**Teoria dos Jogos para Ciência Política**

**Graduação – Teoria dos Jogos para Cientistas Sociais (FLP0464)**

**Pós Graduação – Teoria dos Jogos (FLS6363-1)**

Prof. Dr. Glauco Peres Silva

1ª lista de exercícios – 21/09/2016

GABARITO

Esta é a primeira lista de exercícios e deverá ser entregue na aula da próxima semana em classe. É permitido que os alunos discutam a resolução dos exercícios, mas cada um deverá responde-los a sua maneira.

**Questão 1 – 20 pontos**

Responda às questões a seguir:

1. Equilíbrios de estratégia dominante são sempre equilíbrios de Nash? Os equilíbrios de Nash são sempre equilíbrios de estratégia dominante?

**Equilíbrios em estratégia dominante são sempre equilíbrios de Nash, mas não o oposto. Os equilíbrios de Nash são mais abrangentes que os de estratégia dominante, exatamente por possibilitar encontrar equilíbrios em situações nas quais nenhum jogador possui uma estratégia dominante, como jogos de coordenação, por exemplo.**

1. Num equilíbrio de Nash entre duas pessoas, cada jogador está dando a melhor resposta a que? Numa estratégia dominante de equilíbrio, cada jogador está dando a melhor resposta a que?

**Em um equilíbrio de Nash, cada jogador está dando a melhor resposta às escolhas do adversário sabendo que o adversário também está dando a melhor resposta às suas escolhas, que, por sua vez, considera as escolhas do adversário, etc., em um *looping* infinito. Em um jogo com estratégia dominante, o jogador está dando a melhor resposta diante dos payoffs a sua disposição, independentemente do que o outro jogador fará.**

1. Explique a diferença entre “nunca ser uma melhor resposta” e “estratégia dominada”.

**Uma estratégia é dita dominada quando existe pelo menos uma outra alternativa a disposição do jogador que é sempre superior (que traz sempre maiores payoffs) para todas as possibilidades de ação do outro jogador. Já uma estratégia não é uma melhor resposta, quando, para cada possibilidade de ação do outro jogador, ela nunca trouxer o maior payoff para o jogador, mas ela não é sistematicamente inferior a nenhuma outra alternativa.**

1. Defina Equilíbrio Perfeito de Subjogo.

**Equilíbrio perfeito de subjogo é encontrado quando, a partir de determinado nó de um jogo sequencial, define-se qual a estratégia ótima para cada jogador. A partir daquele ponto sabe-se que se o jogo chegasse até ali, o resultado ótimo seria equivalente ao de equilíbrio. Este equilíbrio, portanto, pode ser definido a partir de qualquer nó de um jogo sequencial e o equilíbrio do jogo como um todo é composto por equilíbrios perfeitos de subjogos.**

**Questão 2 – 20 pontos**

Considere a seguinte tabela de payoffs:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | Jogador 2 |  |
|  |  | Esquerda | Centro | Direita |
|  | Alto | 4, ***x*** | **w**, 2 | 3, 1 |
| Jogador 1 | Meio | 3, 5 | 2, ***y*** | **k**, 3 |
|  | Baixo | ***z***, 3 | 3, 4 | 4, 2 |

1. Complete os payoffs da tabela acima para que o jogador 2, e apenas ele, possua uma estratégia dominante. Informe qual é a estratégia dominante e por que.

