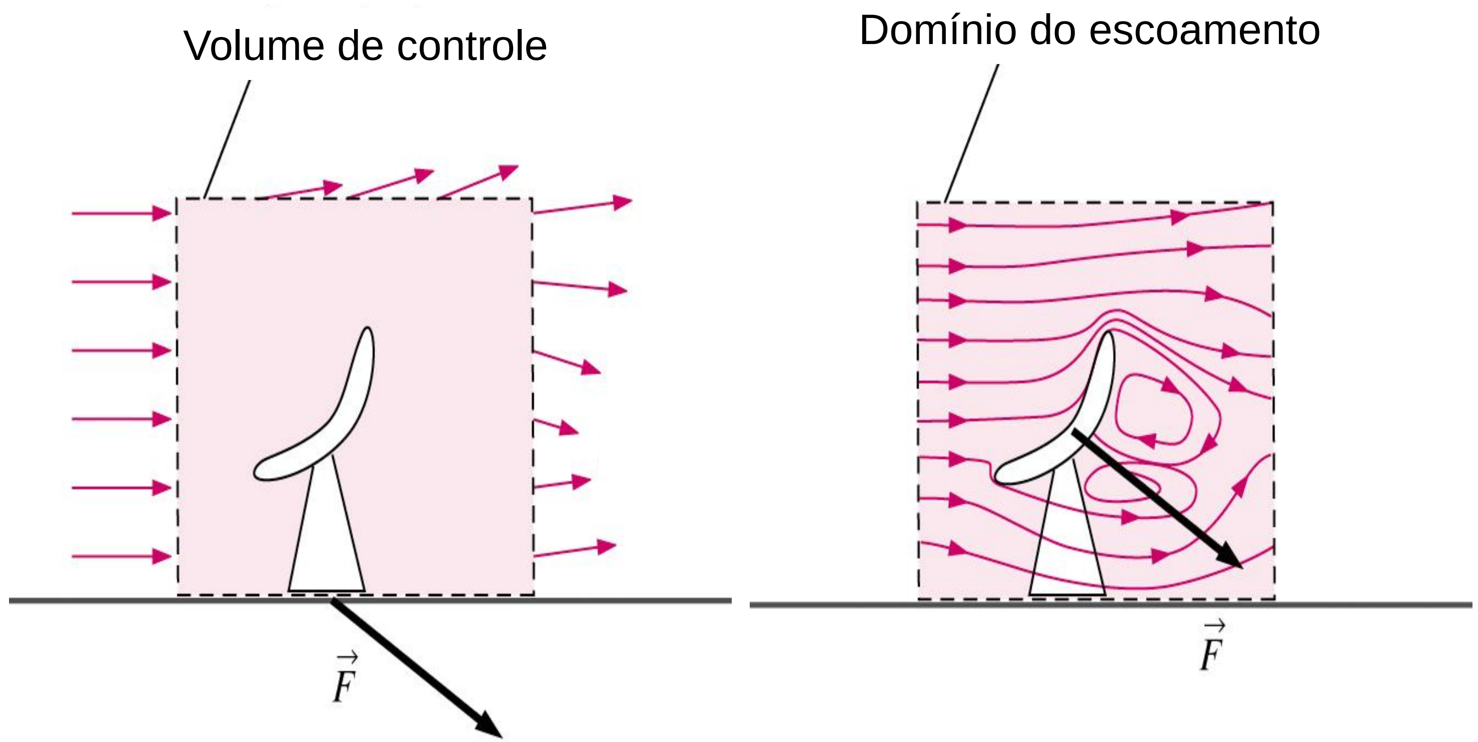
12ª aula PME 3230
2016

Análise Diferencial de Escoamentos de Fluidos

Prof. Dr. Marcos Tadeu Pereira

- Equações com Volume de Controle (VC) para Leis de *Conservação de Massa*, de *Energia* e de *Quantidade de Movimento*
- As equações em VC, ou integrais são úteis para determinar efeitos globais
- Todavia, não se pode obter conhecimento detalhado sobre o escoamento ***dentro*** do VC $\Rightarrow$ motivação para **análise diferencial**



Recordação

Teorema da Divergência ou de Gauss: permite transformar uma integral de volume da divergência de um vetor em uma integral de área sobre a superfície que define o volume.

$$\int_{Vol} \nabla . \vec{G} dV_{ol} = \int_{A} \vec{G} . \vec{n} dA$$

- Operador Nabla:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

- Operador Laplaceano:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Gradiente:

