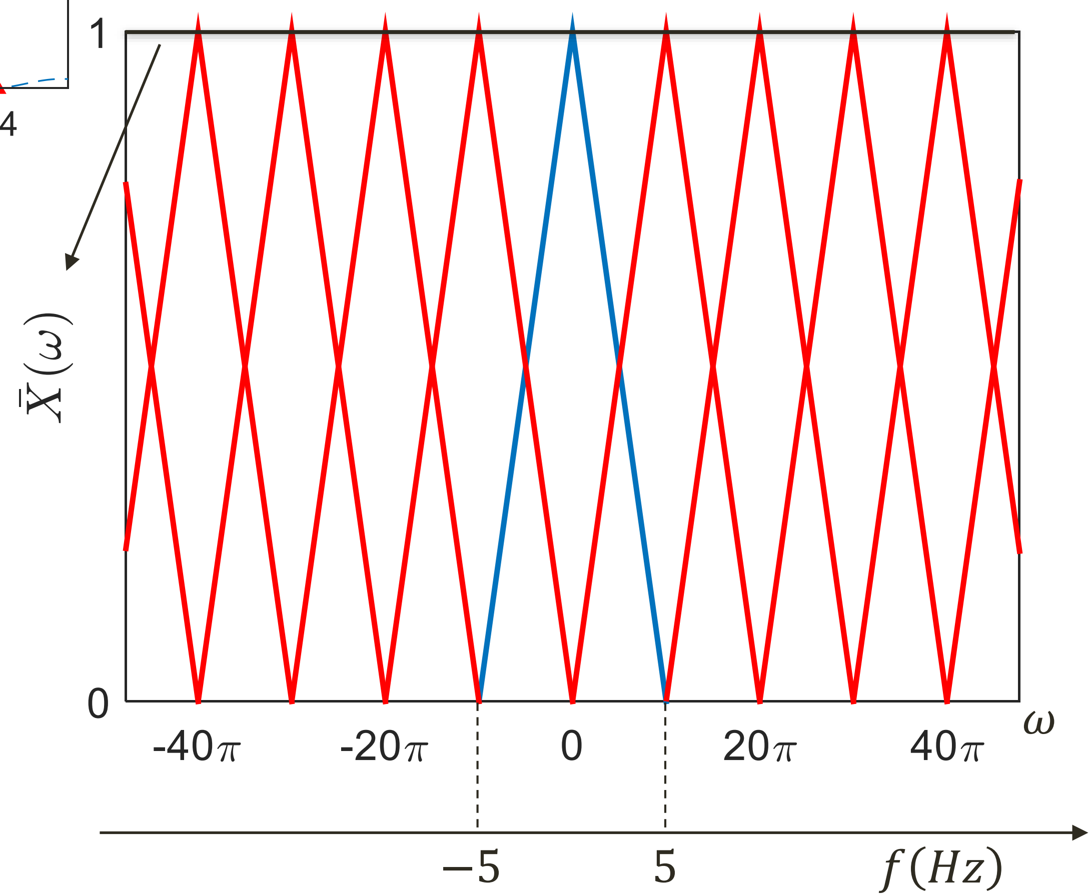
$$X(\omega) = 0{,}2\,\Delta\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)$$

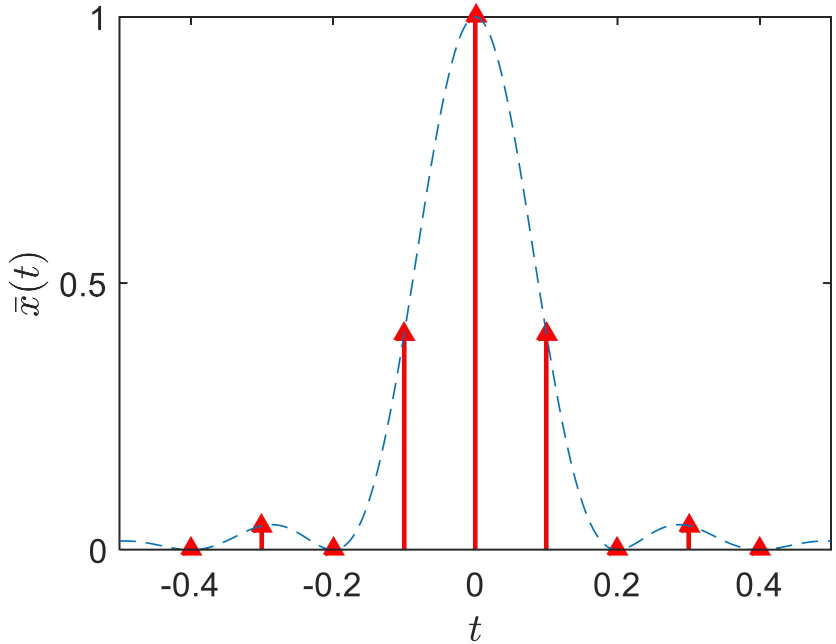
Frequência de amostragem 5Hz

Intervalo de amostragem: 0,2 s

$$\frac{1}{T}X(\omega) = \Delta\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)$$



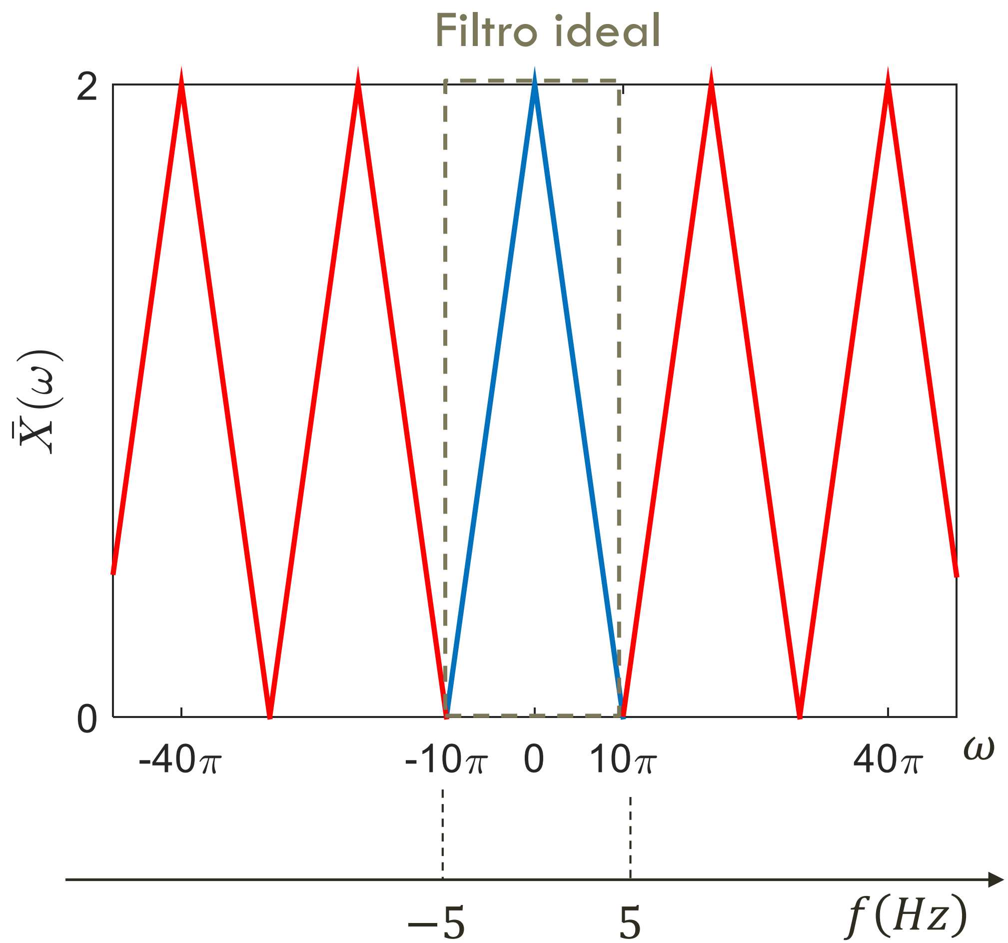


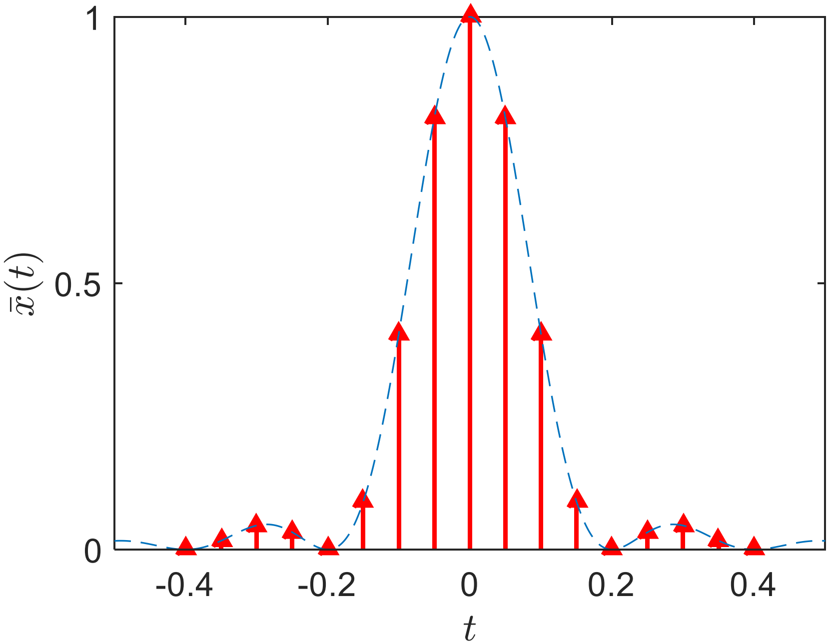


Frequência de amostragem 10Hz

Intervalo de amostragem: 0,1 s

$$\frac{1}{T}X(\omega) = 2\Delta\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)$$

