# SEM5875 - Controle de Sistemas Robóticos

Adriano A. G. Siqueira

Aula 6 - Manipuladores Subatuados

Divide-se o vetor das posições, $q$, em:

- $q_c \in \Re^{n_a}$, juntas controladas,
- $q_r \in \Re^{n-n_a}$, juntas restantes.

Há duas possibilidades:

1. $q_c$ contém somente juntas passivas: quando $n_p \geq n_a$ e todas as outras juntas passivas, se houver alguma, são mantidas freadas;
2. $q_c$ contém juntas ativas e passivas: quando $n_p < n_a$.

Partição da equação de um manipulador totalmente atuado:

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_a(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) \\ \delta_u(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{ar}(q) & M_{ac}(q) \\ M_{ur}(q) & M_{uc}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_c \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} C_{ar}(q, \dot{q}) & C_{ac}(q, \dot{q}) \\ C_{ur}(q, \dot{q}) & C_{uc}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_a(\dot{q}) \\ F_u(\dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_a(q) \\ G_u(q) \end{bmatrix}.$$

Isolando o vetor $\ddot{q}_r$ na segunda linha e substituindo na primeira linha, obtém-se:

$$\tau_a + \overline{\delta}(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) = \overline{M}_0(q)\ddot{q}_c + \overline{C}_0(q, \dot{q})\dot{q}_c +$$

$$\overline{E}_0(q, \dot{q})\dot{q}_r + \overline{F}_0(q, \dot{q}) + \overline{G}_0(q),$$

com

$$\begin{aligned}
\overline{M}_0(q) &= M_{ac}(q) - M_{ar}(q)M_{ur}^{-1}(q)M_{uc}(q), \\
\overline{C}_0(q, \dot{q}) &= C_{ac}(q, \dot{q}) - M_{ar}(q)M_{ur}^{-1}(q)C_{uc}(q, \dot{q}), \\
\overline{E}_0(q, \dot{q}) &= C_{ar}(q, \dot{q}) - M_{ar}(q)M_{ur}^{-1}(q)C_{ur}(q, \dot{q}), \\
\overline{F}_0(q, \dot{q}) &= F_a(\dot{q}) - M_{ar}(q)M_{ur}^{-1}(q)F_u(\dot{q}), \\
\overline{G}_0(q) &= G_a(q) - M_{ar}(q)M_{ur}^{-1}(q)G_u(q), \\
\overline{\delta}(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) &= \delta_a(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) - M_{ar}(q)M_{ur}^{-1}(q)\delta_u(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d).
\end{aligned}$$

Define-se o estado:

$$\widetilde{x}_c = \begin{bmatrix} \dot{q}_c - \dot{q}_c^d \\ \\ q_c - q_c^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\widetilde{q}}_c \\ \\ \widetilde{q}_c \end{bmatrix}.$$

Espaço de estados de manipuladores subatuados:

$$\dot{\widetilde{x}}_c = \begin{bmatrix} -\overline{M}_0^{-1}(q)\overline{C}_0(q,\dot{q}) & 0 \\ \\ I & 0 \end{bmatrix} \widetilde{x}_c + \begin{bmatrix} I \\ \\ 0 \end{bmatrix} \overline{u} + \begin{bmatrix} I \\ \\ 0 \end{bmatrix} \overline{w},$$

com

$$\tau_a = \overline{M}_0(q)(\ddot{q}_c^d + \overline{u}) + \overline{C}_0(q,\dot{q})\dot{q}_c^d + \overline{E}_0(q,\dot{q})\dot{q}_r + \overline{F}_0(q,\dot{q}) + \overline{G}_0(q).$$

Partição da equação de um manipulador totalmente atuado:

$$\begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_r(q,\dot{q},\ddot{q},\tau_d) \\ \delta_c(q,\dot{q},\ddot{q},\tau_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{rr}(q) & M_{rc}(q) \\ M_{cr}(q) & M_{cc}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_c \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} C_{rr}(q,\dot{q}) & C_{rc}(q,\dot{q}) \\ C_{cr}(q,\dot{q}) & C_{cc}(q,\dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_r(\dot{q}) \\ F_c(\dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_r(q) \\ G_c(q) \end{bmatrix}.$$