**Há várias respostas possíveis a este exercício. Aqui apresento apenas uma delas.**

**Para que o jogador possua uma estratégia dominante, ele deve possuir uma alternativa de ação que lhe traga sempre o maior payoff, independentemente da escolha do outro jogador. No caso acima em que deve-se determinara estratégia dominante para o jogador 2, nota-se que a jogada “centro” é preferida quando o jogador 1 escolhe “baixo” (4 > 3 > 2). Não há possibilidades, então, de que o jogador possua uma outra estratégia dominante que não “centro”. Neste sentido, se o jogador 1 escolhe “alto”, o jogador 2 deverá encontrar um payoff mais alto em “centro” do que nas outras alternativas. Como seu payoff ali é 2, este valor deve ser maior que nas demais situações. Assim, o payoff caso jogasse “esquerda” (que podemos chamar de *x*) deve ser tal que *x < 2*. Já se o jogador 1 escolher “meio”, o payoff encontrado quando o jogador 2 escolhe “centro” (que podemos chamar de *y*) deve ser o maior para ele. Isto significa dizer que *y > 5*. Já para que o jogador 1 não possua estratégia dominante deve-se notar que ele prefere “baixo” quando o jogador 2 escolhe “centro” ou “direita”. Assim, para que não se encontre estratégia dominante, ele não deve continuar a preferir “baixo” no caso em que o jogador 1 opta por “esquerda”. Se chamarmos este payoff de *z*, temos que *z < 4*, o que implicaria na sua preferência por “alto”. Com isto, garante-se que o jogador 1 não tenha estratégia dominante, independentemente dos demais payoffs não preenchidos.**

1. Complete a tabela acima de forma a que nenhum jogador tenha nem estratégia dominante, mas tenham ao menos uma estratégia dominada. Informe quais estratégias são dominadas e por que.

**Para que nenhum jogador tenha estratégia dominante, nenhuma alternativa sistematicamente pode trazer o maior payoff para todas as estratégias do adversário. No caso discorrido acima, para o jogador 2, não se pode ter uma situação em que simultaneamente *x < 2* e *y > 5*. Já para o jogador 1, a relação *z < 4* deve-se 0manter e garantir que ele não possua uma estratégia dominante.**

**Para garantirmos que haja ao menos uma estratégia dominada, há várias combinações possíveis e não seria possível discorrer sobre todas elas aqui. No caso do jogador 1, pode-se construir uma situação em que a estratégia “meio” seja dominada pela estratégia “alto”. Para isto, bastaria que *w > 2* e *k < 3* simultaneamente. Para o jogador 2, bastaria que *y > 3* para que a estratégia “direita” dominasse a estratégia “centro”.**

**Ainda vale dizer que neste exercício as desigualdades indicadas são tais que a estratégias são estritamente dominantes e não fracamente dominantes. Como o enunciado não é claro neste sentido, seria possível responde-lo de ambas as formas.**

**Questão 3 – 20 pontos**

Encontre todos os equilíbrios de Nash para os jogos abaixo:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | Jogador 2 |  |  |
|  |  | Norte | Sul | Leste | Oeste |
|  | Alto | 4, 1 | 5, 2 | 3, 3 | 3, 0 |
| Jogador 1 | Meio | 3, 5 | 2, 1 | 2, 3 | 5, 3 |
|  | Baixo | 5, 3 | 3, 4 | 4, 2 | 1, 2 |

**A ação “Oeste” é nunca melhor resposta para o jogador 2. Em razão disso, o jogador 1 nunca escolhe “Meio”. Em resposta a isso, o jogador 2 nunca escolhe “Norte”.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | **Jogador 2** |  |
|  |  | **Sul (q)**  | **Leste (1-q)** |
|  | **Alto (p)** | **5, 2** | **3, 3** |
| **Jogador 1** | **Baixo (1-p)** | **3, 4** | **4, 2** |

**O jogo acima indicado não possui equilíbrio em estratégias puras; apenas em estratégias mistas. Neste equilíbrio p=2/3 e q = 1/3**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | Jogador 2 |  |
|  |  | Esquerda | Centro | Direita |
|  | Alto | 4, 1 | 2, 2 | 3, 1 |
| Jogador 1 | Meio | 3, 2 | 2, 1 | 0, 3 |
|  | Baixo | 1, 3 | 3, 0 | 4, 2 |