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

- Vetor Gradiente:

$$\nabla \mathbf{u} = (\nabla u, \nabla v, \nabla w)$$

- Divergente:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

- Derivada Direcional:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

Conservação de massa na forma diferencial – *1º modo*

Tomando a eq da conservação da massa para um VC na forma integral:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dVC + \int_{SC} \rho \overrightarrow{v}.\ \vec{n} dA = 0$$

e usando o teorema da Divergência para substituir a integral de área:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dVC + \int_{SC} \rho \overrightarrow{v}. \vec{n} dA = \int_{VC} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \vec{v}) \right] dVC = 0$$

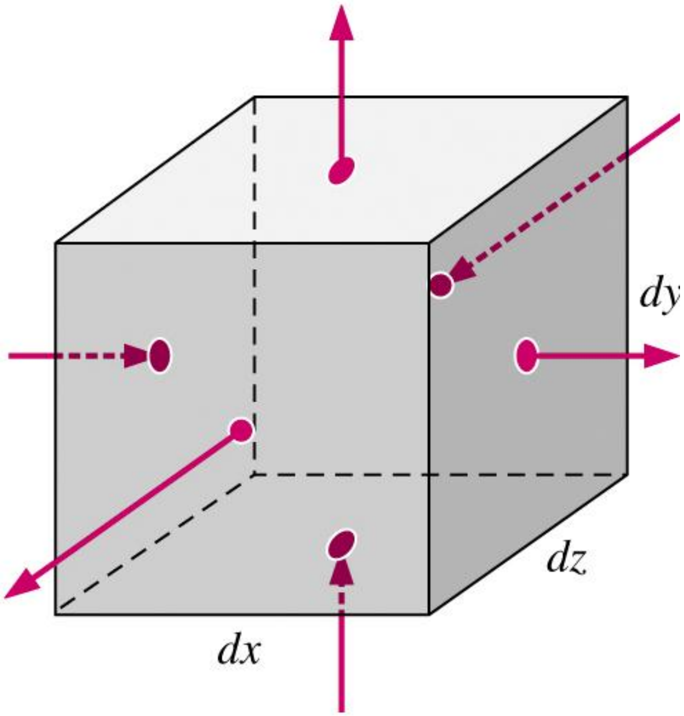
e como a integral vale para qualquer VC, então tem-se a **equação diferencial da conservação da massa**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \vec{v}) = 0$$

