
SEM5875 - Controle de Sistemas Robóticos

Adriano A. G. Siqueira

Aula 8 - Controle de Posição e Força - Manipuladores Cooperativos

Manipuladores com restrições

Restrições holonômicas

$$\phi(q) = 0$$

sendo $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ suficientemente suave.

As forças na restrição são dadas pela relação

$$f(q) = J^T(q)\lambda$$

sendo $\lambda \in \mathbb{R}^m$ o vetor de multiplicadores Lagrangianos

$J(q) = \partial\phi(q)/\partial q$ a matriz jacobiana.

Manipuladores com restrições

Assume-se que a matriz jacobiana $J(q)$ é de posto m para todo $q \in \mathbb{R}^n$

Define-se

$$q \doteq \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

- $q^1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ descreve a locomoção restrita do manipulador
- $q^2 \in \mathbb{R}^m$ denota as variáveis restantes das juntas

Manipuladores com restrições

Existe um conjunto aberto $\Omega_c \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ e uma função $\sigma: \Omega_c \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\phi(\sigma(q^1), q^1) = 0, \forall q^1 \in \Omega_c$$

Definindo-se:

$$L(q^1) = \begin{bmatrix} I_{n-m} \\ \frac{\partial \sigma(q^1)}{\partial q^1} \end{bmatrix}$$

Temos, então: $\dot{q} = L\dot{q}^1$

Manipuladores com restrições

O modelo dinâmico do robô, na forma reduzida, é

$$M(q^1)L(q^1)\ddot{q}^1 + C_L(q^1, \dot{q}^1)\dot{q}^1 + G(q^1) = \tau + J^T(q)\lambda + d$$

sendo $C_L(q^1, \dot{q}^1)\dot{q}^1 = M(q^1)L(q^1) + C(q^1, \dot{q}^1)L(q^1)$.

P1: A matriz $A_L(q^1) \doteq L^T(q^1)M(q^1)L(q^1)$ é simétrica e definida positiva.

P2: A matriz $\dot{A}_L(q^1) - 2L^T(q^1)C_L(q^1, \dot{q}^1)$ é anti-simétrica.

Manipuladores com restrições

P3: $J(q^1)L(q^1) = L^T(q^1)J^T(q^1) = 0.$

P4: A dinâmica do manipulador pode ser parametrizada linearmente, isto é:

$$M(q^1)L(q^1)\dot{s} + C_L(q^1, \dot{q}^1)s + G(q^1) = Y_L(q^1, \dot{q}^1, s, \dot{s})\Theta_L, \forall s \in \mathbb{R}^{n-m}$$

sendo Y_L uma matriz de regressão de funções conhecidas e o parâmetro desconhecido Θ_L é um vetor constante.

Manipuladores com restrições

Multiplicando-se os dois lados da eq. dinâmica por $L^T(q^1)$, obtemos:

$$A_L(q^1)\ddot{q}^1 + L^T(q^1)C_L(q^1, \dot{q}^1)\dot{q}^1 + L^T(q^1)G(q^1) = L^T(q^1)(\tau + d).$$

Define-se o erro de acompanhamento de posição $\bar{x}_1(t)$ e o erro filtrado do acompanhamento de velocidade $\bar{x}_2(t)$ como:

$$\bar{x}(t) \doteq \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} q^1(t) - q_d^1(t) \\ \dot{q}^1(t) - \dot{q}_d^1(t) + p(q^1(t) - q_d^1(t)) \end{bmatrix}$$

sendo p uma constante maior que zero.

Dinâmica do erro

$$\dot{\bar{x}}_1 = -p\bar{x}_1 + \bar{x}_2$$

$$A_L(q^1)\dot{\bar{x}}_2 = -L^T(q^1)C_L(q^1, \dot{q}^1)\bar{x}_2 + L^T(q^1)(-F(x_e) + \tau + d)$$

sendo $x_e \doteq [q^1 \quad \dot{q}^1 \quad q_d^1 \quad \dot{q}_d^1 \quad \ddot{q}_d^1]^T$ e

$$F(x_e) \doteq M(q^1)L(q^1)(\ddot{q}_d^1 - p\dot{\bar{x}}_1) + C_L(q^1, \dot{q}^1)(\dot{q}_d^1 - p\bar{x}_1) + G(q^1).$$

Manipuladores com restrições

$F(q^1, \dot{q}^1, q_d^1, \dot{q}_d^1, \ddot{q}_d^1)$ pode ser expressa como:

$$F(q^1, \dot{q}^1, q_d^1, \dot{q}_d^1, \ddot{q}_d^1) = Y_1(q^1, \dot{q}^1, \dot{q}_d^1 - p\bar{x}_1, \ddot{q}_d^1 - p\dot{\bar{x}}_1)\Theta_1$$

sendo Y_1 uma matriz de regressão $n \times p_1$ de funções conhecidas e o parâmetro Θ_1 é um vetor p_1 -dimencional.

Define-se a região de restrição dos parâmetros estimados $\hat{\Theta}_1$ como:

$$\Omega_{\theta_1} \doteq \{\hat{\Theta}_1 \mid \|\hat{\Theta}_1\| \leq M_\theta, M_\theta > 0\} \quad (2)$$

Define-se:

$$\lambda_c \doteq \lambda_d - k_\lambda (\lambda - \lambda_d) \quad e \quad E \doteq \begin{bmatrix} I_{(n-m) \times (n-m)} \\ 0_{m \times (n-m)} \end{bmatrix}$$

para algum $k_\lambda > 0$.

Teorema: Considere a equação dinâmica com incertezas da planta e distúrbios externos limitados. Define-se o controlador:

$$\dot{\hat{\Theta}}_1 = \begin{cases} -\gamma Y_1^T L \bar{x}_2 & \text{se } \|\hat{\Theta}_1\| < M_\theta \text{ ou } (\|\hat{\Theta}_1\| = M_\theta \text{ e } \bar{x}_2^T L^T Y_1 \hat{\Theta}_1 \geq 0) \\ -\gamma Y_1^T L \bar{x}_2 + \gamma \frac{\bar{x}_2^T L^T Y_1 \hat{\Theta}_1}{\|\hat{\Theta}_1\|^2} \hat{\Theta}_1 & \text{se } \|\hat{\Theta}_1\| = M_\theta \text{ e } \bar{x}_2^T L^T Y_1 \hat{\Theta}_1 < 0 \end{cases}$$
$$\tau = Y_1 \hat{\Theta}_1 - k_0 E \bar{x}_2 - J^T \lambda_c.$$

Manipuladores com restrições

Existe uma escolha de ganhos constantes k_0 tal que:

(1) $\hat{\Theta}_1(t) \in \Omega_{\theta_1}$ e todas as variáveis $q(t)$, $\dot{q}(t)$ e $\tau(t)$ são limitadas para todo $t \geq 0$.