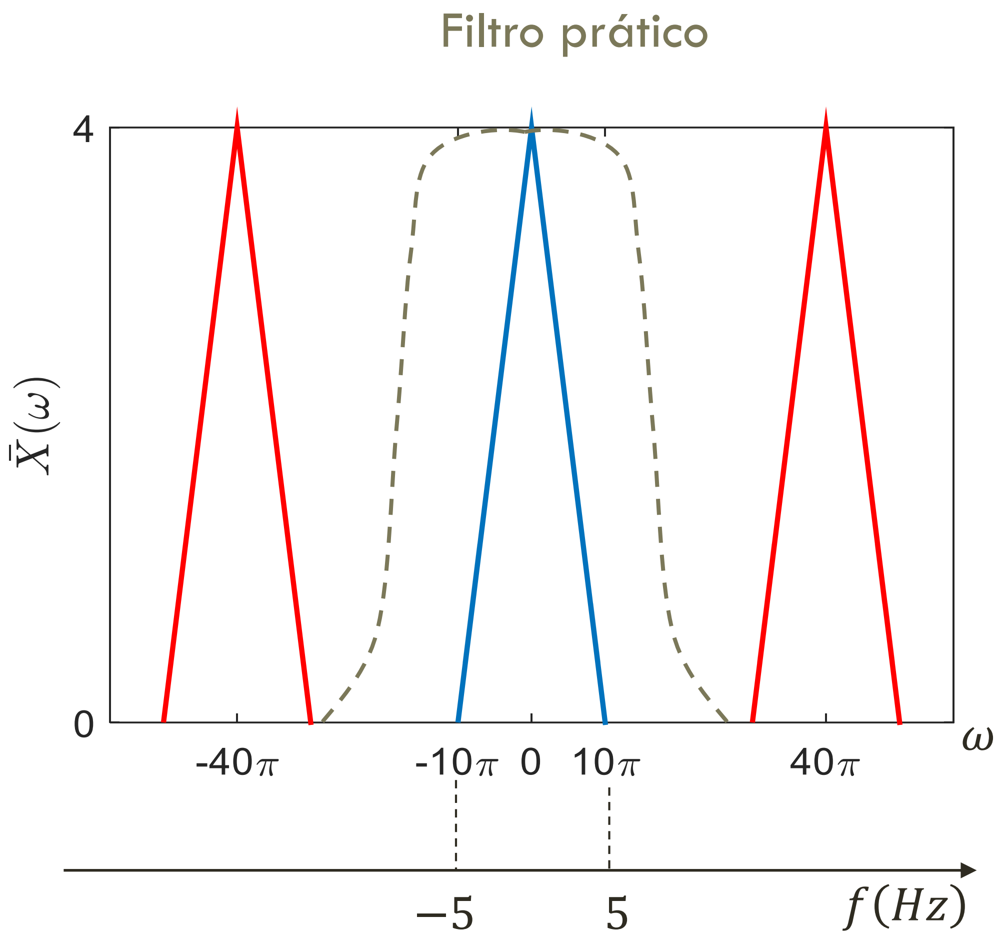




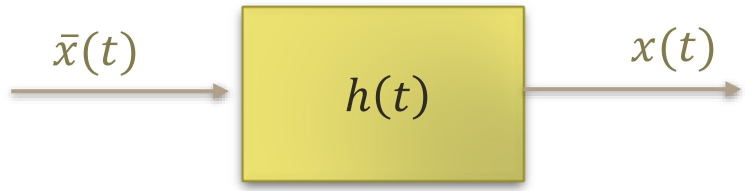
Frequência de amostragem 20Hz

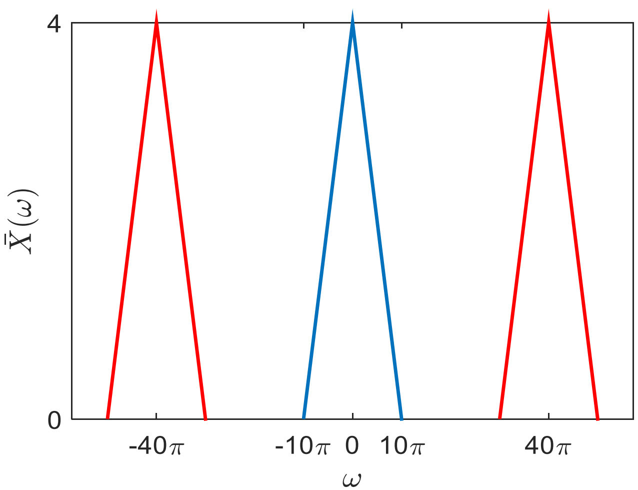
Intervalo de amostragem: 0,05 s

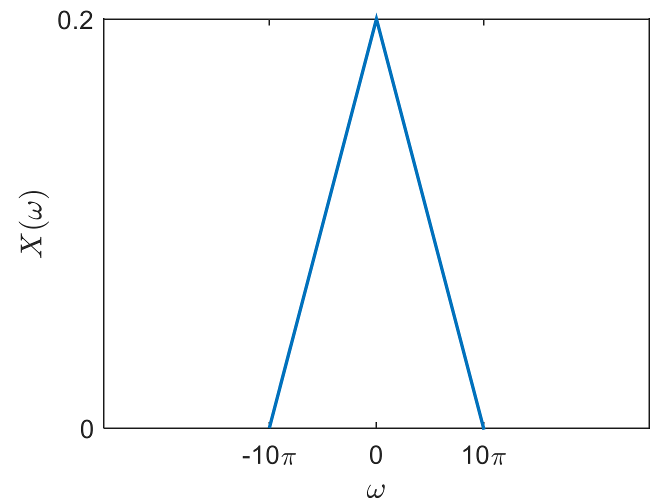
$$\frac{1}{T}X(\omega) = 4\Delta\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)$$



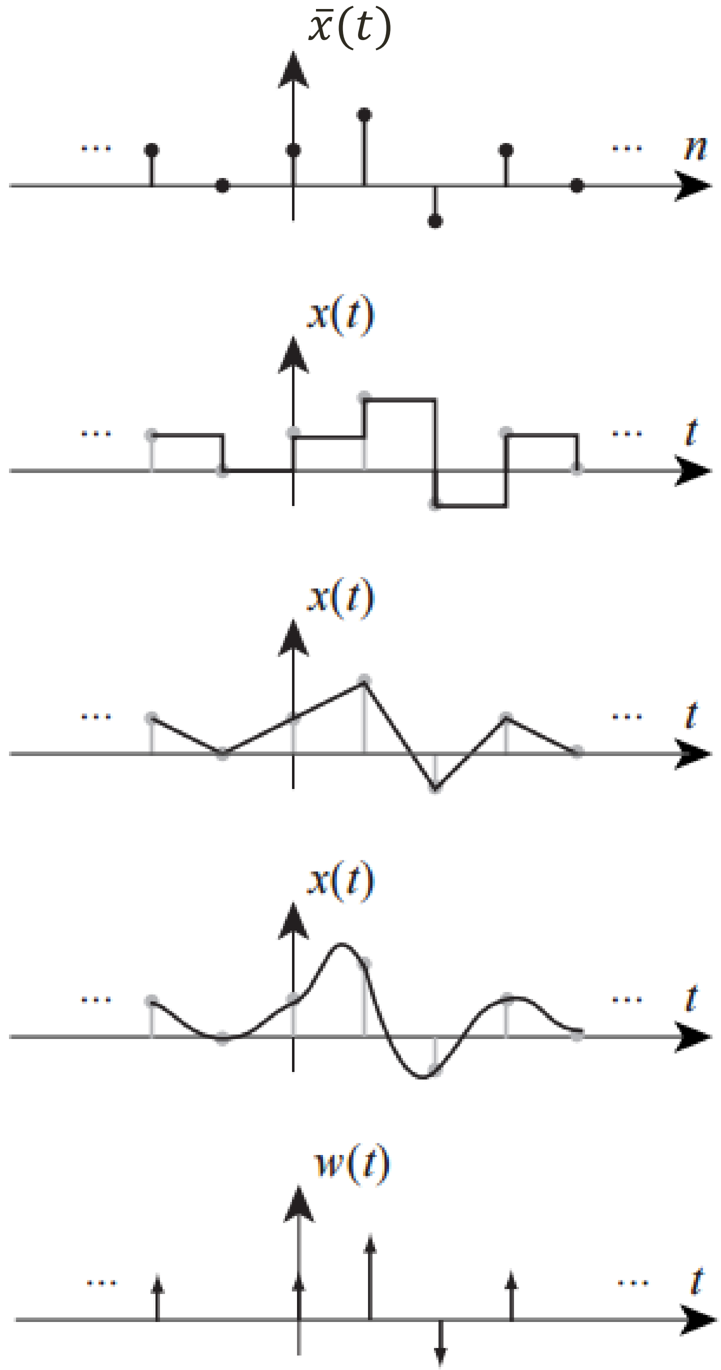
COMO RECONSTRUIR O SINAL ORIGINAL???



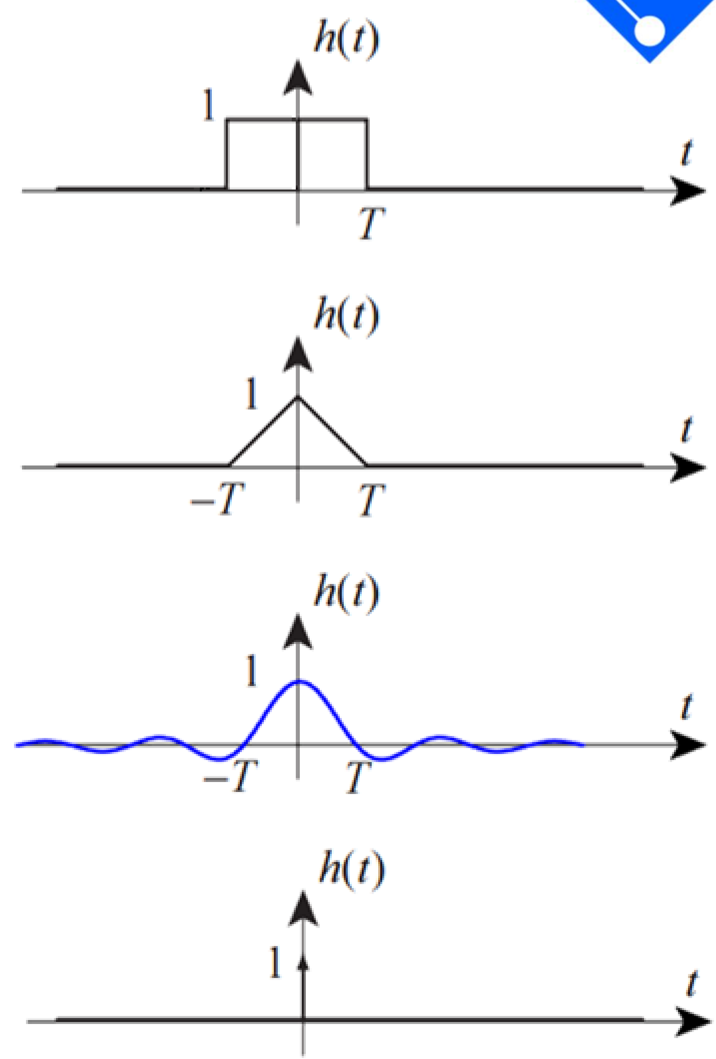




Obviamente, temos que remover as cópias de $X(\omega)$ e aplicar um fator de escala T_s



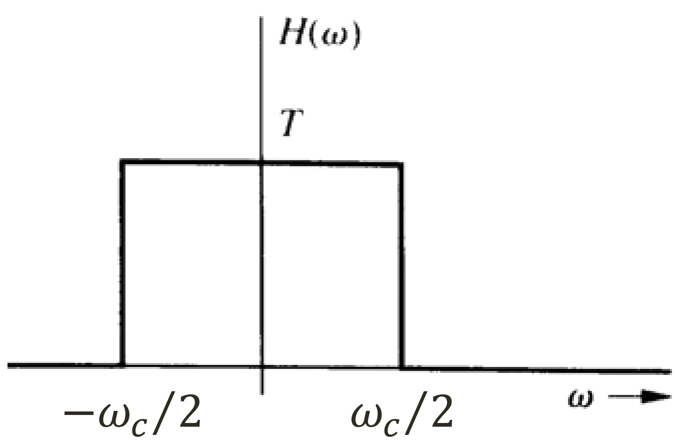
$\bar{x}(t)$
n
$x(t)$
t
$x(t)$
t
$x(t)$
t
$w(t)$
t