Conservação de massa na forma diferencial – *2º modo*

Define-se um VC infinitesimal *dx dy dz*

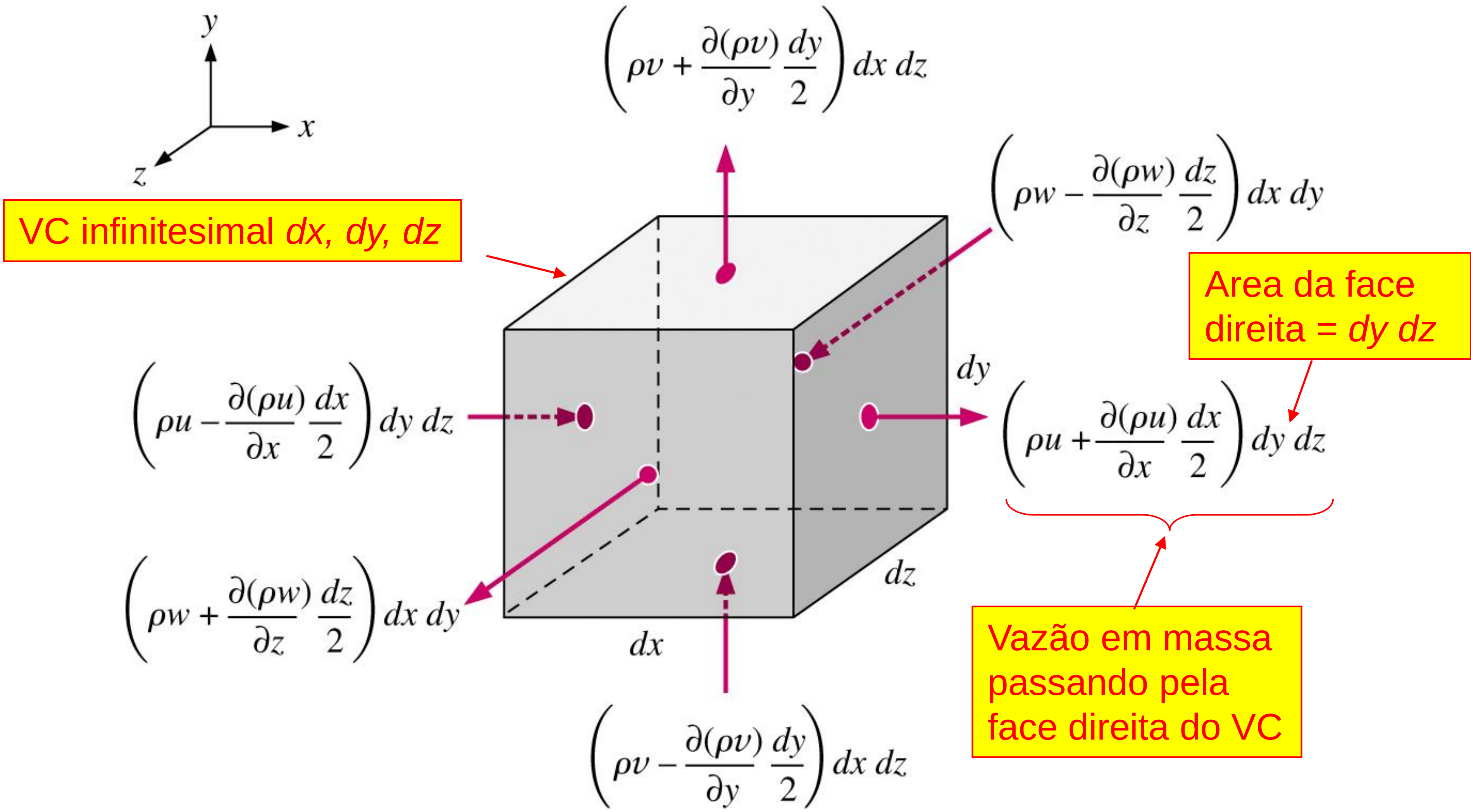
Pode-se então aproximar a vazão mássica entrando ou saindo de cada uma das 6 faces usando expansão em séries de Taylor



Por ex., ao redor do ponto central, na face direita e ignorando os termos de ordem > dx:

$$(\rho u)_{\text{centro da face direita}} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2} + \cancel{\frac{1}{2!}\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial x^2}}\left(\frac{dx}{2}\right)^2 + \ldots$$

Conservação de massa na forma diferencial



A seguir, somam-se as vazões em massa que entram e saem das 6 faces do VC

Vazão líquida de massa entrando no VC:

$$\sum_{in} \dot{m} \approx \left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz + \left(\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz + \left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dx}{2}\right) dx\, dy$$

Vazão líquida de massa saindo do VC:

$$\sum_{out} \dot{m} \approx \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz + \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz + \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dx}{2}\right) dx\, dy$$

Tomando-se a equação da conservação da massa na forma integral se tem:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dVC = \sum_{in} \dot{m} - \sum_{out} \dot{m}$$

Após as substituições das equações:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \frac{\partial(\rho w)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

e, dividindo pelo volume *dxdydz, resulta*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Ou, se for aplicada a definição da divergência de um vetor:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . (\rho \vec{v}) = 0$$

Equação da conservação da massa, diferencial

Equação da Conservação da Massa

Na forma integral:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dVC + \int_{SC} \rho \vec{v} . \vec{n} dA = 0$$

Na forma diferencial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . (\rho \vec{v}) = 0$$

Casos particulares da Eq. Continuidade Diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{V}\right) = 0$$

Fluido Compressível em regime permanente:

$$\nabla.(\rho \vec{v}) = 0 \quad ou \quad \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad ou \quad div(\rho \vec{v}) = 0$$

Fluido Incompressível em regime permanente:

$$\rho = const \rightarrow \nabla.\vec{v} = 0 \quad ou \quad div\vec{v} = 0 \quad ou$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