(2) O seguinte critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ é válido:

$$\int_0^T \|\bar{x}(t)\|_Q^2 \leq V(0) + \rho^2 \int_0^T \|d(t)\|^2, \quad \forall T \geq 0$$

para alguma matriz peso escolhida e um nível de atenuação ρ pré-determinado.

Manipuladores com restrições

(3) O erro de força de regime permanente $\lambda - \lambda_d$ é inversamente proporcional ao valor de $k_\lambda + 1$.

(4) Se $d(.) \in L_2[0, \infty) \cap L_\infty[0, \infty)$, então podemos concluir que $\lim_{t \rightarrow \infty} (q^1(t) - q_d^1(t)) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{q}^1(t) - \dot{q}_d^1(t)) = 0$, sendo a função de Lyapunov:

$$V(t, \bar{x}, \tilde{\Theta}_1) = \frac{\alpha}{2} \bar{x}_1^T \bar{x}_1 + \frac{1}{2} \bar{x}_2^T A_L \bar{x}_2 + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\Theta}_1^T \tilde{\Theta}_1$$

para algum $\alpha > 0$, sendo $\gamma > 0$ o ganho adaptativo e $\tilde{\Theta}_1 \doteq \hat{\Theta}_1 - \Theta_1$.

Considere

- k manipuladores com n graus de liberdade
- $q_i \Rightarrow$ coordenadas generalizadas do robô i
- objeto com n graus de liberdade rigidamente fixo aos efetuadores dos manipuladores
- $x_o \Rightarrow$ coordenadas Cartesianas do objeto
- não há posição de singularidade.

Manipuladores cooperativos

Restrições geométricas: $\varphi_i(x_o, q_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$

Pode-se encontrar uma função $\Omega_i(x_o)$ tal que:

$$q_i = \Omega_i(x_o).$$

Restrições de velocidade:

$$\dot{\varphi}_i(x_o, q_i) = J_{o_i}(x_o, q_i)\dot{x}_o + J_i(x_o, q_i)\dot{q}_i = 0,$$

sendo $J_{o_i}(x_o, q_i) = \partial\varphi_i/\partial x_o$ e $J_i(x_o, q_i) = \partial\varphi_i/\partial q_i$. Portanto:

$$\dot{q}_i = -J_i^{-1}(x_o, \Omega_i(x_o))J_{o_i}(x_o, \Omega_i(x_o))\dot{x}_o,$$

Manipuladores cooperativos

Restrições cinemáticas:

$$\theta = \begin{bmatrix} x_o \\ q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o \\ \Omega_1(x_o) \\ \vdots \\ \Omega_k(x_o) \end{bmatrix}, \quad \dot{\theta} = \begin{bmatrix} I_n \\ -J^{-1}(x_o)J_o(x_o) \end{bmatrix} \dot{x}_o \equiv B(x_o)\dot{x}_o,$$

sendo

$$J(x_o) = \begin{bmatrix} J_1(x_o, \Omega_1(x_o)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_k(x_o, \Omega_k(x_o)) \end{bmatrix}, \quad J_o(x_o) = \begin{bmatrix} J_{o_1}(x_o, \Omega_1(x_o)) \\ \vdots \\ J_{o_k}(x_o, \Omega_k(x_o)) \end{bmatrix}$$

Dinâmica do objeto:

$$M_o(x_o)\ddot{x}_o + C_o(x_o, \dot{x}_o)\dot{x}_o + G_o(x_o) = \sum_{i=1}^k J_{o_i}^T(x_o, \Omega_i(x_o))h_i = J_o^T(x_o)h,$$

sendo $h = [h_i^T \cdots h_k^T]^T$, com h_i a força aplicada no objeto pelo efetuador do robô i .

Equação dinâmica do manipulador i :

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + G_i(q_i) = \tau_i + J_i^T(x_o, \Omega_i(x_o))h_i.$$

Dinâmica de manipuladores cooperativos:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_o^T(x_o) \\ J^T(x_o) \end{bmatrix} h,$$

sendo

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} M_o(x_o) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_1(q_1) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_k(q_k) \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_k \end{bmatrix}.$$

Manipuladores cooperativos

Projeção de h no centro de massa do objeto: $h_o = J_{oq}^T(x_o)h$,

$$J_{oq}(x_o) = \begin{bmatrix} J_{o_1}(x_o, \Omega_1(x_o)) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{o_2}(x_o, \Omega_2(x_o)) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{o_k}(x_o, \Omega_k(x_o)) \end{bmatrix}.$$

Força resultante no objeto $h_{ro} = J_o^T(x_o)h$, reescrita como:

$$h_{ro} = A^T h_o,$$

sendo $A^T = [I_n \ I_n \ \cdots \ I_n]$.

A^T tem posto linha pleno.

Subespaço de esmagamento: $X_E = \{h_{oE} \in \Re^{nk} | A^T h_{oE} = 0\}$.

Decomposição ortogonal de h_{oE} :

$$h_o = h_{oE} + h_{oM},$$

sendo

$h_{oE} \in \mathcal{N}(A^T) \Rightarrow$ forças de esmagamento

$h_{oM} \in \mathcal{N}(A^T)^\perp \Rightarrow$ forças de movimento.

Manipuladores cooperativos

Dinâmica de manipuladores cooperativos:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = \begin{bmatrix} A^T h_{oM} \\ \tau + J^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) h_{oM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T \\ J^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) \end{bmatrix} h_{oE}.$$

Definição da entrada de controle auxiliar:

$$\tau_v = \begin{bmatrix} \tau_{v1} \\ \tau_{v2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T h_{oM} \\ \tau + J^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) h_{oM} \end{bmatrix}.$$

Manipuladores cooperativos

Dinâmica de manipuladores cooperativos:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = \tau_v + \overline{A}^T(x_o)h_{oE},$$

com $\overline{A}(x_o) = [A \ J_{oq}^{-1}(x_o)J(x_o)]$.

Torque aplicado:

$$\tau = \tau_{v2} - J^T(x_o)J_{oq}^{-T}(x_o)(A^T)^+\tau_{v1},$$

sendo $(A^T)^+ = A(A^T A)^{-1}$ a pseudo-inversa de A^T .