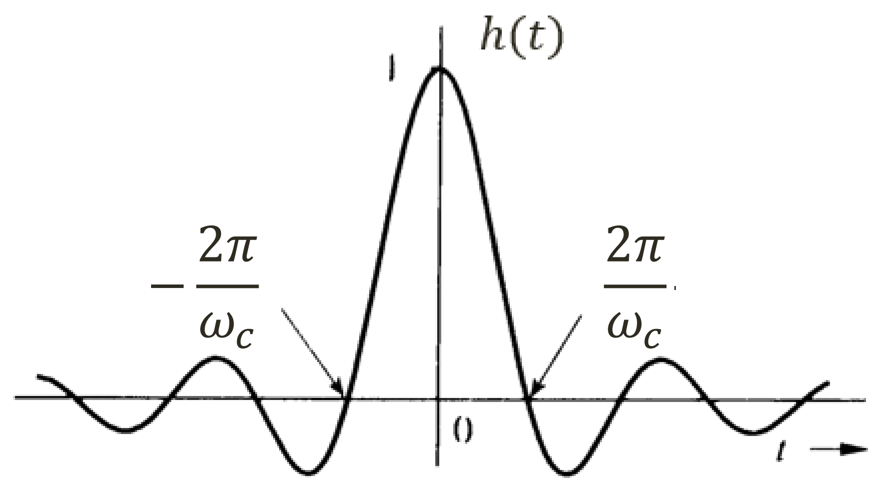


$h(t)$
1
t
T
$h(t)$
1
t
$-T$
T
$h(t)$
1
t
$-T$
T
$h(t)$
1
t

INTERPOLAÇÃO IDEAL (SINC)

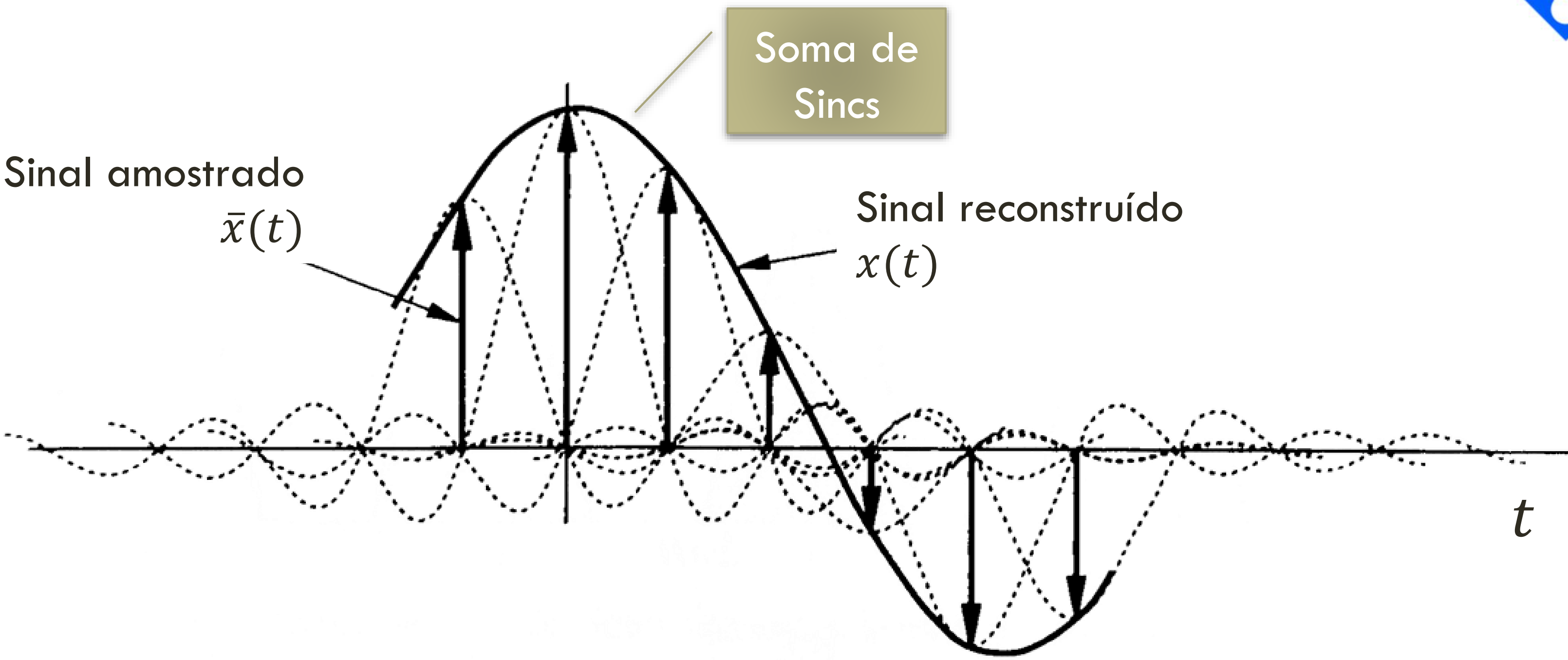
interpolação ideal limitada em faixa





$$H(\omega) = \mathrm{T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad h(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)$$

Figura extraída de [2]



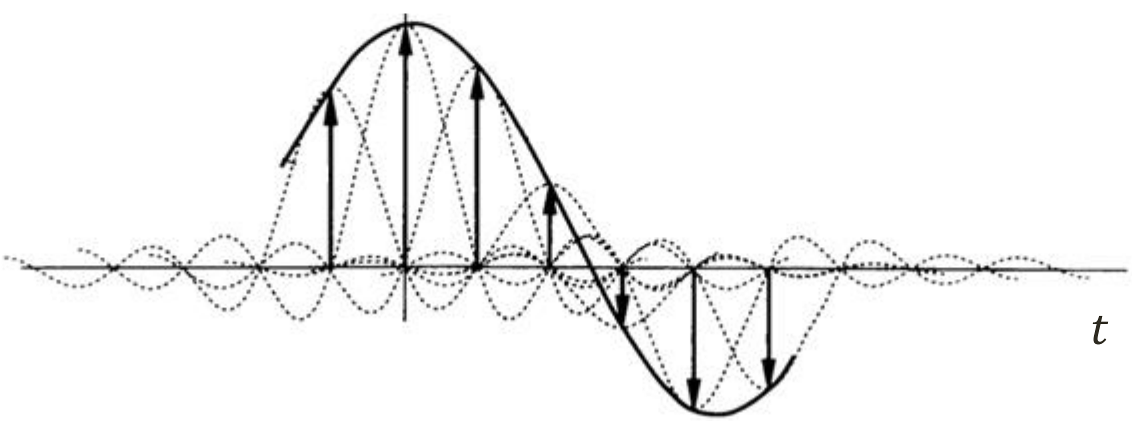
Domínio do tempo, o sinal é reconstruído através da soma ponderada de funções *sinc* deslocadas pelo período de amostragem. Os pesos de cada uma das funções corresponde aos valores do sinal em cada um dos instantes de amostragem.

Figura extraída de [2]

PROBLEMAS...

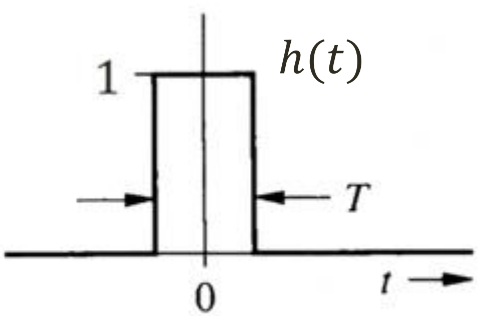
Não pode ser implementado pois representa um sistema *não-causal*, ou seja, a saída depende de valores passados e futuros de $x(nT)$.

Além disso, a influência de cada amostra estende-se ao longo de um intervalo infinito de tempo.

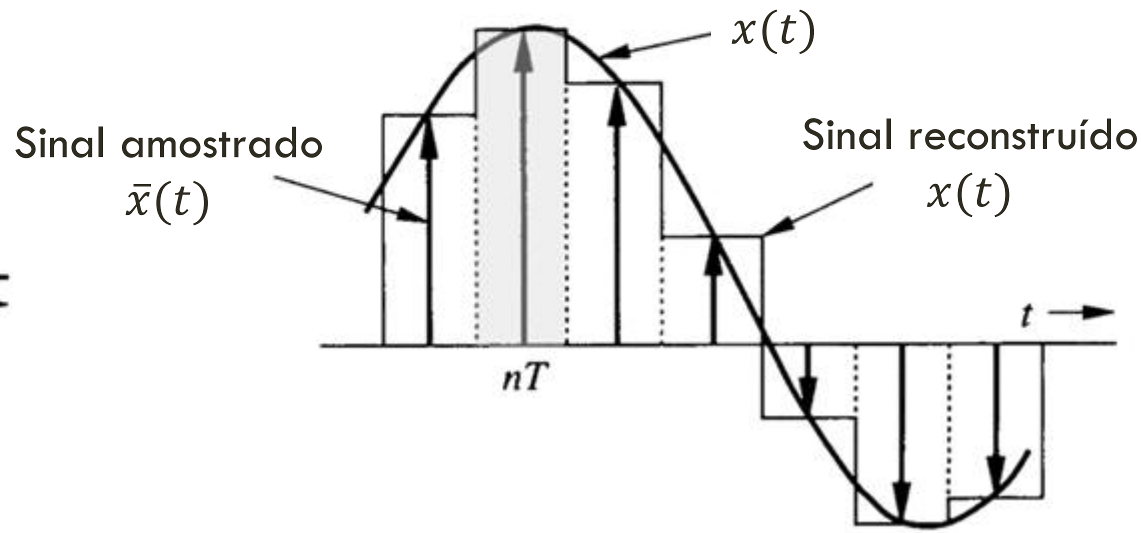


INTERPOLAÇÃO SIMPLES
USANDO UM CIRCUITO ROZ (RETENTOR DE ORDEM ZERO)

uma aproximação em degraus do sinal de tempo contínuo $x(t)$.

