

Capítulo 3

A lei de Gauss

Em princípio, com o que aprendemos no capítulo anterior, i.e, como obter o campo eletrostático gerado por uma distribuição contínua de cargas, está terminada a tarefa de obter o campo em qualquer circunstância. E é verdade também que a lei de Gauss não é nada mais, nada menos do que a própria lei de Coulomb. Então porque um capítulo à parte dedicado a ela? Porque, infelizmente, como veremos no próximo exercício, envolvendo uma esfera uniformemente carregada, o problema pode se tornar matematicamente muito complicado, até mesmo para este caso, para o qual a distribuição de cargas é relativamente simples. A lei de Gauss representa neste ponto um *método alternativo* para calcular o campo eletrostático gerado por uma distribuição de cargas, que é extremamente útil e simplifica espantosamente os cálculos, sempre que simetrias estejam envolvidas, como é, por exemplo o caso do campo eletrostático gerado por uma esfera.

3.1 A lei de Gauss e alguns aspectos conceituais importantes

Então, até como motivação para aprender a lei de Gauss, vamos antes disso mostrar como resolver o problema da esfera uniformemente carregada pelos métodos que já aprendemos. Depois vamos ver como a lei de Gauss simplifica tudo.

E1) Encontrar o campo elétrico em pontos internos e externos a uma esfera uniformemente carregada com densidade volumétrica de carga ρ .

O procedimento é idêntico ao que adotamos anteriormente, i.e,

1) Escolher um referencial conveniente.

2) Escolher um elemento de carga *arbitrário* dq , desenhar o campo por ele gerado, definindo

- a posição de dq relativa ao referencial escolhido \mathbf{r}' .
- a posição do ponto de observação.
- a *distância* entre esses dois pontos, que é o que nos pede a lei de Coulomb.

Se fizermos isso cuidadosamente, o problema estará essencialmente resolvido e se resumirá a resolver integrais complicadas. Um bom físico nunca deve ter medo de integrais complicadas, mesmo se não souber resolvê-las. Mas, sim, deve ter (MUITO) medo de *não saber chegar* à integral que não sabe resolver e de chegar a uma outra integral talvez também muito complicada, que ele *também* não sabe resolver, mas que não corresponde à solução do problema, quando efetuado.

Vamos escolher então o referencial. Como essa escolha é arbitrária, podemos colocar o ponto de integração sobre o eixo z :

Como sempre, então, a lei de Coulomb nos fornece

$$d\mathbf{E}_{dq} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'|}$$

O vetor $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'$ pode ser escrito em termos de suas componentes:

$$\mathbf{r}_P - \mathbf{r}' = -r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{\mathbf{i}} - r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{\mathbf{j}} + (r_P - r' \cos \theta) \hat{\mathbf{k}}$$

Assim, temos para o elemento de campo elétrico gerado por dq

$$d\mathbf{E}_{dq} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho r'^2 dr' \sin \theta' d\theta' d\phi'}{[r'^2 + r_P^2 - 2r_P r' \cos \theta']^{3/2}} (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}')$$

Podemos agora verificar explicitamente que os campos nas direções x e y se anulam:

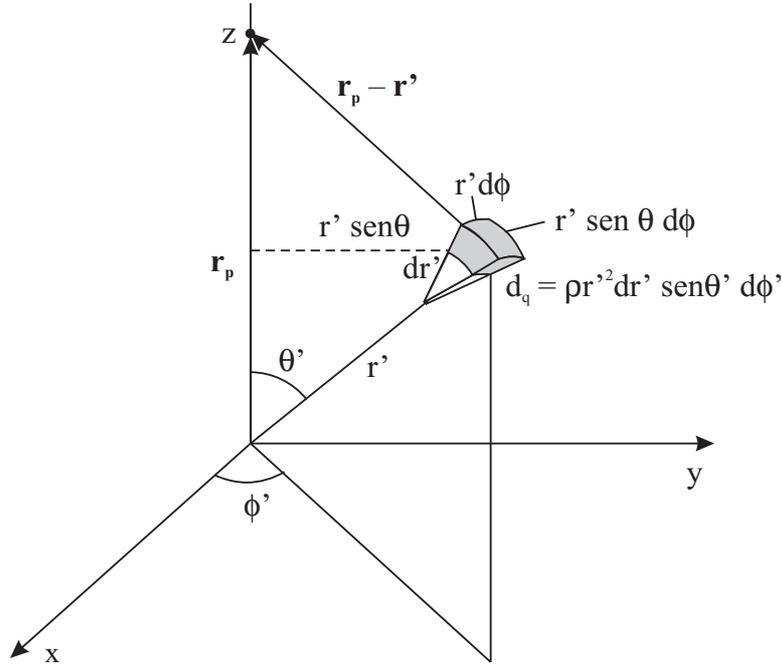


Figura 3.1: Escolha do referencial

$$E_x = \int_0^R dr' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho r'^2 \sin \theta'}{[r'^2 + r_P^2 - 2r_P r' \cos \theta']^{3/2}} [-r' \sin \theta' \cos \phi']$$