**Para o jogador 1, a alternativa “Meio” é nunca melhor resposta. Com isso, o jogador 2 nunca escolhe “Direita”. A matriz final também não possui equilíbrio em estratégias puras; apenas em mistas.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | **Jogador 2** |  |
|  |  | **Esquerda (q)**  | **Centro (1-q)** |
|  | **Alto (p)** | **4, 1** | **2, 2** |
| **Jogador 1** | **Baixo (1-p)** | **1, 3** | **3, 0** |

**Neste equilíbrio p = 3/4 e q = 1/4**

**Questão 4 – 20 pontos**

Poupanças para aposentadoria são um exemplo interessante de problemas de compromisso. Todos dizem da boca para fora que poupar é uma boa ideia. Infelizmente, poucas pessoas o fazem. Parte da razão dessa relutância em poupar é que as pessoas admitem que a sociedade não permitirá que morram de fome, de modo que há boas chances que sejam socorridas mais adiante.

Para formular isso num jogo entre gerações, vamos imaginar duas estratégias para a geração mais velha: poupar ou esbanjar. A geração jovem também tem duas estratégias: sustentar seus idosos ou poupar para a sua aposentadoria. Se a geração mais velha poupa e a geração mais jovem também a sustenta, os idosos recebem 3 e os jovens com -1. Se a geração mais velha esbanja e a mais jovem a sustenta, os mais velhos obterão 2 e os jovens, -1. Já se os mais velhos pouparem e os mais jovens deixarem de sustentar seus idosos, ambos ganham 1. Finalmente, se os idosos esbanjarem e os jovens negligenciarem, os dois grupos terminarão com -2.

1. Mostre o(s) equilíbrio(s) se o jogo for jogado simultaneamente;

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | **Jovens** |  |
|  |  | **Sustentar** | **Poupar** |
| **Idosos** | **Poupar** | **3, -1** | **1, 1** |
|  | **Esbanjar** | **2, -1** | **-2, -2** |

**Neste jogo, os Idosos tem estratégia dominante de “poupar”. Neste caso, os jovens preferirão também poupar. Assim o equilíbrio é {“poupar”, “poupar”}.**

1. Se este for jogado sequencialmente, com os idosos jogando primeiro, qual o equilíbrio obtido? Apresente a árvore do jogo.

**(3, -1)**

**Sustentar**

**Jovenss**

**Poupar**

**Poupar**

**(1, 1)**

**Idosos**

**(2, -1)**

**Esbanjar**

**Sustentar**

**Poupar**

**(-2, -2)**

**No jogo construído acima, para os jovens é preferível “poupar” se os idosos também pouparem, mas é preferido “sustentar” se os idosos esbanjarem. Para os idosos, a comparação é de um payoff de 1 no caso de pouparem contra um payoff de 2 no caso de esbanjarem. Então, o equilíbrio aqui é {“esbanjar”, “sustentar”}.**

**Questão 5 – 10 pontos**

Considere a matriz de payoffs abaixo:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | Jogador 2 |  |
|  |  | Esquerda | Centro | Direita |
|  | Alto | 5 | 3 | 2 |
| Jogador 1 | Meio | 6 | 4 | 3 |
|  | Baixo | 1 | 6 | 2 |

1. Encontre o equilíbrio utilizando o método maximin. Considere que os payoffs indicados acima são para o jogador 1. Explicite seus cálculos;

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | **Jogador 2** |  |  |
|  |  | **Esquerda** | **Centro** | **Direita** | **Mínimo** |
|  | **Alto** | **5** | **3** | **2** | **2** |
| **Jogador 1** | **Meio** | **6** | **4** | **3** | **3** |
|  | **Baixo** | **1** | **6** | **2** | **1** |
| **máximo** |  | **6** | **6** | **3** |  |

**O jogador 1 escolherá a estratégia que lhe dá o máximo entre os mínimos: “Meio”. O jogador 2 escolherá o mínimo entre os máximos: “Direita”. Assim, o equilíbrio é {Meio; Direita}, que realmente é um equilíbrio de Nash.**