A equação no espaço de estados fica:

$$\dot{\widetilde{x}}_c = \overline{A}_T(q,\dot{q},t)\widetilde{x}_c + T_0^{-1}\begin{bmatrix} M_{cc}^{-1}(q) \\ 0 \end{bmatrix}[T_{11}(-\overline{F}(x_e)+\overline{\tau})+\overline{w}],$$

com

$$\overline{A}_T(q,\dot{q},t) = T_0^{-1}\begin{bmatrix} -M_{cc}^{-1}(q)C_{cc}(q,\dot{q}) & 0 \\ T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1}T_{12} \end{bmatrix}T_0,$$

$$\begin{aligned}\overline{F}(x_e) =& M_{cc}(q)(\ddot{q}_c^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\widetilde{q}}_c) + C_{cc}(q,\dot{q})(\dot{q}_c^d - T_{11}^{-1}T_{12}\widetilde{q}_c) \\ &+ F_c(\dot{q}) + G_c(q).\end{aligned}$$

O torque aplicado nas ativas é calculado por:

$$\tau_a = \left(M_{ac}(q) - M_{ar}(q)M_{ur}^{-1}(q)M_{uc}(q)\right)\ddot{q}_c +$$

$$b_a(q,\dot{q}) - M_{ar}(q)M_{ur}^{-1}(q)b_u(q,\dot{q}),$$

com

$$\ddot{q}_c = \ddot{q}_c^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\widetilde{q}}_c - T_{11}^{-1}M_{cc}^{-1}(q_c)\left(C_{cc}(q_c,\dot{q}_c)B^T T_0 \widetilde{x}_c - \overline{u}\right).$$

e $\quad \overline{u} = -R^{-1}B^T T_0 \widetilde{x}_c.$

A matriz $P(\widetilde{x}_c, t)$ é escolhida como:

$$P(\widetilde{x}_c, t) = T_0^T \begin{bmatrix} M_{cc}(\widetilde{x}_c, t) & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} T_0.$$

- $M_{cc} \Rightarrow$ positiva definida,
- $(C_{cc}(q_c, \dot{q}_c) - \frac{1}{2}\dot{M}_{cc}(q_c, \dot{q}_c)) \Rightarrow$ anti-simétrica.

Parametrização linear:

$$\overline{F}(x_{e_c}) = \overline{Y}(q_c, \dot{q}_c, \dot{q}_c^d - T_{11}T_{12}\widetilde{x}_{c_2}, \ddot{q}_c^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\widetilde{x}}_{c_2})\overline{\theta}.$$

Lei de controle adaptativa:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\overline{\theta}}} &= -\overline{S}^{-1}\overline{Y}^T(\cdot)T_{11}B^T T_0 \widetilde{x}_c, \\
\overline{\tau} &= \overline{Y}(\cdot)\hat{\overline{\theta}} - T_{11}^{-1}R^{-1}B^T T_0 \widetilde{x}_c.
\end{aligned}$$

Torque nas ativas:

$$\tau_a = \left(\hat{M}_{ac}(q) - \hat{M}_{ar}(q)\hat{M}_{ur}^{-1}(q)\hat{M}_{uc}(q)\right)\ddot{q}_c$$
$$+ \hat{b}_a(q,\dot{q}) - \hat{M}_{ar}(q)\hat{M}_{ur}^{-1}(q)\hat{b}_u(q,\dot{q}),$$

com

$$\ddot{q}_c = -\hat{M}_{cc}^{-1}(q)\left(\hat{C}_{cc}(q,\dot{q})\dot{q}_c + \hat{F}_c(\dot{q}) + \hat{G}_c(q) - \overline{\tau}\right).$$

$\hat{M}$, $\hat{C}$ $\Rightarrow$ valores estimados.

A equação de um manipulador pode ser reescrita por:

$$\tau + \delta(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) = M_0(q)\ddot{q} + D_0(q, \dot{q})\dot{q} + F_0(\dot{q}) + G_0(q),$$

com $V(q, \dot{q}) = D_0(q, \dot{q})\dot{q} + \Delta D(q, \dot{q})\dot{q}$.