A integral sobre ϕ' só envolve o $\cos \phi'$ que, integrado no intervalo de 0 a 2π se anula. Um argumento completamente análogo vai levar você a concluir que

$$E_x = E_y = 0$$

Então, o que nos resta é calcular E_z , que, daqui para a frente é um problema puramente matemático. A integral pode ser complicada, mas é a integral complicada CERTA. Vamos a ela:

$$E_z = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr' \int_0^\pi d\theta' \frac{r'^2 \sin \theta' (r_P - r' \cos \theta')}{[r'^2 + r_P^2 - 2r_P r' \cos \theta']^{3/2}}$$

A integral sobre θ' pode ser efetuada fazendo-se a seguinte transformação de variáveis

$$t = -2r'r_P \cos \theta' \longrightarrow dt = +2r'r_P \sin \theta' d\theta'$$

Com isso, ficamos com

$$E_z = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr' \int_{-2r'r_P}^{+2r'r_P} dt \frac{r'(2r_P^2 + t)}{4r_P^2(r'^2 + r_P'^2 + t)^{3/2}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^R dr' \frac{r'}{4r_P^2} I(r')$$

Com,

$$I(r') \equiv \int_{-2r'r_P}^{+2r'r_P} dt \frac{(2r_P^2 + t)}{(r'^2 + r_P'^2 + t)^{3/2}}$$

É fácil ver que a integral acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$I(r') = \int_{-2r'r_P}^{+2r'r_P} dt \left[\frac{(r_P^2 - r'^2)}{(r'^2 + r_P'^2 + t)^{3/2}} - \frac{1}{(r'^2 + r_P'^2 + t)^{1/2}} \right]$$

Fazemos uma nova transformação de variáveis

$$u = r'^2 + r_P^2 + t$$

E temos

$$\begin{aligned} I(r') &= \int_{(r'-r_P)^2}^{(r'+r_P)^2} du \left[\frac{(r_P^2 - r'^2)}{u^{3/2}} - \frac{1}{u^{1/2}} \right] = \\ &= 2 \left[-\frac{(r_P^2 - r'^2)}{(r' + r_P)} + (r' + r_P) + \frac{(r_P^2 - r'^2)}{|r_P - r'|} - |r_P - r'| \right] \end{aligned}$$

Onde $|r_P - r'| = \sqrt{(r_P - r')^2}$.

Agrupando termos ficamos com

$$I(r') = 4r' \left[1 + \frac{r_P - r'}{|r_P - r'|} \right] = 8r \text{ se } r_P > r' \text{ ou } 0 \text{ se } r_P < r'$$

Isso mostra que vamos obter expressões diferentes para o campo se o calcularmos em pontos *dentro* ou *fora* da esfera.

Para os pontos externos, $r_P > r'$, temos

$$E_z = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr' \frac{r'}{4r_P^2} [8r'] = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4R^3}{12} \frac{1}{r_P^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_P^2}, \quad (\text{com } q = \rho 4\pi R^3/3).$$

Veja então que para pontos internos $r_P < r'$, temos que r_P está entre zero e R e portanto devemos dividir a integral em duas partes e notar que a contribuição para $r' > r_P$ é nula. (O que significa isso fisicamente? Significa que as cargas EXTERNAS à superfície sobre a qual estamos calculando o campo elétrico não dão contribuição alguma para o mesmo!)

$$E_z = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^{r_P} dr' \frac{r'}{4r_P^2} [8r'] + \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_{r_P}^R 0 dr' = \frac{\rho r_P}{3\epsilon_0}$$

E vemos portanto que o campo elétrico cresce para pontos dentro da esfera à medida que a carga *interna* à superfície esférica onde se encontra r_P vai crescendo.