**Questão 6 – 20 pontos**

Um Professor Pobre (PP) encontra em um restaurante seu colega de mestrado, o Banqueiro Bem de Vida (BB). Eles pretendem honrar a tradição de repartir a conta ao meio, embora PP priorize a economia de gastos e BB a sofisticação da comida. Cada um pode pedir um prato barato (b) ou caro (c). Os pay-offs da tabela representam a utilidade ordinal dos resultados para ambos. O garçom anota o pedido de BB em primeiro lugar.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | PP |  |
|  |  | c | b |
| BB | c | 2, 0 | 3, 1 |
|  | b | 0, 2 | 1, 3 |

Julgue as proposições abaixo como Verdadeiro ou Falso. Justifique suas respostas

Ⓞ A representação estratégica do jogo sequencial, admitindo que uma estratégia seja definida por uma lista completa de escolhas, nos mostra três equilíbrios de Nash.

**Falso. O Professor Pobre prefere sempre “b”, enquanto o Banqueiro prefere sempre “C”. Há estratégia dominante para ambos aqui, levando a um único equilíbrio.**

① O equilíbrio de Nash perfeito em sub-jogos é definido como {c; bb}={caro; barato caso BB escolha caro, barato caso BB escolha barato}.

**Verdadeiro. Como ambos possuem estratégias dominantes, não importa a ordem das jogadas, escolherão sempre as mesmas coisas.**

② Caso o garçom anote primeiro o pedido de PP, o equilíbrio de Nash perfeito em sub-jogos será definido como {b; bc}.

**Falso. O Banqueiro nunca escolherá o prato barato. Ele sempre prefere o caro.**

③ Caso o jogo fosse simultâneo, teríamos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

**Falso. Ambos possuem estratégias dominantes, como já dito.**

**Questão 7 – 10 pontos**

Seja um jogo estritamente competitivo em um mercado com apenas duas empresas, em que a empresa 1 pode adotar uma entre quatro estratégias de vendas possíveis: A, B, C e D; e a empresa 2 também pode adotar uma entre quatro estratégias de vendas possíveis: R, S, T e U. A parcela de mercado da empresa 1 se encontra descrita na tabela abaixo, de acordo com a estratégia de venda que ela e a empresa 2 escolherem. Responda qual será a parcela de mercado da empresa 2 no equilíbrio.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | Empresa 2 |  |  |
|  |  | R | S | T | U |
| Empresa 1 | A | 10 | 20 | 15 | 30 |
|  | B | 40 | 30 x | 50 | 55 |
|  | C | 35 | 25 | 20 | 40 |
|  | D | 25 | 15 | 35 | 60 |

**Grifados em azul na tabela estão as escolhas preferidas para a Empresa 1 para cada alternativa da empresa 2 e em vermelho, as escolhas preferidas para a Empresa 2 para cada alternativa da empresa 1. No equilíbrio, a Empresa 2 jogará S e a Empresa 1 jogará B. A Empresa 1 ganhará 30% e a Empresa 2, 70%.**

**Questão 8 – EXERCÍCIO EXTRA – 40 pontos**

Considere uma eleição disputada por 2 candidatos. Cada um busca conseguir votos através de propaganda. Para simplificar, considere que os eleitores comecem inteiramente ignorantes e despreocupados e são movidos apenas pelas campanhas. Ainda mais simplificadamente, suponha que o percentual de votos para um partido seja igual ao percentual de propaganda de campanha gasto. Considere que os partidos sejam T e S; quando T gasta R$ x milhões em propaganda e S gasta R$ y milhões, T alcançará uma fração de x/(x+y) de votos, enquanto S obterá y/(y + x).

Conseguir dinheiro para pagar pelas campanhas custa muito. Para simplificar, suponha que todos os custos sejam proporções diretas aos gastos de campanha x e y. Especificamente, suponha que o payoff do partido T seja medido pela diferença entre o percentual de votos e o gasto de campanha: 100x/(x + y) – x. De forma similar, para o partido S, o payoff é 100y/(x + y) – y.