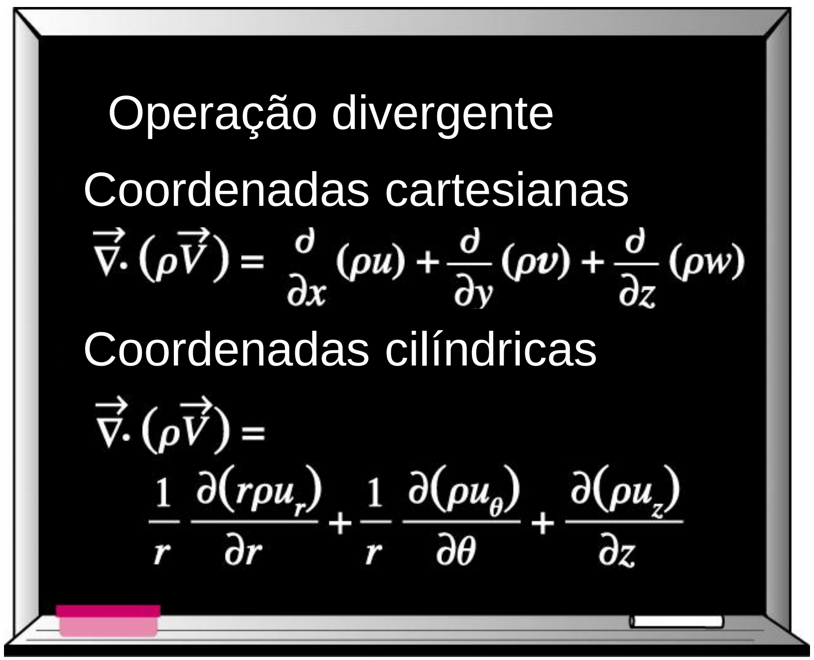
Relação poderosa

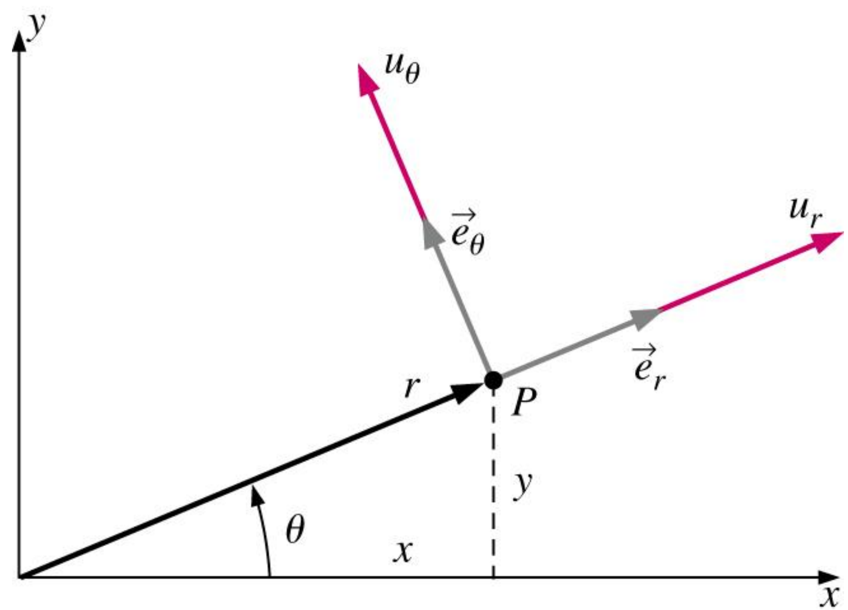
Perceba que não é preciso ser regime permanente

Continuidade em coordenadas cilíndricas

Há muitos problemas que são mais simples de resolver se as equações forem escritas em coordenadas cilíndrico-polares

A forma mais fácil de conversão a partir das Coord Cartesianas é usando a forma vetorial e a definição de operador divergente em coordenadas cilídricas





Continuidade em coordenadas cilíndricas

$$\nabla = \frac{1}{r}\frac{\partial(r)}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\hat{e}_z$$

$$\vec{V} = U_r\hat{e}_r + U_\theta\hat{e}_\theta + U_z\hat{e}_z$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho U_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho U_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} = 0$$

Continuidade em coordenadas cilíndricas

- Escoamento em **Regime Permanente Compressível**

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \nabla . (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\nabla . (\rho \vec{v}) = 0$$

Cartesianas $$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial \mathbf{z}} = 0$$

Cilíndricas $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho U_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho U_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} = 0$$

Continuidade em coordenadas cilíndricas

- **Escoamento incompressível**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{e } \rho = \text{constante}$$

$$\nabla . \vec{v} = 0$$

Cartesianas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Cilíndricas

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rU_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (U_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (U_z)}{\partial z} = 0$$