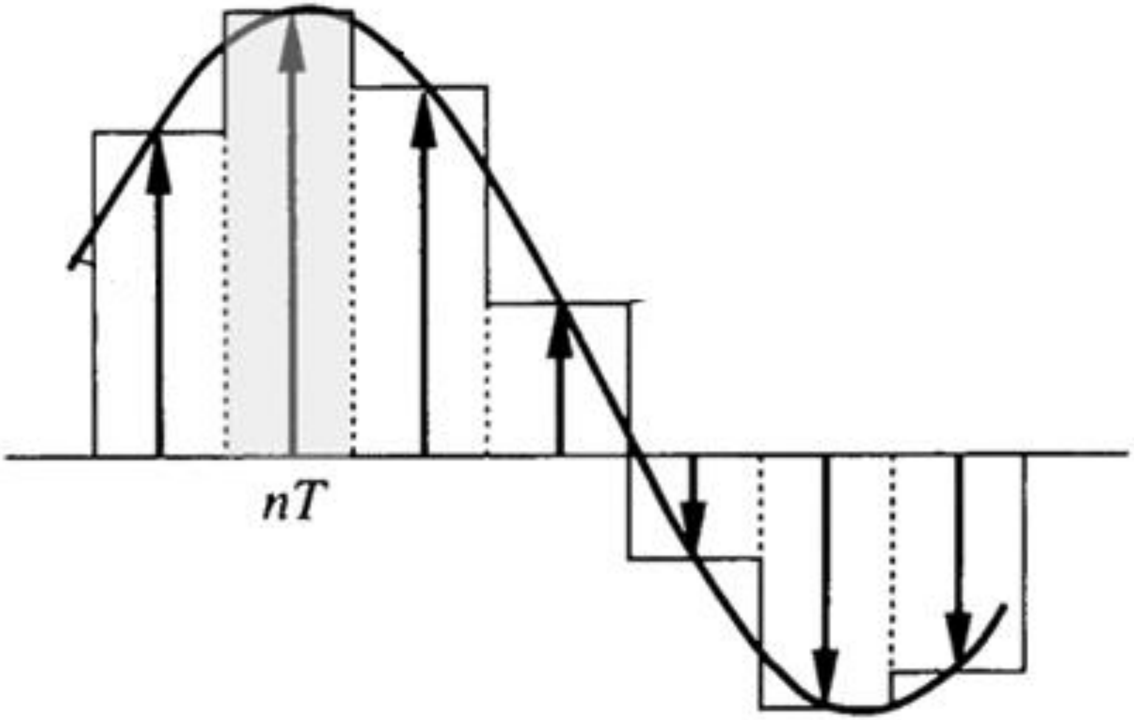


$$h_0(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

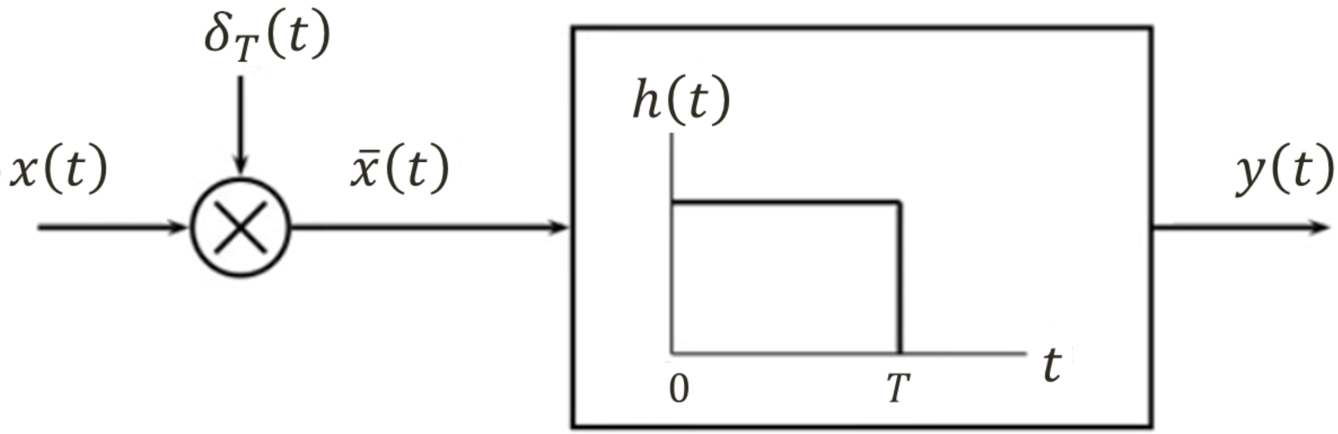


$$x(t) = \bar{x}(t) * h_0(t) = \sum_{n} x(nT)h_0(t - nT)$$

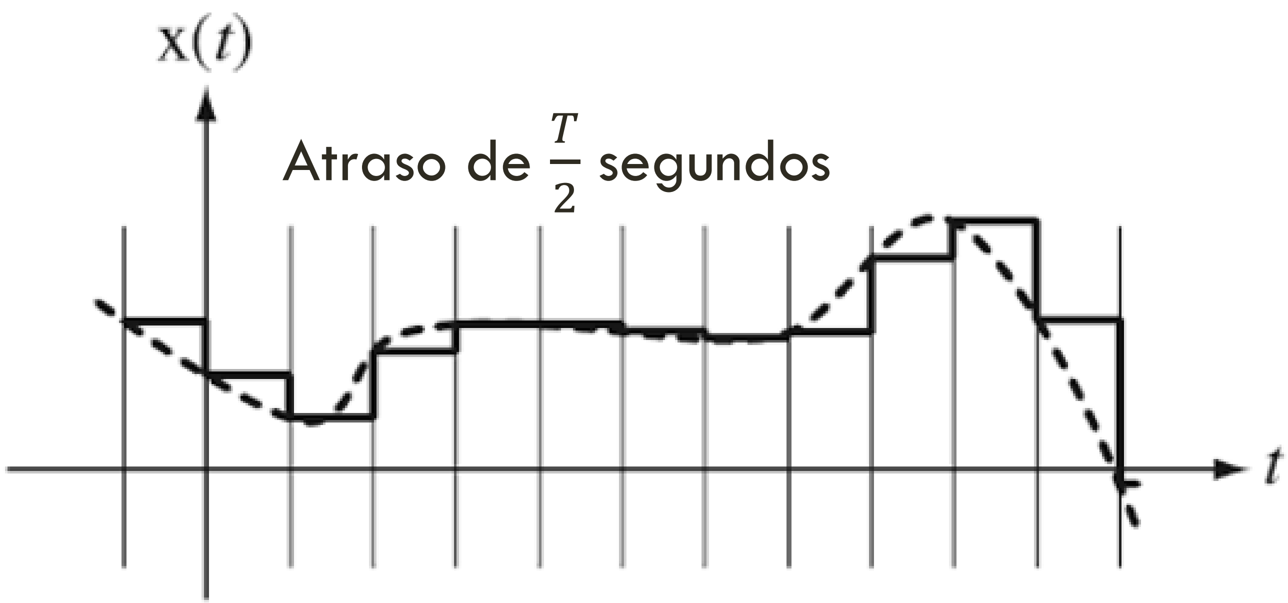
Figuras extraídas de [2]



O retentor de ordem zero é representado matematicamente como a soma ponderada de pulsos retangulares deslocados de múltiplos inteiros do intervalo de amostragem.



$$h(t) = rect\left(\frac{t - 0{,}5T}{T}\right)$$



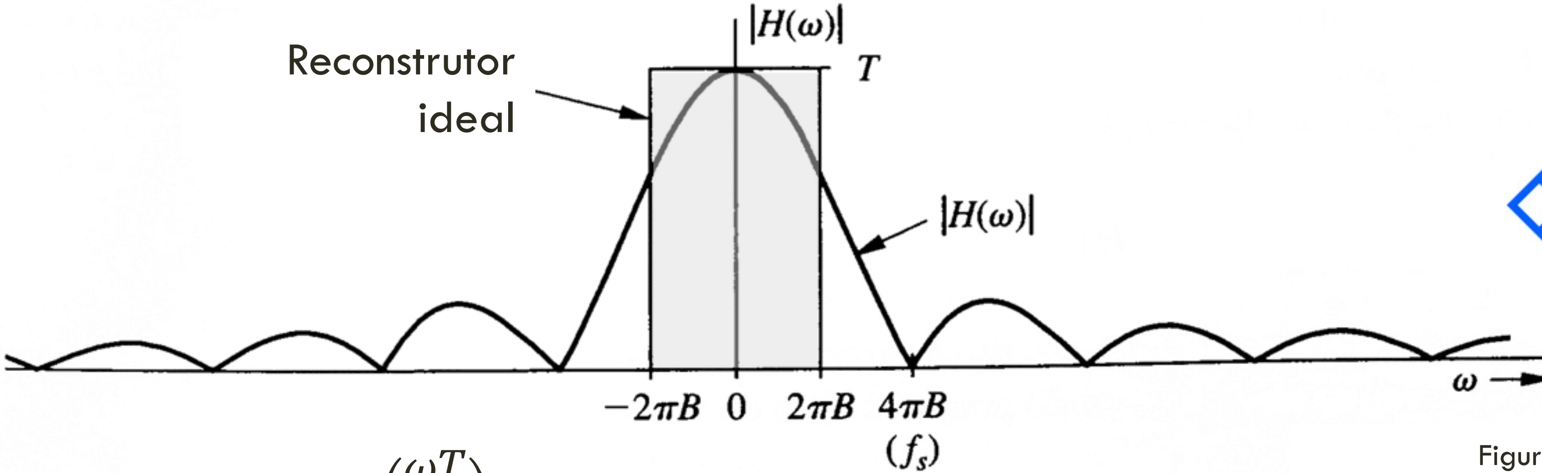


Figura extraída de [2]