1. Encontre a função para cada partido que indica a sua melhor resposta às decisões do outro;

**A função resposta para cada partido é dada pela derivada parcial de sua função payoff, mantendo o gasto do outro partido constante. No caso do partido T, em que *f* é a função payoff, temos:**

$$\frac{∂f}{∂x}=\frac{100y}{\left(x+y\right)^{2}}-1=0$$

**Para o partido S, temos função similar:**

$$\frac{∂f}{∂y}=\frac{100x}{\left(x+y\right)^{2}}-1=0$$

**As funções podem ser reescritas de forma a termos o seguinte sistema de equações:**

$$\left\{\begin{matrix}y=10\sqrt{x}-x\\x=10\sqrt{y}-y\end{matrix}\right.$$

1. Encontre o equilíbrio. Quanto cada partido deverá gastar?

**Cada partido deve gastar R$ 25 milhões.**

Considere que haja agora uma assimetria entre os partidos. O partido S pode, por exemplo, ter um custo muito menor para fazer as suas campanhas ou que sua campanha seja mais efetiva em obter votos do que a campanha do partido T. Para permitir ambas possibilidades, podemos escrever as funções de payoff dos dois partidos como

$V\_{T}=\frac{x}{x+ky}-x$ e $V\_{s}=\frac{ky}{x+ky}-cy$ , onde $k>0$ e $c>0$.

Estas funções mostram que S tem uma vantagem no efeito relativo de sua campanha quando *k* é alto e que S possui vantagem no custo de suas campanhas quando *c* é baixo.

1. Use as funções de payoff para derivar as funções de melhor resposta para S (que escolhe *y*) e para T (que escolhe *x*);

**O raciocínio é o mesmo apresentado anteriormente, mas agora a função para o partido S é diferente. Então, teríamos:**

$$\frac{∂f}{∂y}=\frac{100kx}{\left(x+ky\right)^{2}}-c=0$$

**Para o partido T, temos**

$$\frac{∂f}{∂x}=\frac{100y}{\left(x+y\right)^{2}}-1=0$$

**(A inclusão do 100 é para manter o resultado em termos percentuais, mas não faz diferença).**

**Temos assim que:**

$$\left\{\begin{matrix}y=10\sqrt{\frac{x}{ck}}-\frac{x}{k}\\x=10\sqrt{y}-y\end{matrix}\right.$$

1. Encontre os valores de equilíbrio de Nash para ambos os partidos;
2. Interprete os sinais de $\frac{∂x}{∂c}$ , $\frac{∂y}{∂c}$, $\frac{∂x}{∂k}$ e $\frac{∂y}{∂k}.$

**As derivadas parciais de *x* seja em relação a *c* como em relação a *k* são iguais a zero. Isto implica dizer que os gastos do partido T com sua campanha não dependem diretamente da vantagem do partido S. Já para o partido S, este não é o caso. Para o cálculo de suas derivadas parciais são:**

$$\frac{∂y}{∂c}=-\frac{10}{2c}\sqrt{\frac{x}{kc}}=-\frac{5}{c}\sqrt{\frac{x}{kc}}$$

$$\frac{∂y}{∂k}=-\frac{5}{k}\sqrt{\frac{x}{kc}}+\frac{x}{k^{2}}$$

**A derivada parcial com relação a *c* é negativa. Isto implica que quando o custo de campanha, *c*, aumenta, o gasto ótimo de campanha, *y*, se reduz.**

**Já a derivada parcial com relação a *k* depende do valor de *k*. Até** $k=\frac{x}{25c}$**, a derivada é positiva, o que indica que o retorno de um aumento em *k* (o efeito relativo de sua campanha) aumenta os gastos de campanha. Já quando *k* é maior do que aquela relação, a derivada é negativa, o que indica que o efeito da campanha é tal que faz com que os gastos se reduzam. Ou seja, a campanha é tão efetiva a partir de certo ponto que ela economiza os gastos feitos pelo partido.**