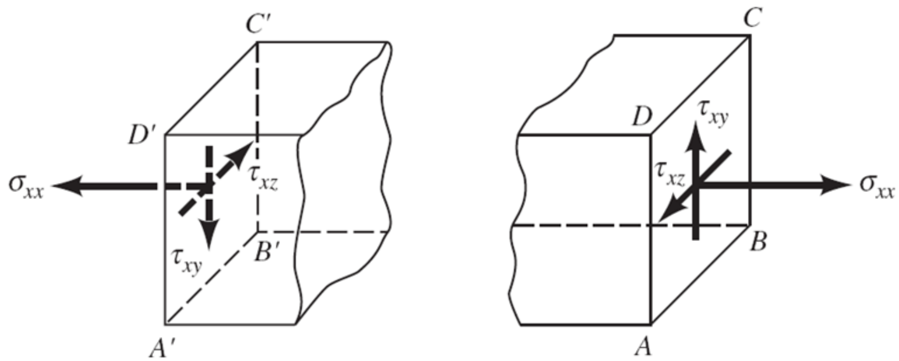
Em geral, a **equação da continuidade** não pode ser usada por si só para resolver o campo de velocidades, mas pode ser usada para:

1. Determinar se o campo de velocidades é incompressível
2. Encontrar componentes perdidas de velocidades

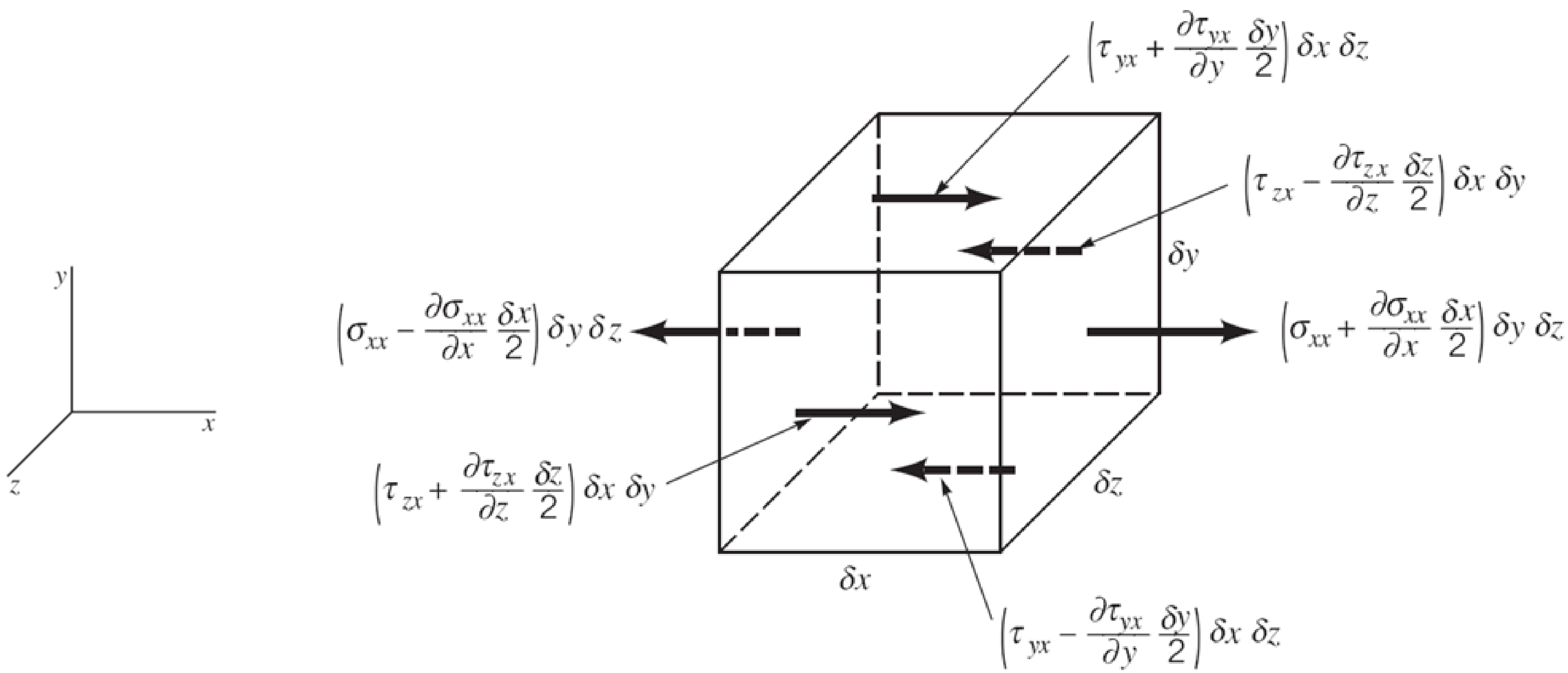
Conservação da Quantidade de Movimento Linear

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{Dm\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{v}\rho dVC + \int_{SC} \vec{v}\rho(\vec{v}.\vec{n})dS$$

Distribuição de tensões em um elemento pequeno de fluido $(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$



Notação subescrita dupla para tensões: o 1º é o plano e o 2º é a direção



Forças de superfície decorrentes de tensões normais e tangenciais atuando em elemento de fluido na **direção x**. Forças de campo não aparecem na figura.