Manipuladores cooperativos

Considerando as restrições cinemáticas e que $B^T(x_o)\bar{A}^T(x_o)h_{oE} = 0$:

$$\bar{M}(x_o)\ddot{x}_o + \bar{C}(x_o, \dot{x}_o)\dot{x}_o + \bar{G}(x_o) = \bar{\tau}_v,$$

sendo

$$\bar{M}(x_o) = B^T(x_o)M(x_o)B(x_o),$$

$$\bar{C}(x_o, \dot{x}_o) = B^T(x_o)M(x_o)\dot{B}(x_o) + B^T(x_o)C(x_o, \dot{x}_o)B(x_o),$$

$$\bar{G}(x_o) = B^T(x_o)G(x_o)$$

$$\bar{\tau}_v = B^T(x_o)\tau_v.$$

Manipuladores cooperativos subatuados

Restrições cinemáticas:

$$\tilde{\theta} = \begin{bmatrix} x_o \\ q_a \\ q_p \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{\tilde{\theta}} = \begin{bmatrix} I_n \\ -J_{AP}^{-1}(x_o)J_o(x_o) \end{bmatrix} \dot{x}_o \equiv \tilde{B}(x_o)\dot{x}_o,$$

- $q_a \Rightarrow$ juntas ativas
- $q_p \Rightarrow$ juntas passivas
- $J_{AP}(x_o) = [J_a(x_o) \ J_p(x_o)] = J(x_o)P_{AP}$

Manipuladores cooperativos subatuados

Dinâmica de manipuladores cooperativos subatuados:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_o(x_o) & 0 \\ 0 & M_{AP}(\tilde{q}) \end{bmatrix} \ddot{\tilde{\theta}} + \begin{bmatrix} C_o(x_o, \dot{x}_o) & 0 \\ 0 & C_{AP}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \end{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}} + \begin{bmatrix} G_o(x_o) \\ G_{AP}(\tilde{q}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^T h_{oM} \\ \tau_a + J_a^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) h_{oM} \\ J_p^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) h_{oM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T \\ J_a^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) \\ J_p^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) \end{bmatrix} h_{oE}. \end{aligned}$$

Manipuladores cooperativos subatuados

Definição da entrada de controle auxiliar:

$$\tau_v = \begin{bmatrix} \tau_{v1} \\ \tau_{v2} \\ \tau_{v3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T h_{oM} \\ \tau_a + J_a^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) h_{oM} \\ J_p^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) h_{oM} \end{bmatrix} \cdot$$

Torque aplicado nas juntas ativas:

$$\tau_a = \tau_{v2} - J_a^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) \begin{bmatrix} A^T \\ J_p^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \tau_{v1} \\ \tau_{v3} \end{bmatrix} \cdot$$

Manipuladores cooperativos subatuados

Considerando as restrições cinemáticas:

$$\widetilde{M}(x_o)\ddot{x}_o + \widetilde{C}(x_o, \dot{x}_o)\dot{x}_o + \widetilde{G}(x_o) = \widetilde{\tau}_v,$$

sendo

$$\widetilde{M}(x_o) = \widetilde{B}^T(x_o) \begin{bmatrix} M_o(x_o) & 0 \\ 0 & M_{AP}(\widetilde{q}) \end{bmatrix} \widetilde{B}(x_o),$$

$$\widetilde{C}(x_o, \dot{x}_o) = \widetilde{B}^T(x_o) \left(\begin{bmatrix} M_o(x_o) & 0 \\ 0 & M_{AP}(\widetilde{q}) \end{bmatrix} \dot{\widetilde{B}}(x_o) + \begin{bmatrix} C_o(x_o, \dot{x}_o) & 0 \\ 0 & C_{AP}(\widetilde{q}, \dot{\widetilde{q}}) \end{bmatrix} \widetilde{B}(x_o) \right),$$

$$\widetilde{G}(x_o) = \widetilde{B}^T(x_o) \begin{bmatrix} G_o(x_o) \\ G_{AP}(\widetilde{q}) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\tau}_v = \widetilde{B}^T(x_o)\tau_v.$$

Controle das forças de esmagamento

Controle integral das forças.

Manipuladores totalmente atuados:

$$\tau_E = D^T(x_o) \left[h_{oE}^d + K_i \int (h_{oE}^d - h_{oE}) dt \right],$$

com

$$D(x_o) = \begin{bmatrix} J_{o_1}^{-1}(\cdot) J_1(\cdot) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{o_k}^{-1}(\cdot) J_k(\cdot) \end{bmatrix}.$$

Controle das forças de esmagamento

Manipuladores subatuados:

$$\begin{bmatrix} \tau_{Ea} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_a^T(x_o) \\ D_p^T(x_o) \end{bmatrix} \bar{h}_{oE} = \begin{bmatrix} D_a^T(x_o) \\ D_p^T(x_o) \end{bmatrix} \hat{A}^T \lambda_E,$$

sendo $[D_a(x_o) \ D_p(x_o)] = D(x_o)P_{AP}$. Particiona-se o vetor λ_E :

- $\lambda_{Ec} \Rightarrow$ componentes independentemente controlados,
- $\lambda_{En} \Rightarrow$ componentes não controlados.