$$H(\omega) = T\,\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

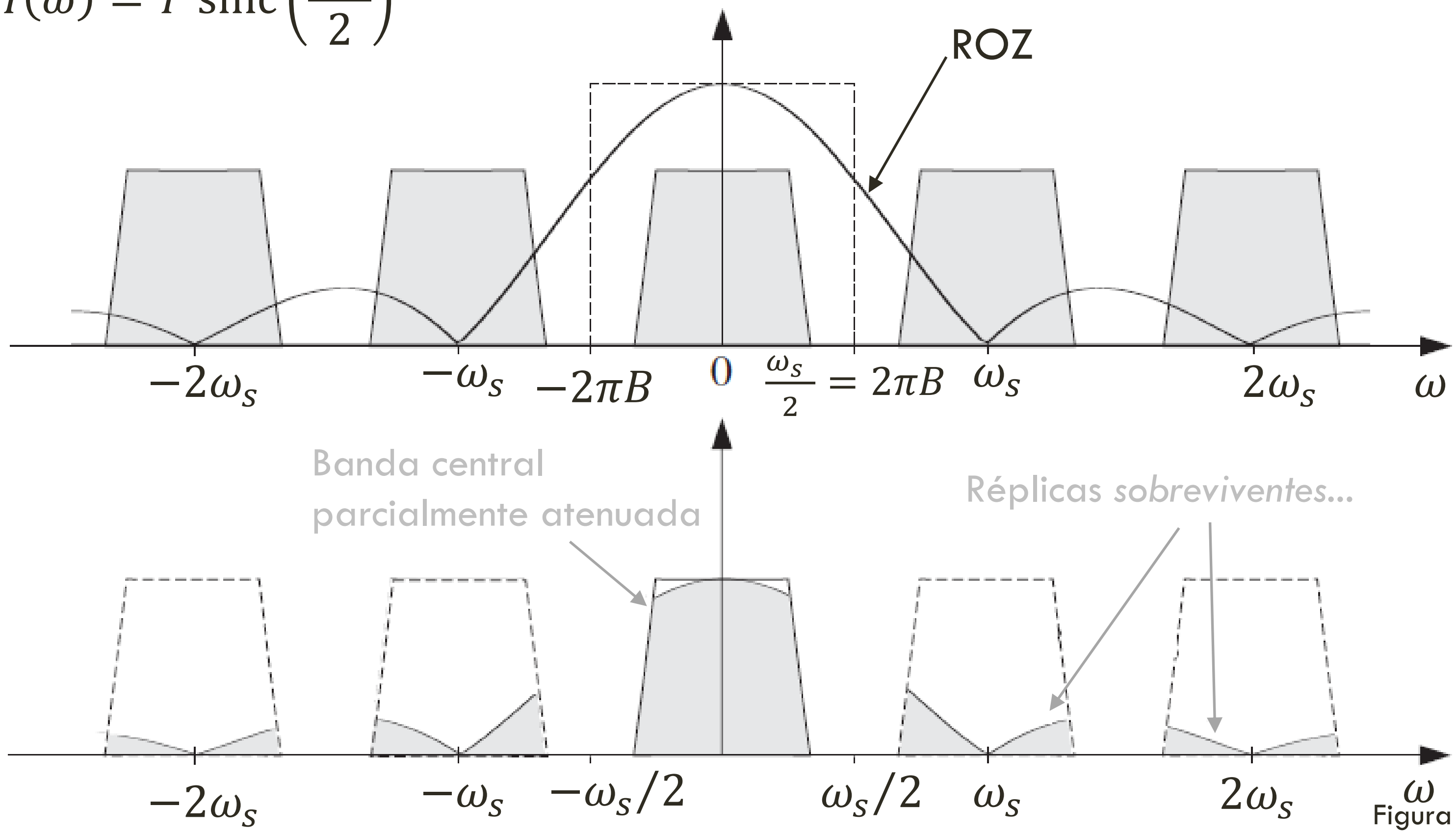
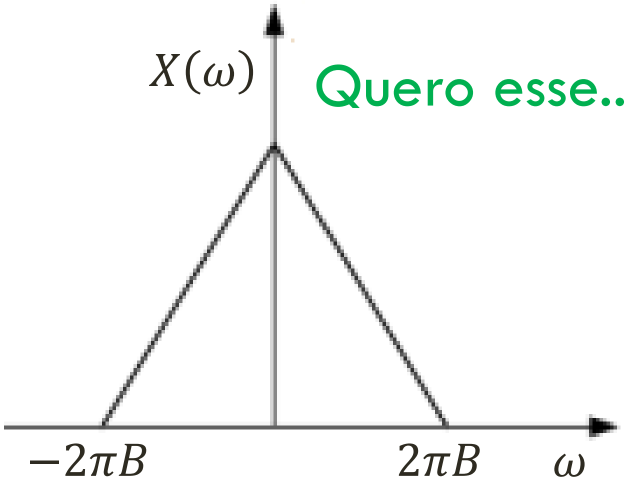
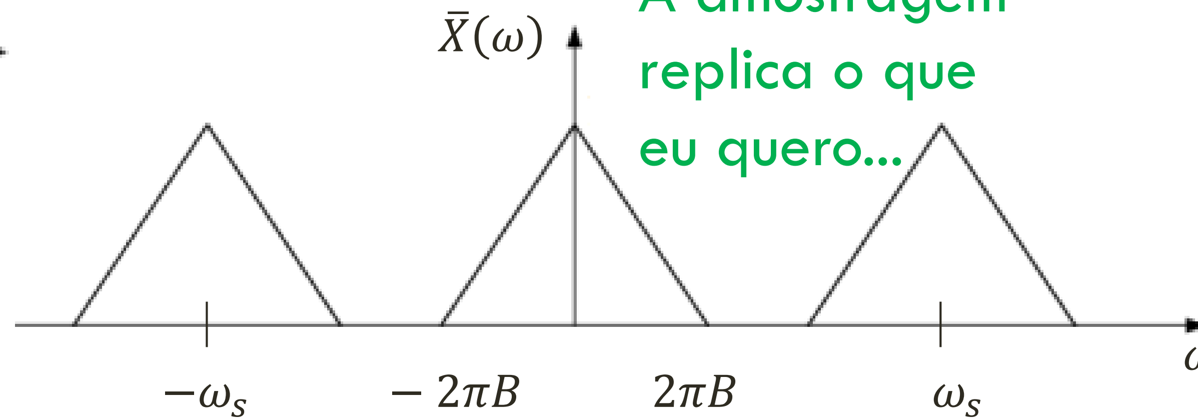


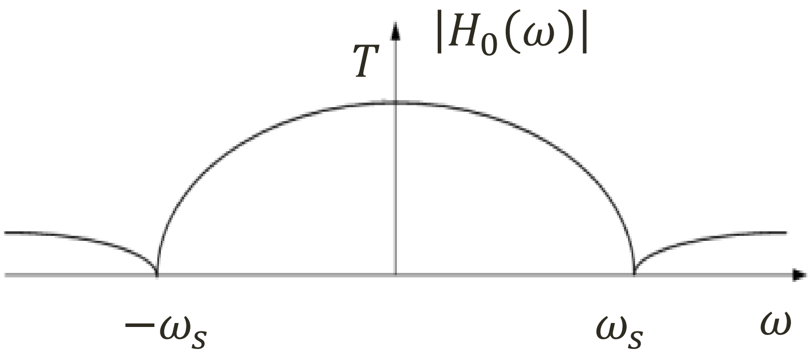
Figura extraída de [3]



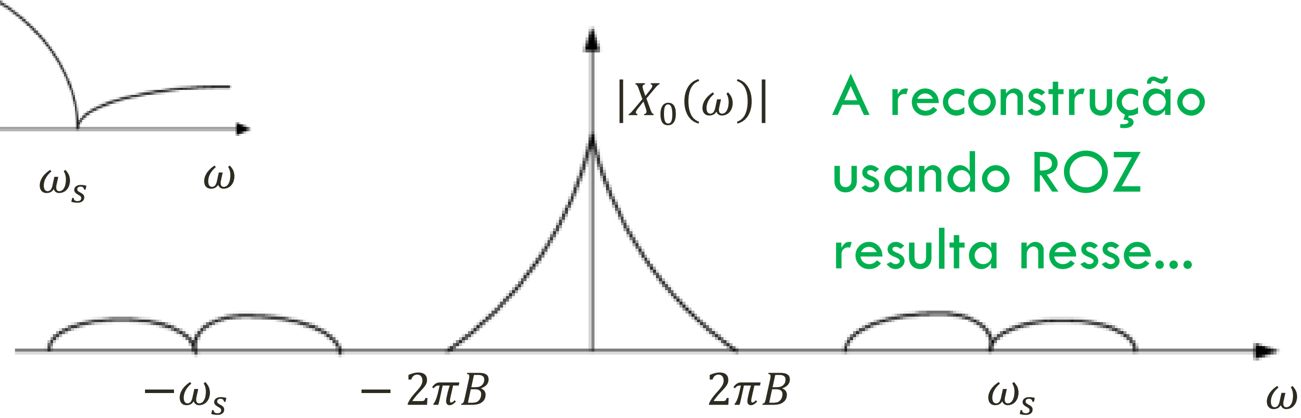
Quero esse...

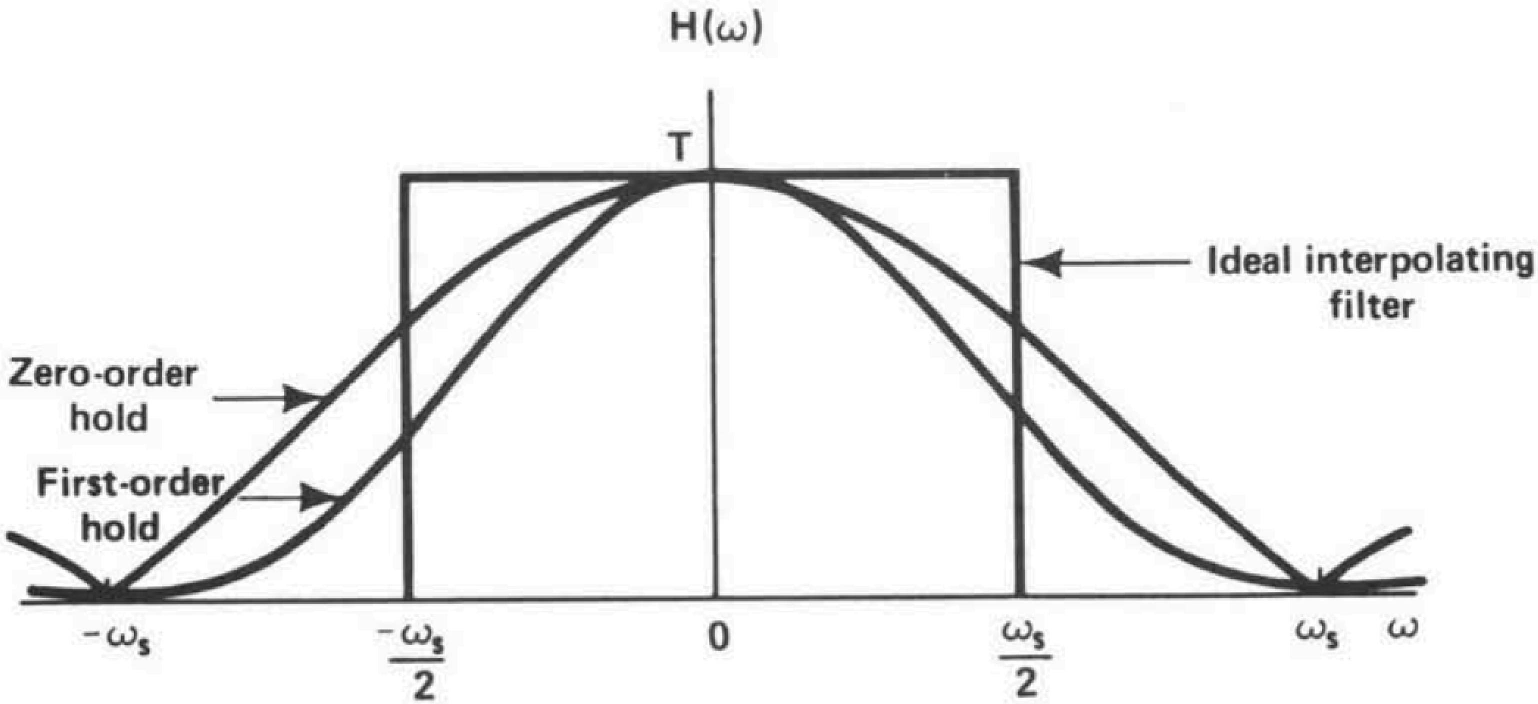
A amostragem replica o que eu quero...





A reconstrução usando ROZ resulta nesse...