Equação do movimento

$$\delta F_x = \delta m\, a_x$$
$$\delta F_y = \delta m\, a_y$$
$$\delta F_z = \delta m\, a_z$$

$$\Longrightarrow$$

$$\delta F_{cont\,x} + \delta F_{campo\,x} = \delta m\, a_x$$
$$\delta F_{cont\,y} + \delta F_{campo\,y} = \delta m\, a_y$$
$$\delta F_{cont\,z} + \delta F_{campo\,z} = \delta m\, a_z$$

e, como $\delta m = \rho \delta_x \delta_y \delta_z = \rho dV$

Forma-se o **conjunto I** de equações

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Incógnitas: tensões, velocidades e ρ

São aplicáveis a qquer continuum (sólido ou fluido), em movimento ou parado

Importante

Estas podem ser as equações diferenciais da QDM para um fluido, e possuem muito mais incógnitas (todas as tensões, a velocidade e a massa específica) que equações.

1ª simplificação: escoamento invíscido

Se $\mu_{água}\ e\ \mu_{ar}$ forem pequenos na equação anterior, $\mu_{água}\ e\ \mu_{ar} \Rightarrow 0\ e\ \tau \Rightarrow 0$

No curso já foi mostrado que as tensões normais independem da direção e são iguais a pressão:

$$-P = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$$

O sinal negativo foi adotado por convenção para que as tensões de compressão (que são as mais comuns nos fluidos) forneçam sinal + para a pressão

Do **conjunto I** de equações diferenciais da QDM para um fluido, com $\mu \rightarrow 0\ e\ \tau \rightarrow 0$ geram-se as **Equações de Euler do Movimento**:

Equações de Euler do Movimento

$$\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

ou, na forma vetorial:

$$\rho\vec{g} - \nabla P = \rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\vec{v}\right]$$

Válidas para escoamento **sem viscosidade**

Breve digressão: Palácio Sanssouci ("sem preocupação") em Potsdam

ONDE ESTÃO AS FONTES?

Frederico o grande, Rei da Prússia -1712-1786, encomendou as fontes para Euler.

Euler: um dos maiores matemáticos do mundo.

Frederico, o Grande:

“Minha planta foi projetada matematicamente, e não pode levantar uma única gota de água à distância de cinquenta pés do reservatório. Vaidade das vaidades! Vaidade da matemática”

Conclusão: faltou a viscosidade

Para fluidos newtonianos incompressíveis, é sabido que as tensões estão relacionadas linearmente com as taxas de deformação:

$$\sigma_{xx} + P = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} + P = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} + P = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

A utilização destas equações com as do **conjunto I** e as da continuidade resulta nas **Equações de Navier-Stokes** para *escoamentos incompressíveis com viscosidade constante*

L.M.Navier
1758-1836

Sir G.G. Stokes
1819-1903

Equações de Navier Stokes para escoamentos ***incompressíveis com viscosidade constante***:

$$\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Força gravitacional – força de pressão + termos viscosos (taxa de entrada difusiva líquida da QDM) = termos de aceleração (aceleração local + aceleração convectiva)

Observações:

A pressão P aparece só como gradiente, ou seja, não é o valor da pressão que importa, mas sim as **diferenças de pressão**.

As 3 equações de N-S combinadas com a equação da conservação da massa, fornecem uma descrição matemática completa do escoamento incompressível de um fluido Newtoniano, porque temos 4 equações com 4 incógnitas $(u, v, w\ e\ P)$. Em termos matemáticos estamos ok.

Infelizmente a complexidade (equações de derivadas parciais de 2ª ordem e não lineares) impede sua solução, exceto para casos bem simples.