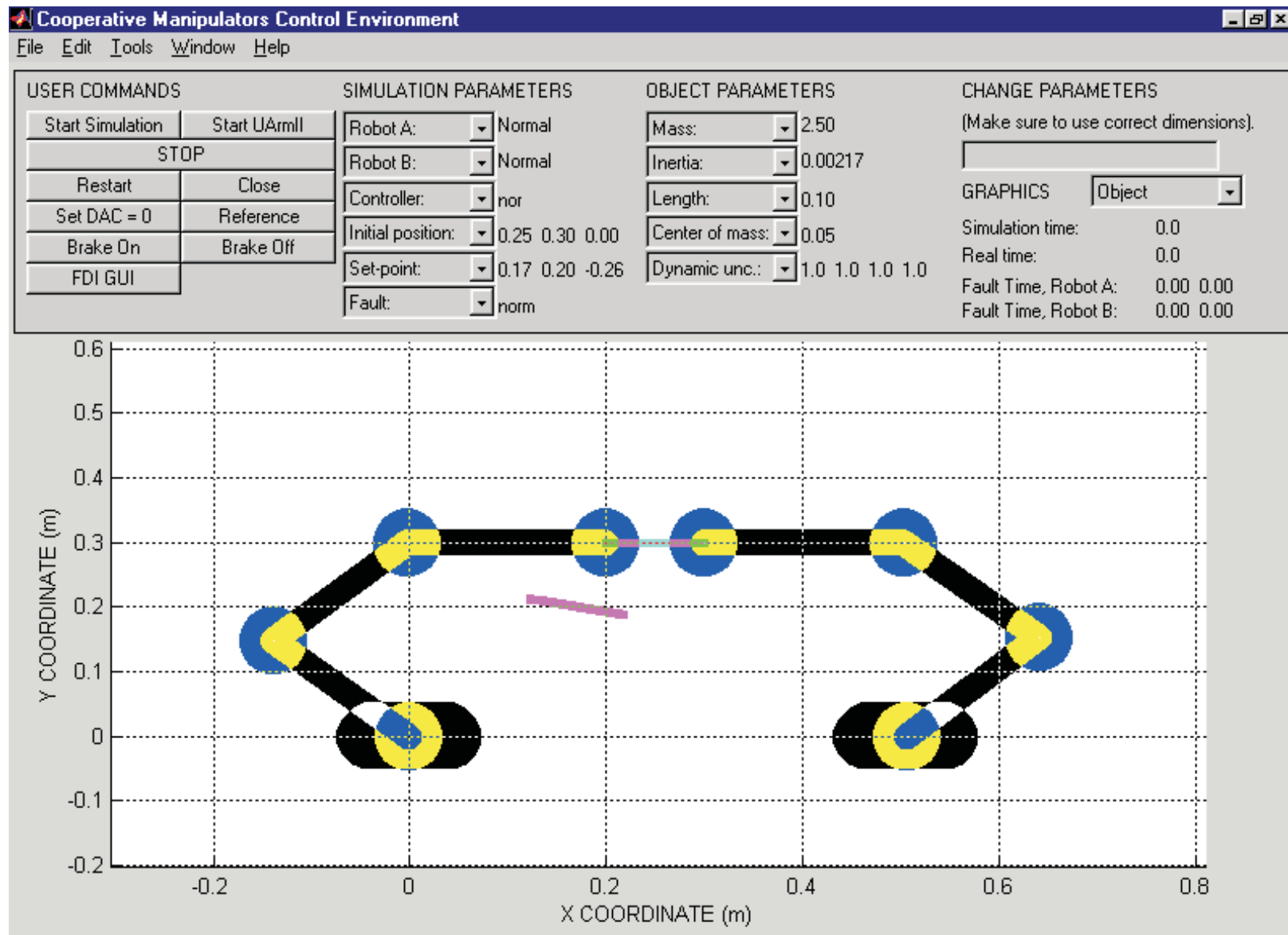
Controle das forças de esmagamento λ_{Ec} :

$$\lambda_{Ec} = \left[\lambda_{Ec}^d + K_{i_E} \int (\lambda_{Ec}^d - \lambda_{Ec}) dt \right].$$

UArm II cooperativo

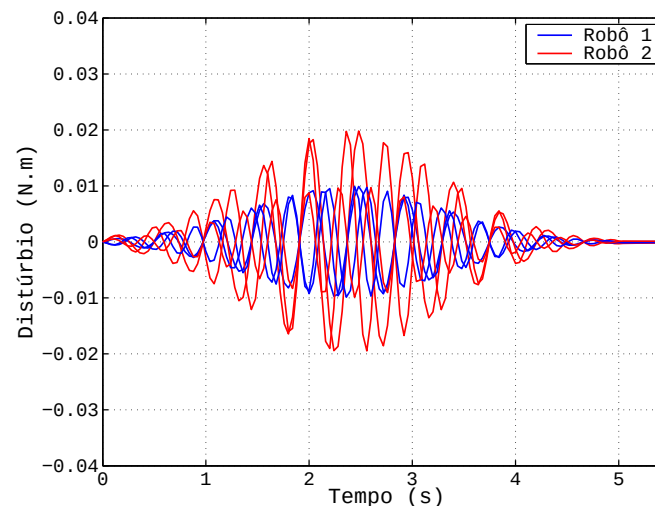


Ambiente de simulação e controle



Resultados experimentais

- Posição inicial: $x_o = [0.2m \ 0.35m \ 0^\circ]^T$
- Trajetória linear, posição final: $x_o^d(t_f) = [0.25m \ 0.40m \ 0^\circ]^T$
- Tempo desejado: $t_f = 5.0 \text{ s}$
- Configuração subatuada: junta 1 do manipulador 2 é passiva
- Forças de esmagamento desejadas: $h_{oE}^d = 0$ e $\lambda_{Ec}^d = 0$
- Distúrbios:



Controle quase-LPV, real. do estado

Manipuladores totalmente atuados e subatuados:

- Parâmetro: $\rho(\tilde{x}) = \tilde{x}_o$
- Variação: $\rho \in [-0.1, 0.1]m \times [-0.05, 0.05]m \times [-9, 9]^\circ$
- Taxa de variação: $|\dot{\rho}| \leq [0.06m/s \ 0.06m/s \ 6^\circ/s]$
- Funções base: $f_1(\rho(\tilde{x})) = 1, \ f_2(\rho(\tilde{x})) = \tilde{x}_{o_X},$
 $f_3(\rho(\tilde{x})) = \tilde{x}_{o_Y}, \ f_4(\rho(\tilde{x})) = \cos(\tilde{x}_{o_\phi})$
- Nível de atenuação: $\gamma = 1.25$