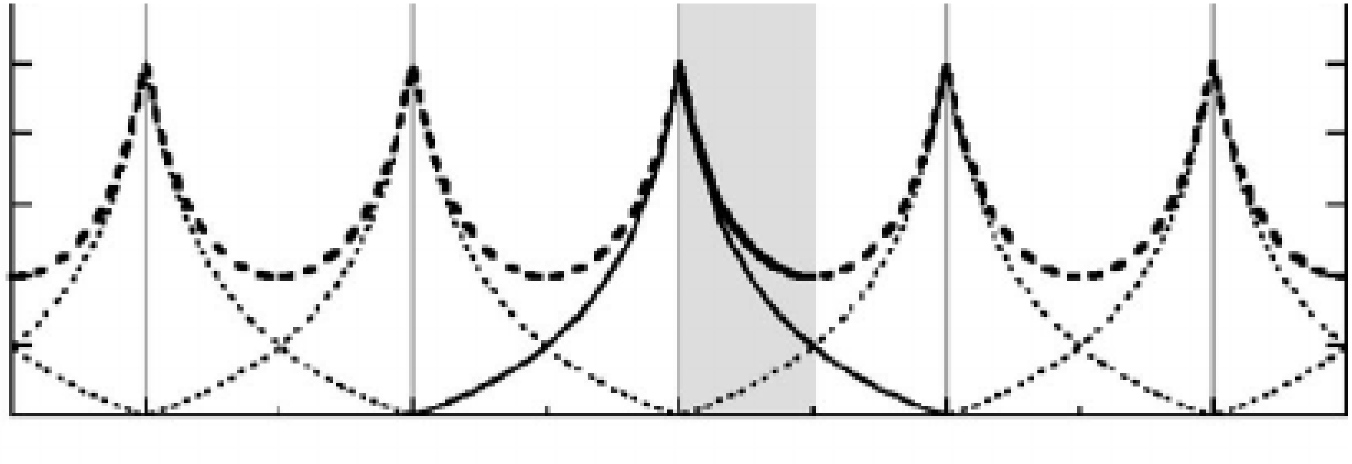


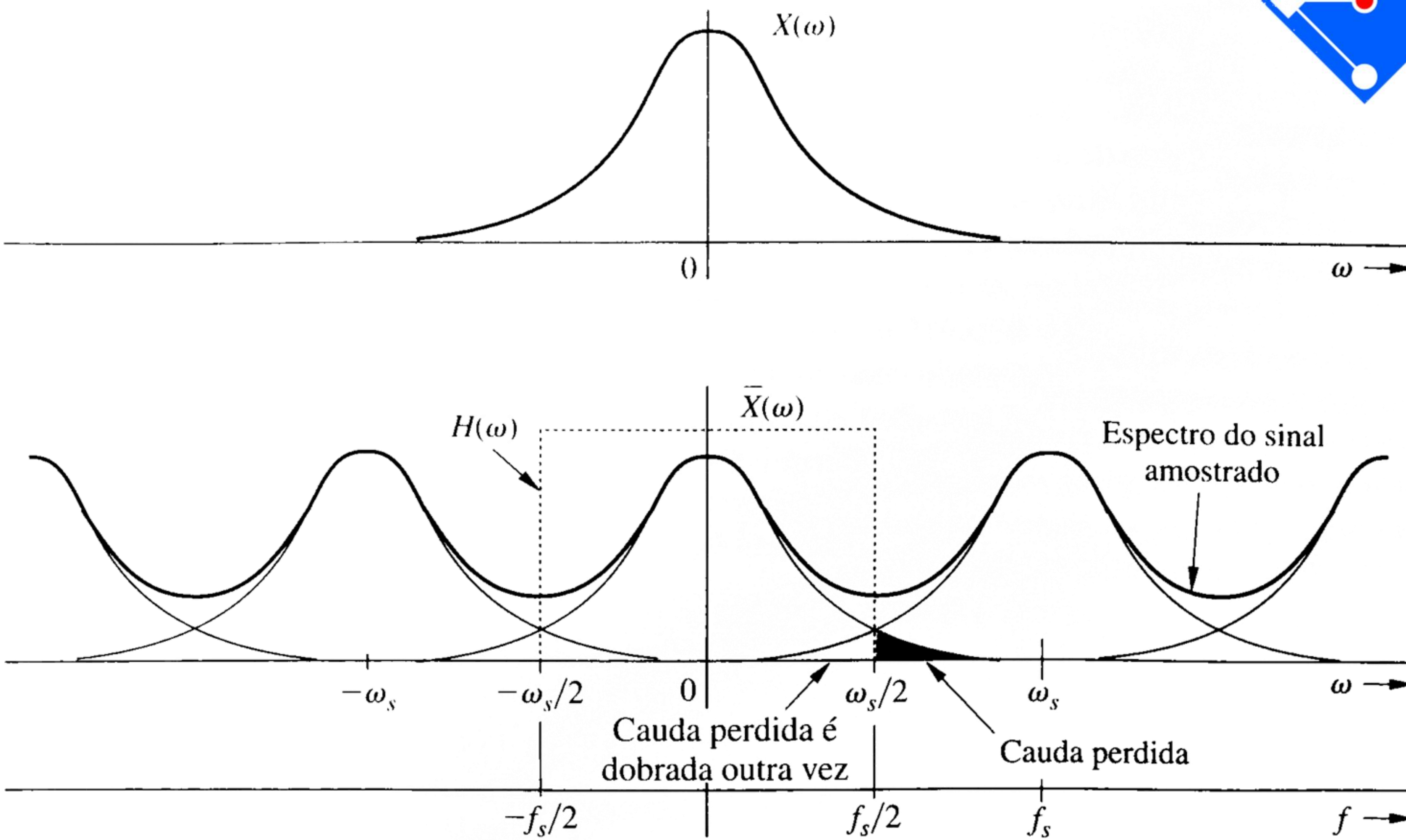


H(ω)
T
Ideal interpolating filter
Zero-order hold
First-order hold
$-\omega_s$
$-\frac{\omega_s}{2}$
0
$\frac{\omega_s}{2}$
ω_s
ω

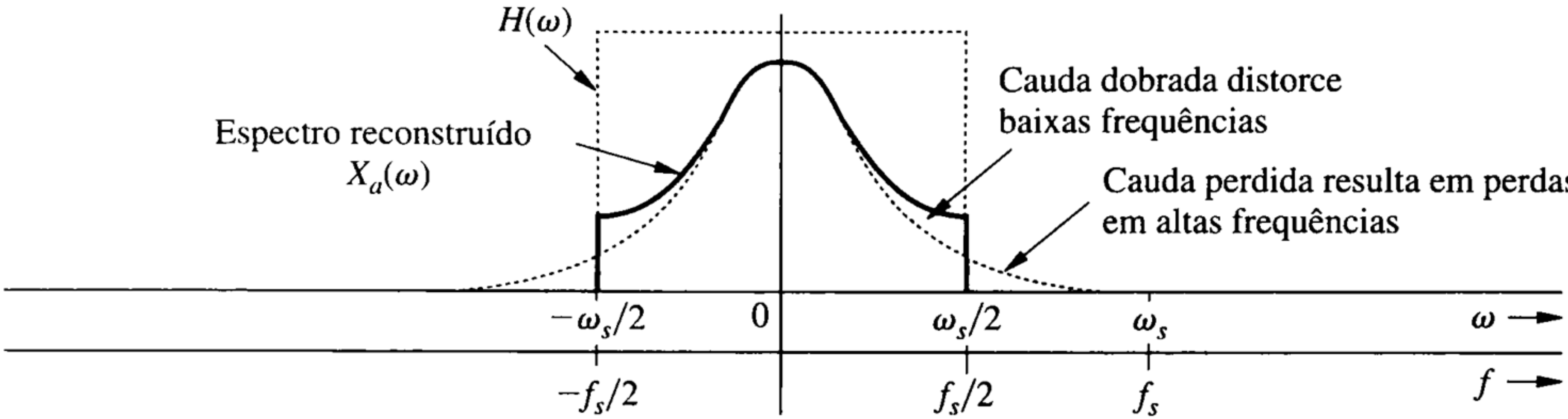
ALIASING

Muitos sinais não tem largura de banda finita ou não conhecemos. Dessa forma, existe uma grande chance de ocorrer sobreposição nas réplicas da frequência...





X(ω)
0
ω
H(ω)
X̄(ω)
Espectro do sinal amostrado
−ω_s
−ω_s/2
0
ω_s/2
ω_s
ω
Cauda perdida é dobrada outra vez
Cauda perdida
−f_s/2
f_s/2
f_s
f



$H(\omega)$
Cauda dobrada distorce
baixas frequências
Espectro reconstruído
$X_a(\omega)$
Cauda perdida resulta em perdas
em altas frequências
$-\omega_s/2$
0
$\omega_s/2$
ω_s
ω
$-f_s/2$
$f_s/2$
f_s
f

SENOIDE E ALIASING

Os seguintes sinais são amostrados a uma frequência de 4 Hz,

$$-\sin 14\pi t \qquad -\sin 6\pi t \qquad \sin 2\pi t \qquad \sin 10\pi t \qquad \sin 18\pi t$$

Mostre que eles representam todos o mesmo sinal amostrado...