A maior dificuldade: não linearidade dos termos das acelerações convectivas $(u\frac{\partial u}{\partial x}, w\frac{\partial v}{\partial z}$, etc)

A matéria da prova se encerra na apresentação e usos das equações de Navier-Stokes para resolver alguns poucos problemas simples, onde o escoamento seja laminar.

Os slides seguintes são apresentados apenas para dar uma visão geral da complexidade das equações de N-S.

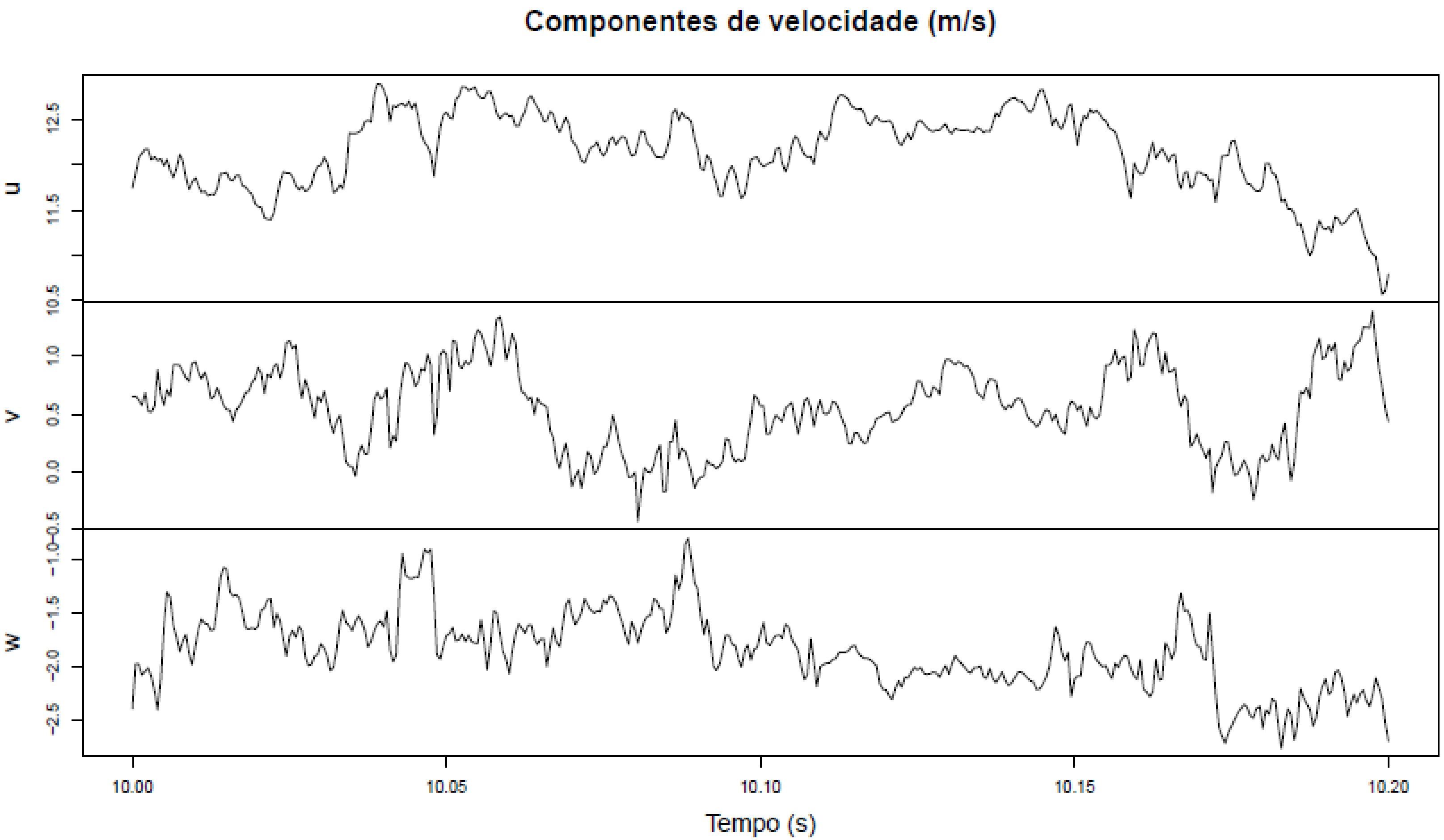
É bom lembrar que cada componente da velocidade pode ser escrita em termos da soma da velocidade média mais a velocidade instantânea ($u = \overline{u} + u'$) o que complica extraordinariamente a equação. Após esta substituição e simplificações importantes, restam as equações de N-S médias no tempo (isto não é assunto do curso):