Controle $\mathcal{H}_\infty$ via teoria dos jogos

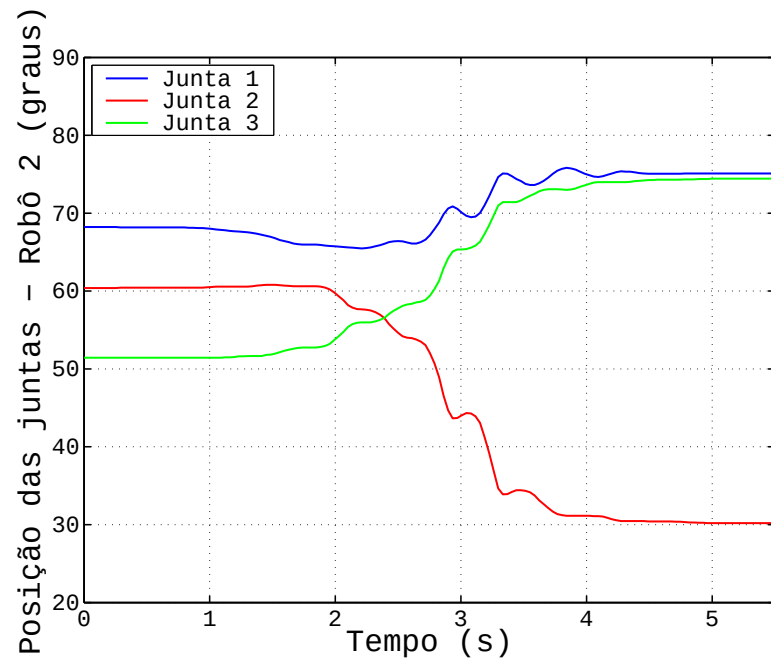
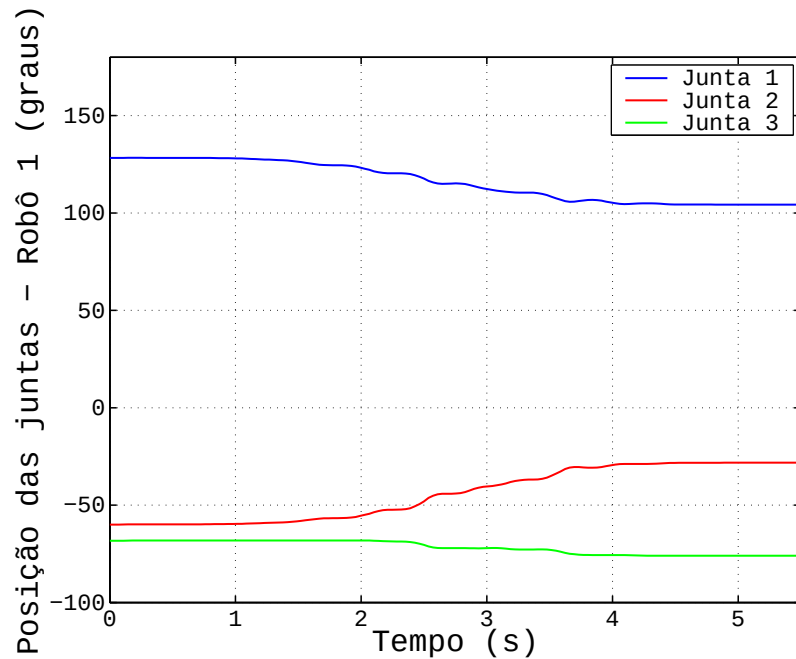
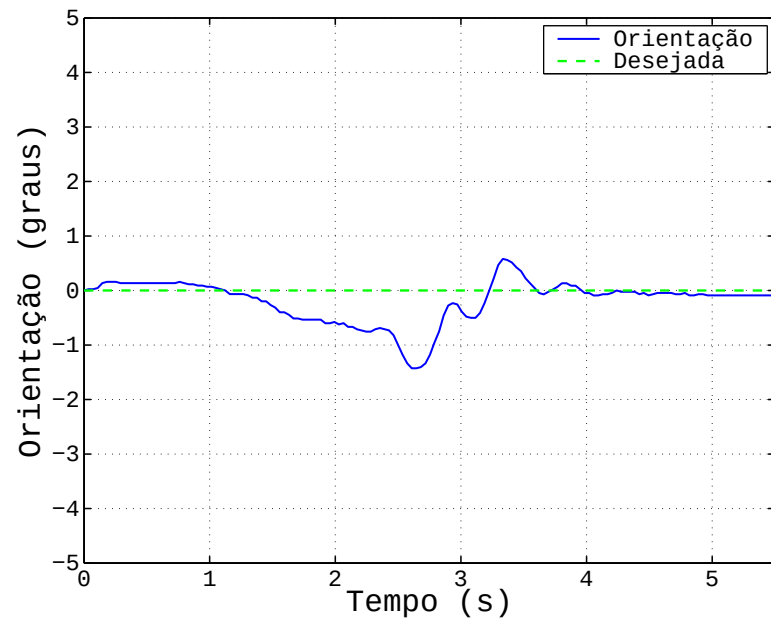
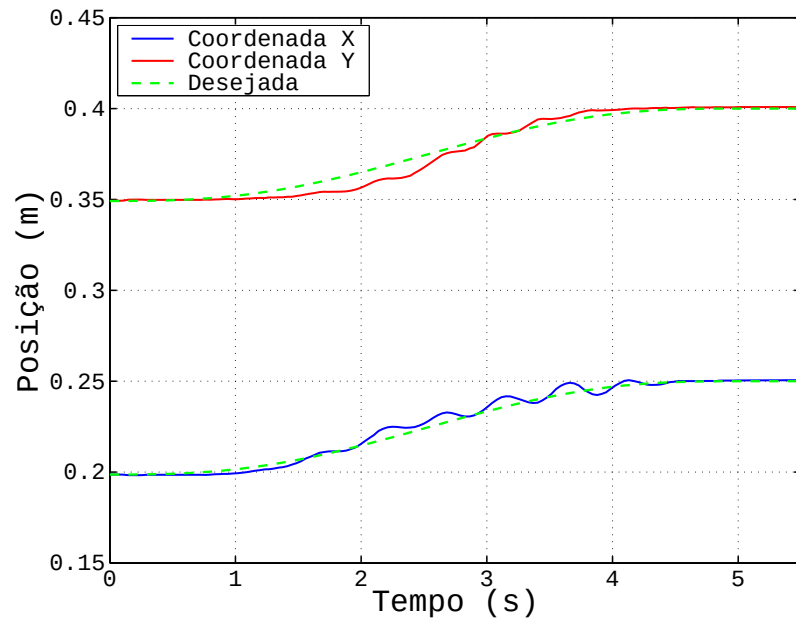
- Manipuladores totalmente atuados: $\gamma = 4$

$$Q_1 = I_3, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad Q_{12} = 0 \text{ e } R = I_3,$$