Considera-se que apenas uma junta passiva, $q_u$, é controlada por uma junta ativa, $q_a$.

Após a partição tem-se:

$$\tau_a + \overline{\delta}(q,\dot{q},\ddot{q},\tau_d) = \overline{M}_0(q)\ddot{q}_u + \overline{D}_0(q,\dot{q})\dot{q}_u + \overline{E}_0(q,\dot{q})\dot{q}_a + \overline{F}_0(\dot{q}) + \overline{G}_0(q),$$

com

$$\begin{aligned}
\overline{M}_0(q) &= M_{au}(q) - M_{aa}(q)M_{ua}^{-1}(q)M_{uu}(q),\\
\overline{D}_0(q,\dot{q}) &= D_{au}(q,\dot{q}) - M_{aa}(q)M_{ua}^{-1}(q)D_{uu}(q,\dot{q}),\\
\overline{E}_0(q,\dot{q}) &= D_{aa}(q,\dot{q}) - M_{aa}(q)M_{ua}^{-1}(q)D_{ua}(q,\dot{q}),\\
\overline{F}_0(\dot{q}) &= F_a(\dot{q}) - M_{aa}(q)M_{ua}^{-1}(q)F_u(\dot{q}),\\
\overline{G}_0(q) &= G_a(q) - M_{aa}(q)M_{ua}^{-1}(q)G_u(q),\\
\overline{\delta}(q,\dot{q},\ddot{q},\tau_d) &= \delta_a(q,\dot{q},\ddot{q},\tau_d) - M_{aa}(q)M_{ua}^{-1}(q)\delta_u(q,\dot{q},\ddot{q},\tau_d).
\end{aligned}$$

A equação no espaço de estados fica:

$$\dot{\widetilde{x}}_u = \overline{A}_T(\widetilde{x}_u, t)\widetilde{x}_u + T_0^{-1}\begin{bmatrix} \overline{M}_0^{-1}(q) \\ 0 \end{bmatrix}\left[T_{11}(-\overline{F}(x_e) + \tau_a) + \overline{w}\right],$$

com

$$\overline{A}_T(\widetilde{x}_u, t) = T_0^{-1}\begin{bmatrix} -\overline{M}_0(q)^{-1}\overline{D}_0(q, \dot{q}) & 0 \\ T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1}T_{12} \end{bmatrix} T_0,$$

$$\begin{aligned}\overline{F}(x_e) =& \overline{M}_0(q)(\ddot{q}_u^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\widetilde{q}}_u) + \overline{D}_0(q, \dot{q})(\dot{q}_u^d - T_{11}^{-1}T_{12}\widetilde{q}_u) \\ &+ \overline{E}_0(q, \dot{q})\dot{q}_a + \overline{F}_0(\dot{q}) + \overline{G}_0(q).\end{aligned}$$

Torque aplicado nas juntas ativas:

$$\tau_a = \overline{F}(x_{e_u}, \overline{\Theta}) + T_{11}^{-1}\overline{u}.$$

Uma junta passiva é controlada por uma junta ativa $\Rightarrow \overline{M}_0(q)$ é escalar e sempre negativa.

$$P_u(\widetilde{x}_u, t) = T_0^T \begin{bmatrix} -\overline{M}_0(\widetilde{x}_u, t) & 0 \\ 0 & K_c \end{bmatrix} T_0 > 0.$$

Portanto: $\overline{u} = +R^{-1}B^T T_0 \widetilde{x}_u$.

Definição de $D_0(q,\dot{q})$:

$$\overline{D}_0(q,\dot{q}) - \frac{1}{2}\dot{\overline{M}}_0(q,\dot{q}) \Rightarrow \text{anti-simétrica.}$$

Lei de controle dada por:

$$\dot{\overline{\Theta}} = +\,\overline{Z}^{-T}\overline{\Xi}^{T} T_{11} B^T T_0 \widetilde{x}_u,$$

$$\tau_a = \overline{\Xi\Theta} + T_{11}^{-1} R^{-1} B^T T_0 \widetilde{x}_u.$$