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)=F_x-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}+\mu\Delta\overline{u}-\rho\left(\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial \overline{v}}{\partial z}\right)=F_y-\frac{\partial \overline{p}}{\partial y}+\mu\Delta\overline{v}-\rho\left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{w}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial \overline{w}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial \overline{w}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}\right)=F_z-\frac{\partial \overline{p}}{\partial z}+\mu\Delta\overline{w}-\rho\left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z}\right)$$

A última parcela à direita representa os tensores de Reynolds, e são geralmente a parte dominante da tensão total de cisalhamento (observe que μ ainda permanece)



Os gráficos acima mostram a complexidade do sinal da velocidade em um ponto de um escoamento qualquer. São mostradas as três componentes da velocidade, U, V e W. Observe que U está ao redor de 12m/s, enquanto V está ao redor de 0,5 m/s e W de -1,5m/s.

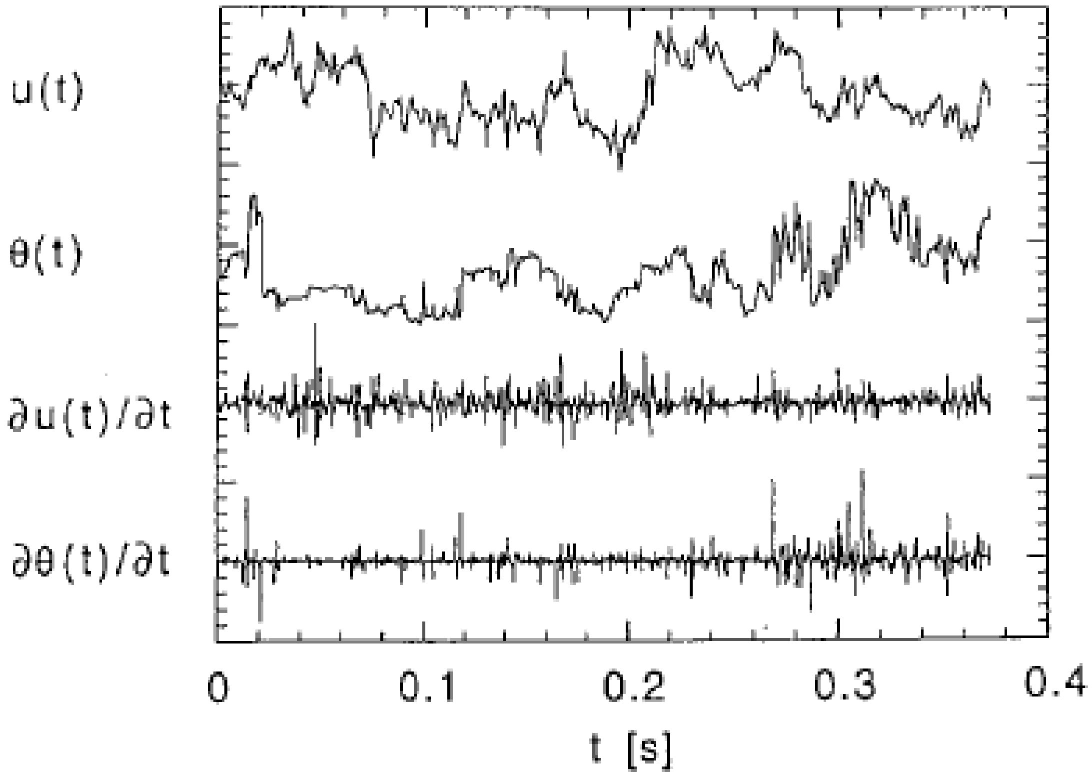


Fig. 5. Time series of the longitudinal velocity fluctuations, $u(t)$, and their derivative, $\partial u(t)/\partial t$. Also shown is the time series of scalar fluctuations, $\theta(t)$, and their derivative, $\partial\theta(t)/\partial t$, in the same flow. Notice the higher intermittency in the scalar (bottom trace). $R_\lambda = 582$. Measurements by L. Mydlarski and Z.W.

O gráfico acima mostra as flutuações nos valores de velocidade e temperatura em um escoamento. Observe a forma do gráfico da velocidade (pode ser considerado Gaussiano) e compare com o gráfico da aceleração (fortemente não Gaussiano). Isto tem a ver com dissipação de energia, de forma intermitente como mostrado no gráfico da aceleração.