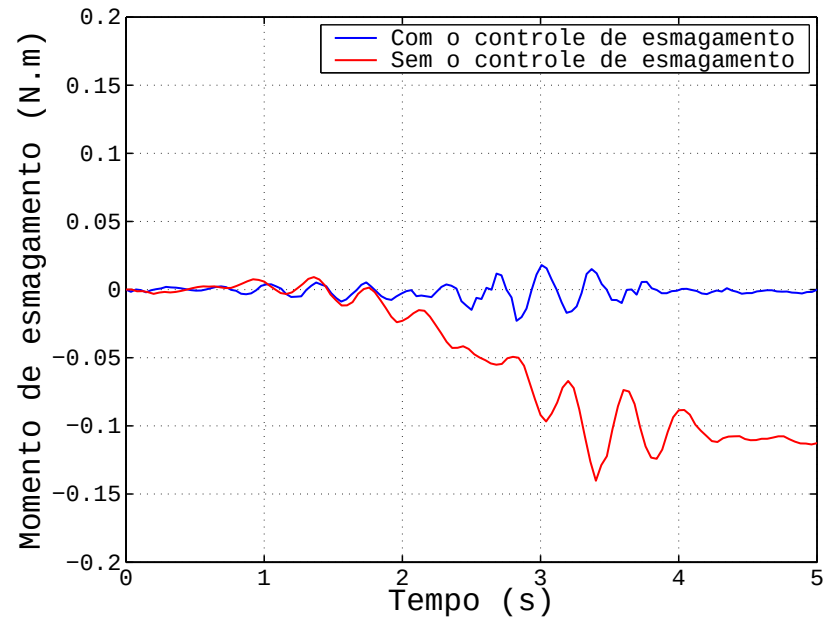
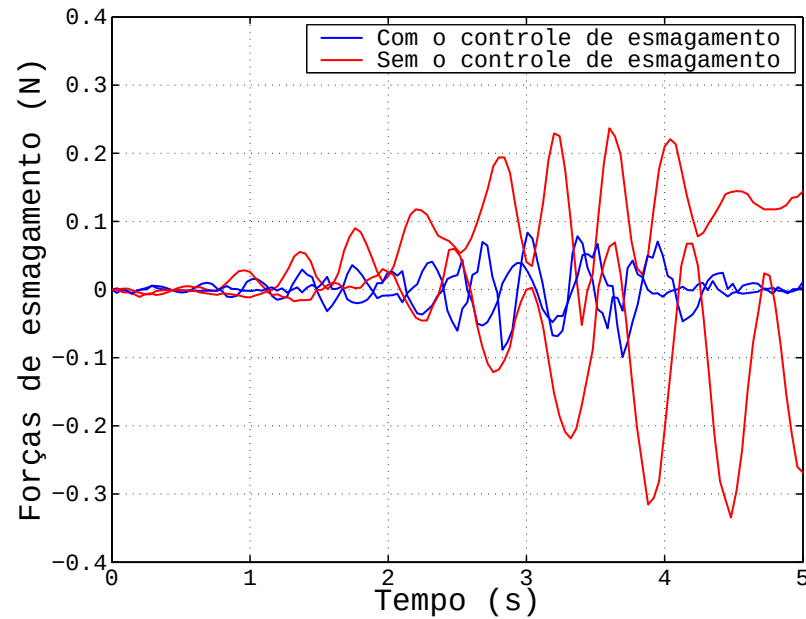
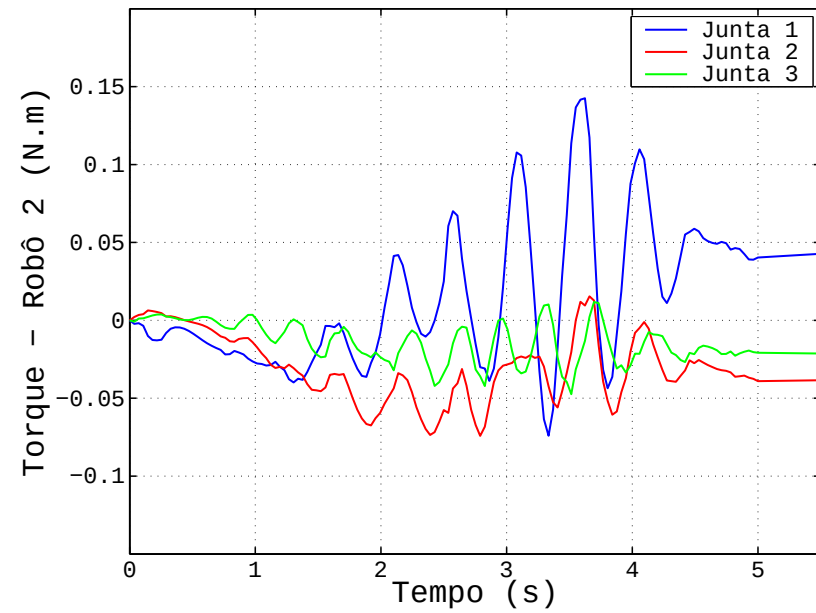
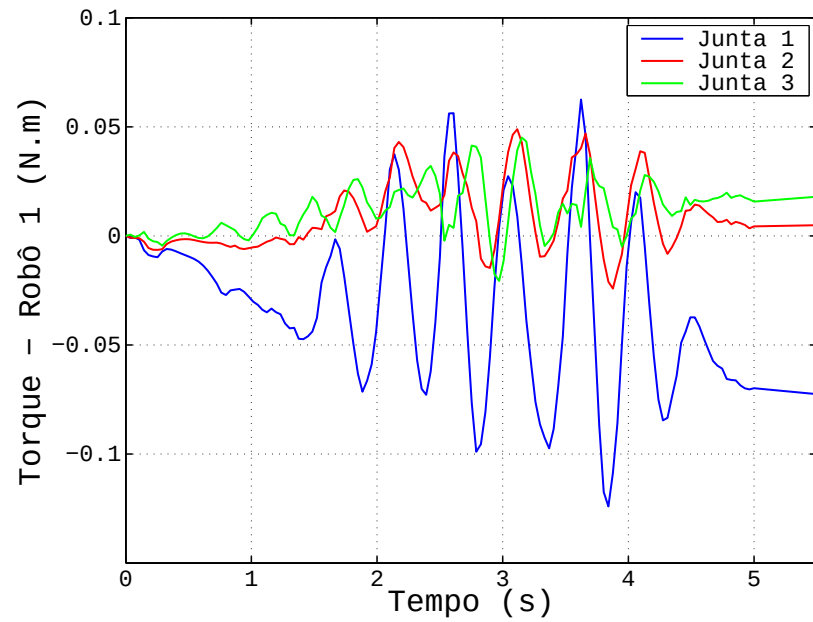
- Manipuladores subatuados: $\gamma = 4$

$$Q_1 = I_3, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 12.5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad Q_{12} = 0 \text{ e } R = I_3,$$