Um gráfico do campo elétrico obtido, como função da distância a partir da origem é

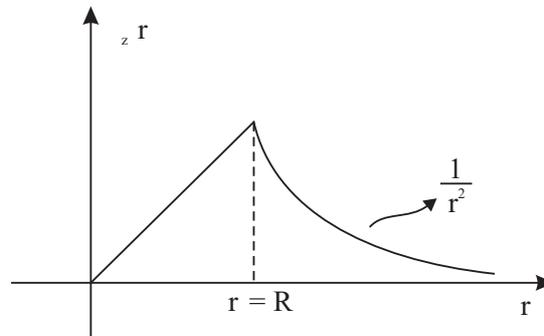


Figura 3.2: Gráfico do campo elétrico

Note que o campo é contínuo para $r_P = R$, conforme pode ser testado das duas expressões obtidas para o campo.

É possível evitar ter que efetuar essa integral tripla e resolver o mesmo prob-

lema em algumas linhas efetuando no máximo uma integral unidimensional se usarmos a lei de Gauss. Então, vamos aprendê-la.

Vamos começar com uma abordagem intuitiva. O caso mais simples possível é o de uma carga puntiforme q situada na origem. O campo por ela gerado a uma distância r é dado por:

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Para desenvolvermos um pouco de intuição sobre a lei de Gauss, vamos usar as linhas de força que aprendemos no capítulo anterior. Na figura estão representados alguns poucos campos representativos.

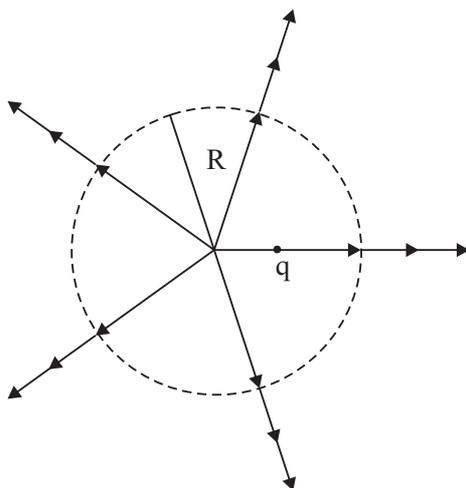


Figura 3.3: Vetores campo elétrico

Devido ao fato de que o campo decai com $1/r^2$, os vetores ficam menores quando nos afastamos da origem; eles sempre apontam para fora, no caso de uma carga positiva. As *linhas de campo* nada mais são do que a linha contínua que dá suporte a esses vetores. Pode-se pensar de imediato que a informação sobre a intensidade do campo elétrico foi perdida ao usarmos linhas contínuas. Mas não foi. A magnitude do campo, como já discutimos, estará contida na *densidade de linhas do campo*: é maior mais perto da carga e diminui quando nos afastamos, pois

a densidade diminui com $N/4\pi R^2$, onde N é o número de linhas de campo, que é o mesmo para qualquer superfície. Em outras palavras: duas superfícies esféricas com centro na carga, uma com raio R_1 e outra com raio R_2 , $R_1 < R_2$ são atravessadas pelas *mesmas* linhas de força. No entanto, a *densidade* de linhas de força, definida como o número de raios de luz por unidade de área é maior sobre as esferas menores. Como a área cresce com o *quadrado* do raio, o campo decresce da mesma forma, i.e, com o quadrado da distância à fonte.

OBSERVAÇÃO CONCEITUAL IMPORTANTE: a discussão acima mostra que a dependência do campo elétrico com o inverso do quadrado da distância é *consequência da maneira como ele se propaga no espaço livre*. Ou seja, o espaço vazio não emite ou absorve luz, pois não existem linhas de força que nasçam ou morram no espaço livre.

Como podemos quantificar essa idéia, que parece importante e nos diz “quantas linhas de força” atravessam uma dada superfície S ? As aspas referem-se ao fato de que, obviamente o número de linhas de força é infinito, mas sua densidade, i.e, o número de linhas de força por unidade de área é finito.

A quantidade procurada, então é

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

Que é proporcional ao número de linhas que atravessam a área infinitesimal $d\mathbf{a}$.

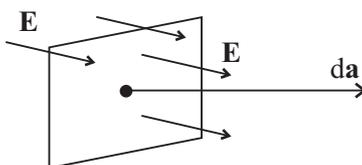


Figura 3.4: Fluxo em um elemento de área

O produto escalar leva em conta apenas a componente de $d\mathbf{E}$ efetivamente perpendicular ao elemento de área $d\mathbf{a}$. É apenas a área no *plano perpendicular* a \mathbf{E} que levamos em conta quando falamos da densidade de linhas de campo.