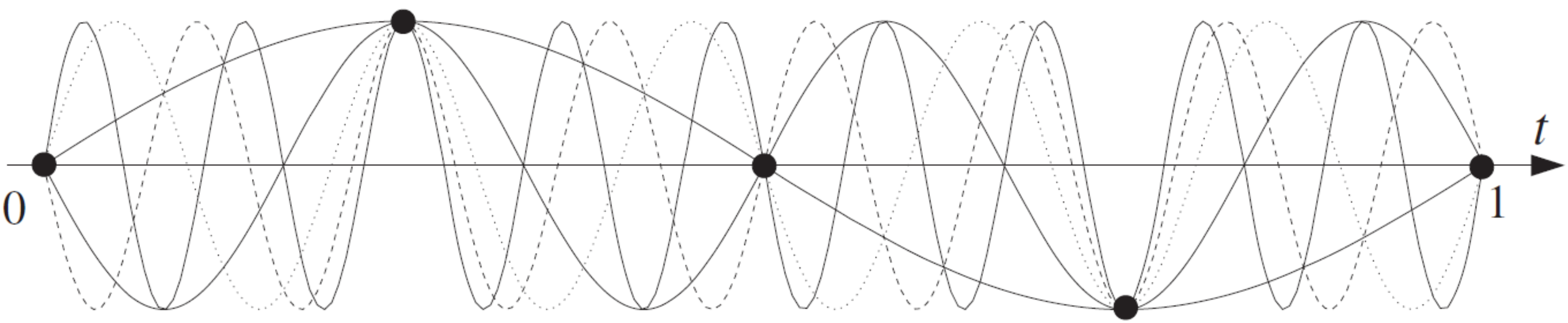


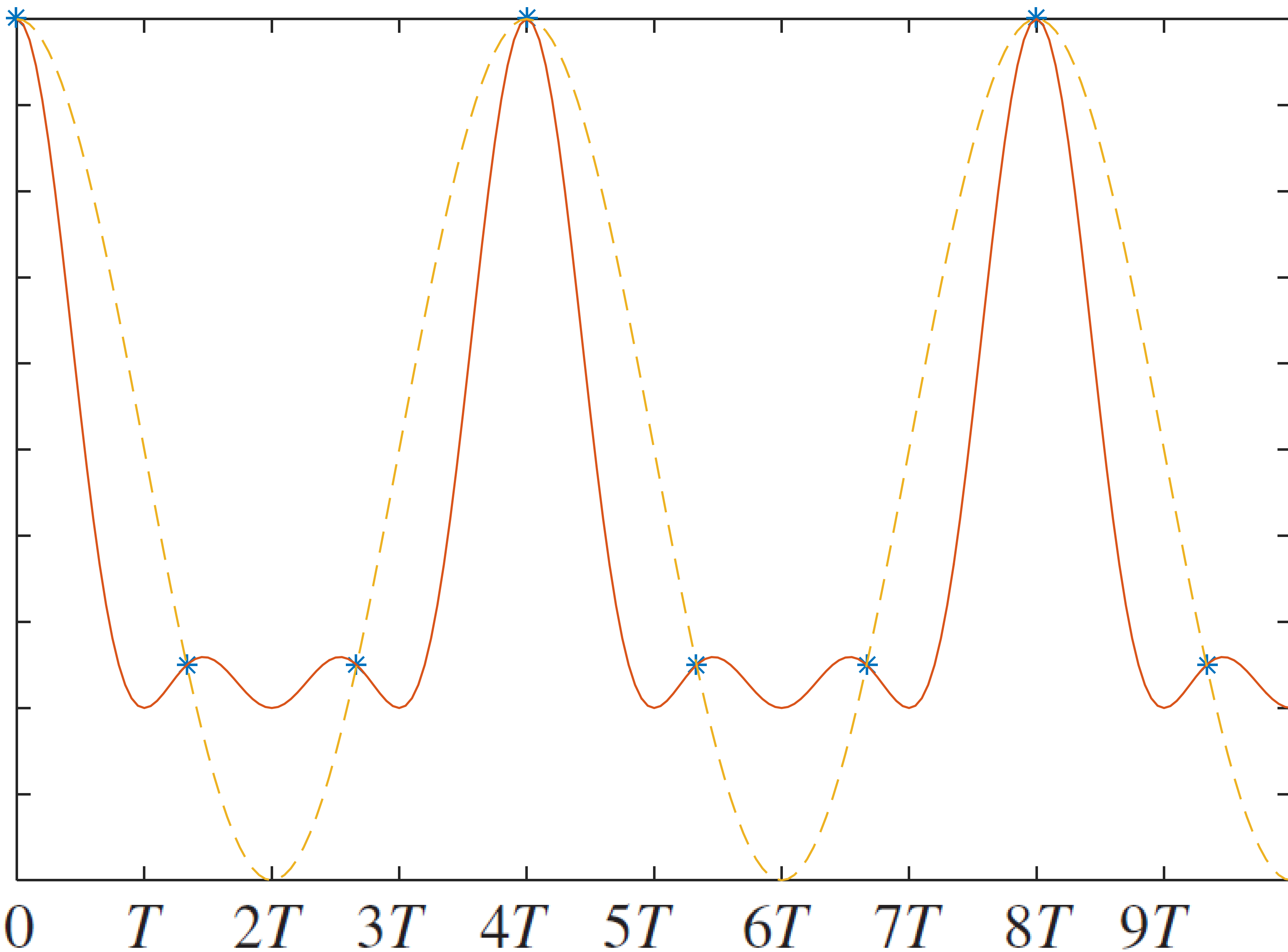
Figura extraída de [3]

EXEMPLO 2

Considere $x(t)$ como a soma de sinais senoidais,

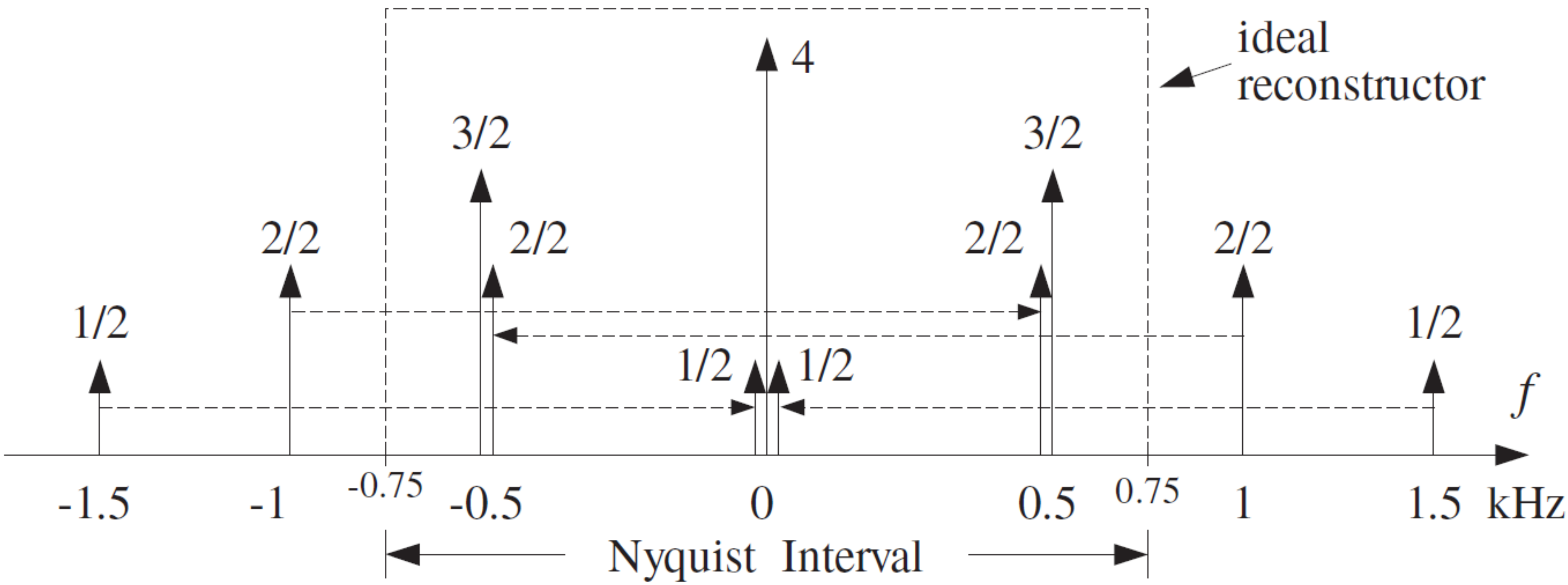
$$x(t) = 4 + 3\cos \pi t + 2\cos 2\pi t + \cos 3\pi t$$

onde t está em milisegundos. Determine a frequência mínima de amostragem para que não ocorra aliasing, i. é, a frequência de Nyquist (f_N). Para observação dos efeitos do aliasing, suponha que o sinal é amostrado à $f_N/2$. Determine o sinal recuperado $x_a(t)$.


0
T
2T
3T
4T
5T
6T
7T
8T
9T

$$x(t) = \cos \omega_0 t \longrightarrow X(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\bar{x}(t) = \sum_n x(nT)\,\delta(t - nT) \longrightarrow \bar{X}(\omega) = \frac{1}{T} X(\omega - n\omega_s)$$



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$$

$$\boxed{x(t) = 5 + 5\cos \pi t}$$

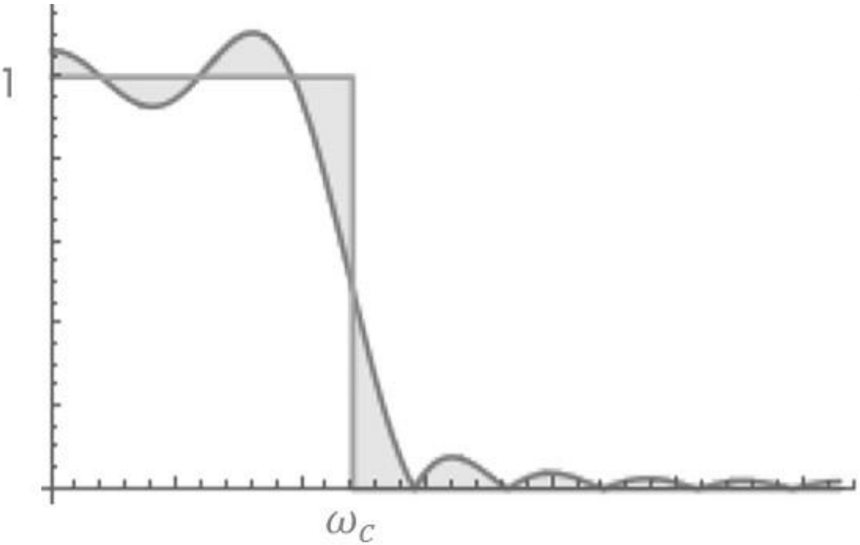
FILTRO

Para extrair corretamente a informação fundamental do sinal analisado é necessário selecionar as frequências de interesse que compõe esse sinal. Como fazer isso?

Com um **FILTRO**. Filtros são SLIT capazes de modificar as características dos sinais de entrada de tal modo que apenas uma parcela específica dos seus componentes de frequência chega à saída do filtro.

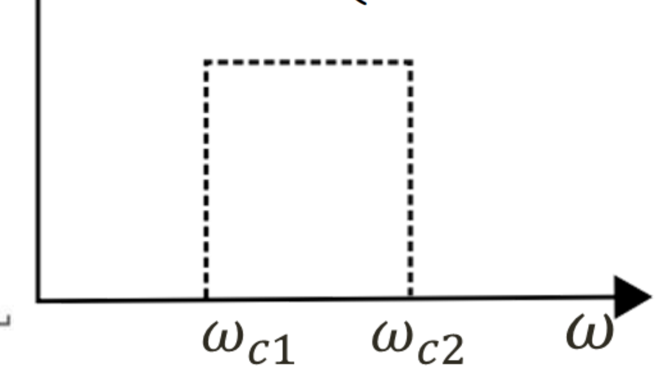
A resposta em frequência do filtro é caracterizada por **uma faixa de passagem** e **uma faixa de rejeição**, separadas por uma **faixa de transição ou faixa de guarda**

Passa baixa



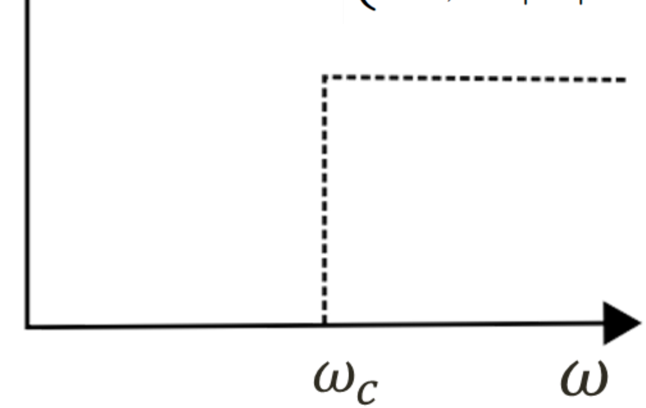
Passa banda (faixa)

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1, & \omega_{c1} < |\omega| \leq \omega_{c2} \\ 0, & \omega_{c1} \leq |\omega| \text{ e } |\omega| > \omega_{c2} \end{cases}$$



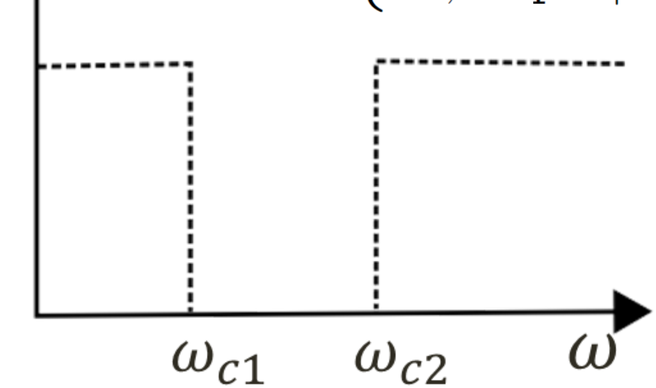
Passa alta

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq \omega_c \\ 1, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