Controle quase-LPV, tot. atuados



Controle quase-LPV, tot. atuados



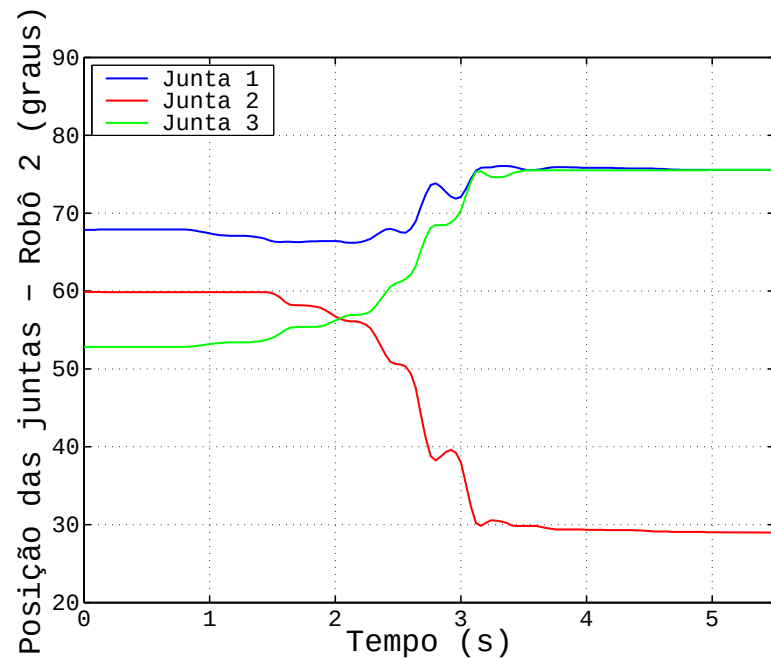
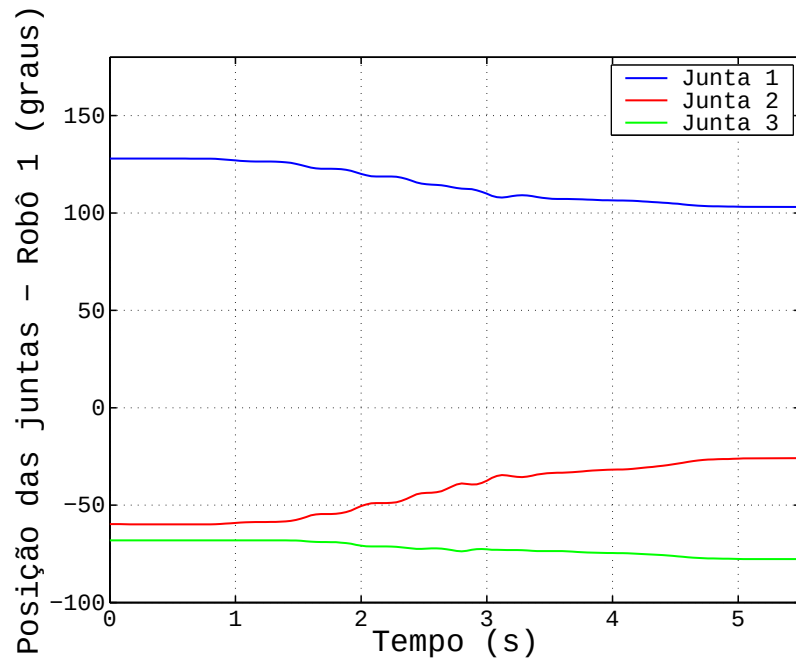
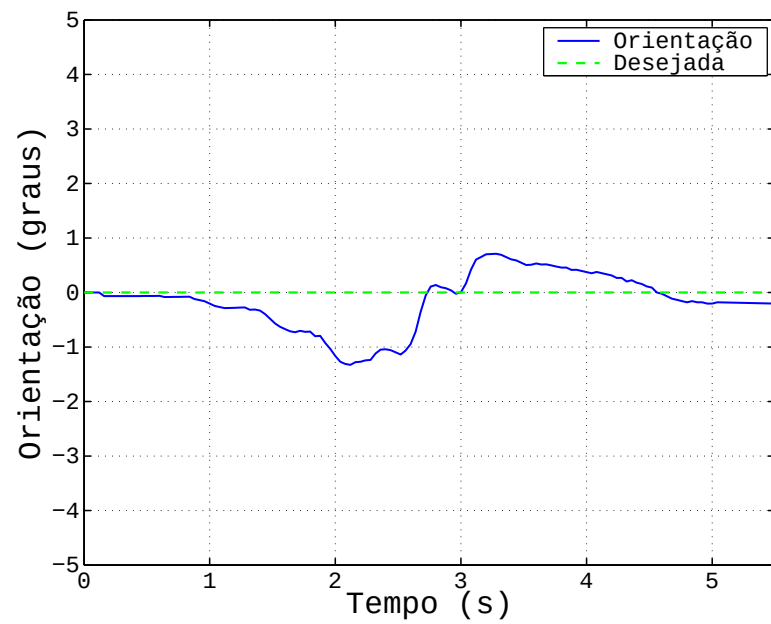
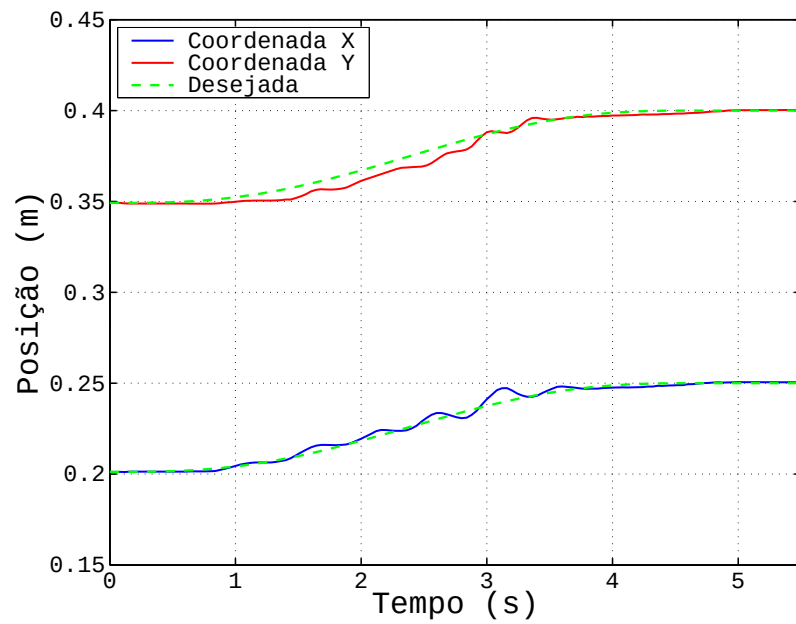
Índices de desempenho: tot. atuados

$\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$, $E[\tau]$ e somatório das áreas das forças de esmagamento:

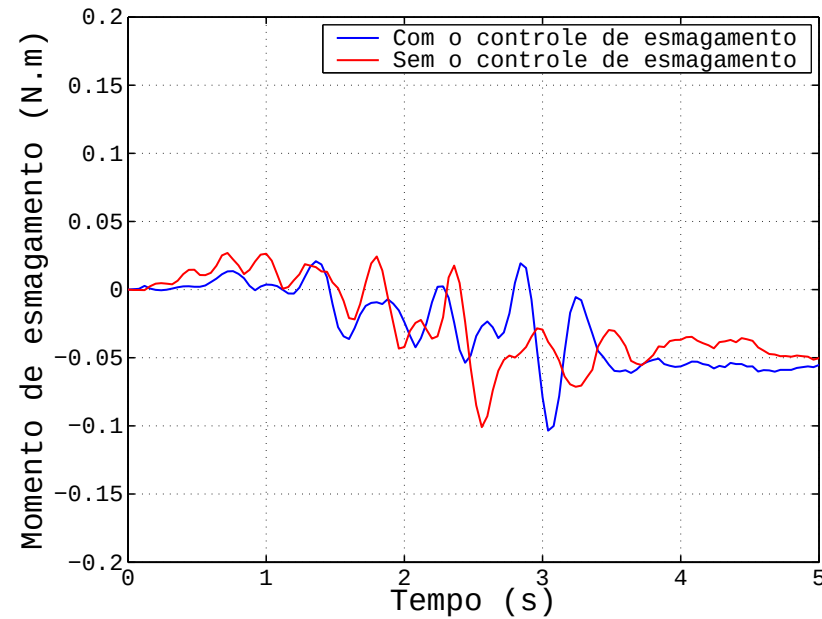
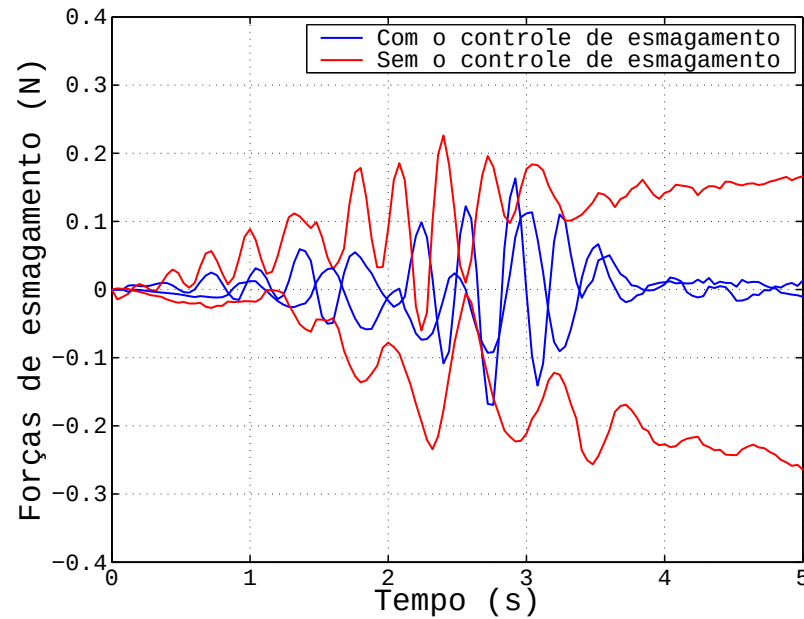
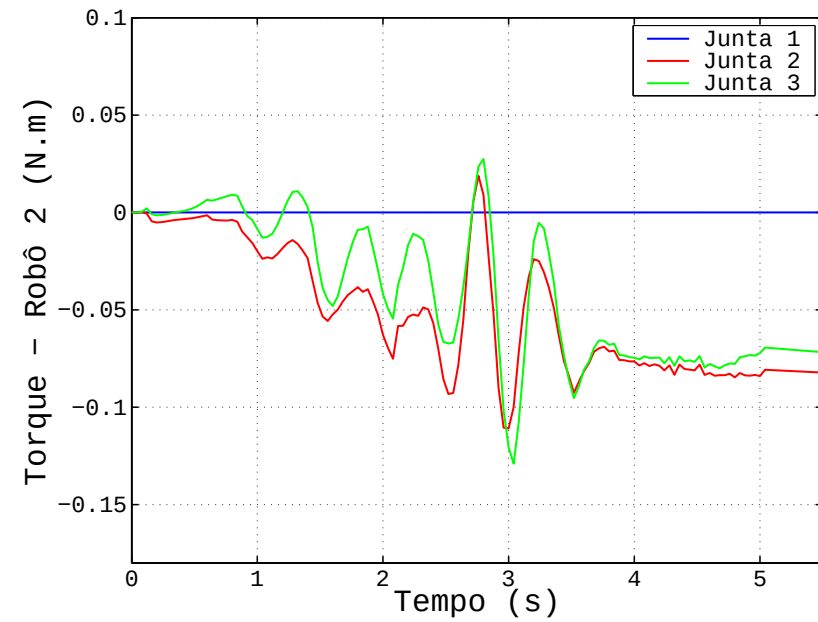
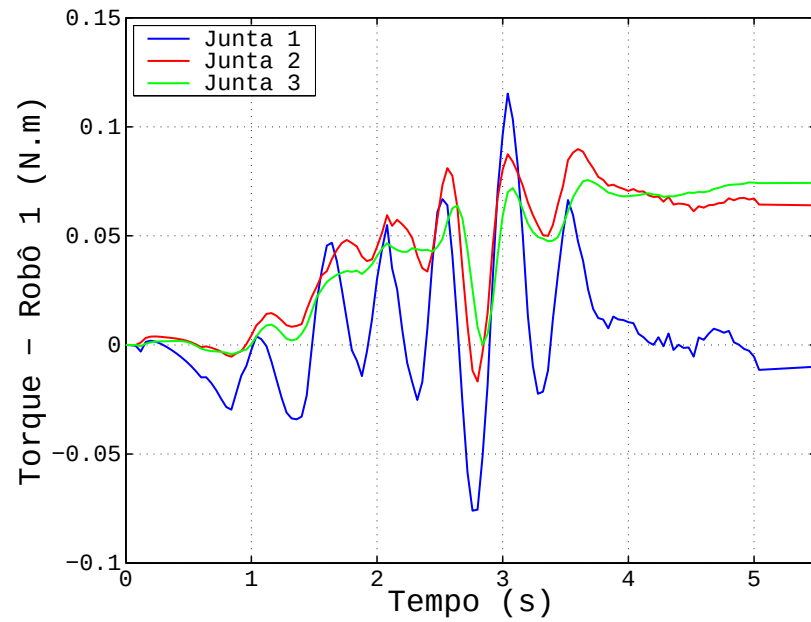
$$E[h_{oE}] = \sum_{i=0}^n \left(\int_{t_0}^{t_r} |h_{oE_i}(t)| dt \right).$$

Controlador	$\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$	$E[\tau]$ (Nms)	$E[h_{oE}]$ (Ns)
Via representação quase-LPV	0.01815	0.8318	0.2193
Via teoria dos jogos	0.01158	1.1200	0.3875

Controle quase-LPV, subatuados



Controle quase-LPV, subatuados



Índices de desempenho: subatuados

Controlador	$\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$	$E[\tau]$ (Nms)	$E[h_{oE}]$ (Ns)
Via representação quase-LPV	0.0154	0.9976	0.4477
Via teoria dos jogos	0.0103	1.0609	0.3973
Híbrido [TINÓS (2003)]	0.0128	1.7781	0.5741