Rejeita banda (faixa)

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 0, & \omega_{c1} < |\omega| \leq \omega_{c2} \\ 1, & \omega_{c1} \leq |\omega| \text{ e } |\omega| > \omega_{c2} \end{cases}$$



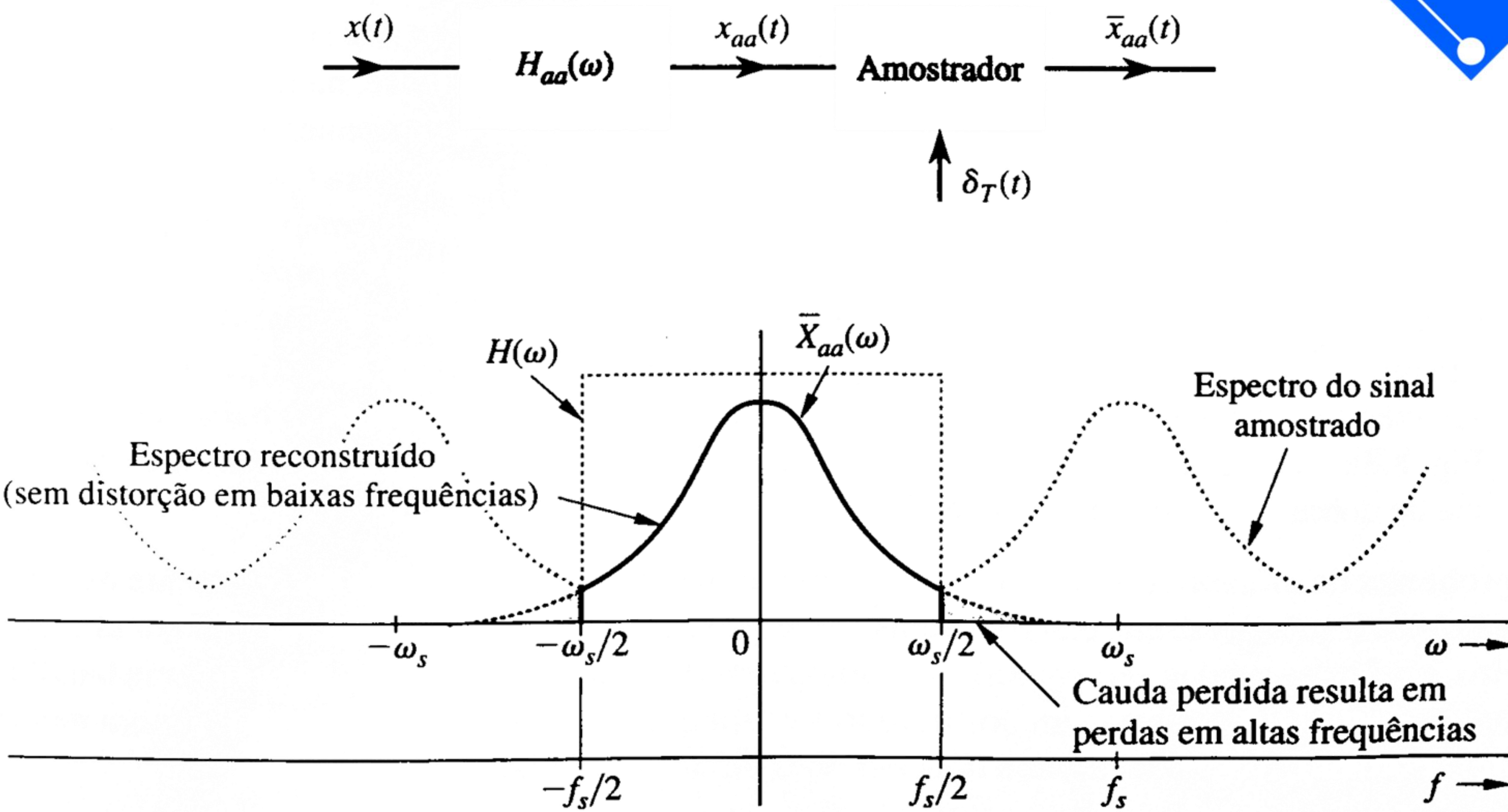
SOLUÇÃO: FILTRO ANTIALIASING

As frequências altas devem ser eliminadas ANTES da amostragem do sinal. Como???

Emprega-se um filtro *passa-baixa* com frequência de corte $f_s/2$.

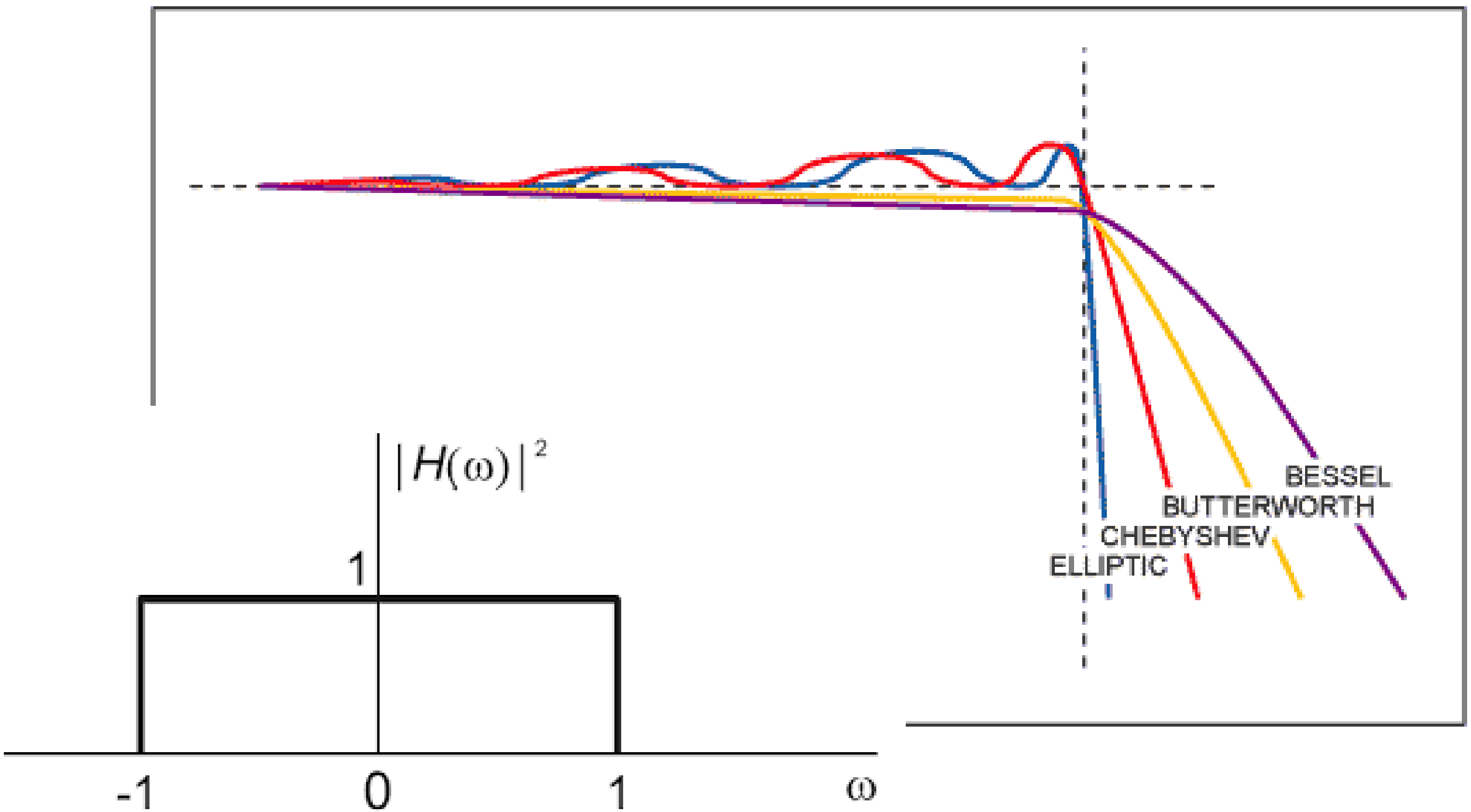
Esse filtro é chamado de filtro *anti-aliasing*.

O espectro das componentes de baixa frequência permanece intacto. Como perdemos as componentes de alta frequência, determina-se a frequência de corte com base nas frequências de interesse do sinal e na frequência de amostragem.



$x(t)$
$H_{aa}(\omega)$
$x_{aa}(t)$
Amostrador
$\bar{x}_{aa}(t)$
$\delta_T(t)$
$H(\omega)$
$\bar{X}_{aa}(\omega)$
Espectro do sinal amostrado
Espectro reconstruído (sem distorção em baixas frequências)
$-\omega_s$
$-\omega_s/2$
0
$\omega_s/2$
ω_s
ω
Cauda perdida resulta em perdas em altas frequências
$-f_s/2$
$f_s/2$
f_s
f

FILTROS

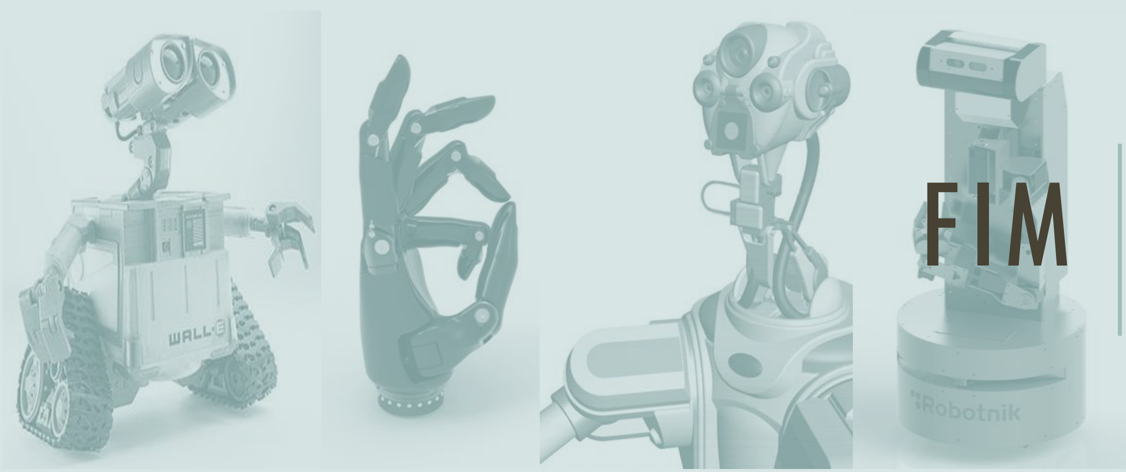


AMOSTRAGEM

Teorema da Amostragem

Interpolação – ideal, ordem zero, linear

Aliasing e filtro anti aliasing



FIM