Essa argumentação claramente sugere que o fluxo através de qualquer superfície fechada

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

Onde o círculo em torno da integral indica uma superfície fechada, seja proporcional à CARGA TOTAL dentro dessa superfície. A razão disso, com base no que vimos é a seguinte: as linhas de campo que foram originadas numa carga positiva, precisa ou atravessar a superfície ou morrer numa carga negativa dentro da superfície. Por outro lado, a quantidade de carga *fora* da superfície não vai contribuir em nada para o fluxo total, uma vez que as linhas entram por um lado e saem por outro. Esta é a *ESSÊNCIA da lei de Gauss*.

Vamos torná-la quantitativa, então:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{(\text{dentro de } S)}$$

Essa lei é válida para qualquer superfície fechada.

3.2 Ferramentas matemáticas

O que é preciso saber de matemática para usar a lei de Gauss corretamente?

3.2.1 Cálculo do fluxo

Antes de mais nada é preciso saber calcular o fluxo $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ sobre uma superfície fechada:

- 1) Define-se o elemento de área relevante
- 2) Define-se o versor (vetor unitário) normal à essa área
- 3) Faz-se o produto escalar entre \mathbf{E} e $\hat{\mathbf{n}}$ e calcula-se

$$\oint_S E \cos \theta da$$

(Onde $\cos \theta = \hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{E}}$ sendo um versor na direção do campo elétrico).

Se não houver simetria essa integral pode ser bastante complicada e até inútil, pois para resolvê-la teríamos que conhecer E e o objetivo agora é usar a lei de Gauss para simplificar os cálculos de campo elétrico. Que simetria? Aquelas, por exemplo como a que vimos no caso da carga puntiforme: o módulo do campo elétrico é constante e *normal* a qualquer superfície esférica concêntrica com a carga q . Vamos ver como funciona?

E2) Verifique a lei de Gauss para o caso de uma carga puntiforme q .

1) Elemento de área $\hat{\mathbf{n}}da = \hat{\mathbf{r}}da$, sendo da o elemento de área de uma esfera. Não vamos precisar de sua forma diferencial, como você vai ver. Em todo caso

$$\hat{\mathbf{n}}da = \hat{\mathbf{r}} \cdot (r \sin \theta d\phi)d\theta$$

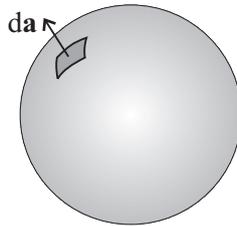


Figura 3.5: Elemento de área

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Então $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} da$.

Como r é constante sobre a superfície, temos

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \int da$$

Então vemos que tudo que necessitaremos é a *área da esfera*

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad c.q.d.$$

Inversamente, poderíamos ter descoberto o campo elétrico, sabendo apenas que, por simetria ele deve ser constante sobre superfícies esféricas concêntricas com q . Vamos ver como funciona

$$\oint_{\text{Sup. de raio } r} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = |\mathbf{E}| \oint_{\text{idem}} da = |\mathbf{E}| 4\pi r^2$$

Usando a lei de Gauss, sabemos que o fluxo calculado tem que ser igual à carga total dentro da esfera, q dividida por ϵ_0 , $\frac{q}{\epsilon_0}$

Então $|\mathbf{E}| \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$, finalmente

$$\longrightarrow |\mathbf{E}| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Note que, devido ao produto escalar, a lei de Gauss não nos diz nada sobre a *direção* do campo, apenas sobre o seu módulo. Mas nos casos em que é interessante usar a lei de Gauss, como neste, *sabemos* por simetria, a direção do campo, por exemplo, no caso de distribuições esféricas, a direção será radial.

Superfícies esféricas: $4\pi R^2$

Superfícies cilíndricas: $2\pi Rz$

Superfícies planas: xy

3.2.2 Como *usar* a lei de Gauss?

O problema mais comum e fonte de erros na aplicação da lei de Gauss está na falta de *distinguir claramente* a superfície de Gauss, que é arbitrária da superfície que envolve o volume das cargas em questão. Por exemplo: suponha que queremos resolver o problema da esfera de raio R uniformemente carregada para pontos dentro e fora da mesma, agora usando a lei de Gauss.

Para evitar a confusão que costuma acontecer vamos sempre identificar a área relativa à lei de Gauss com o subscrito P como fizemos anteriormente, P sendo o

“ponto de observação”.

Pontos fora da esfera carregada.

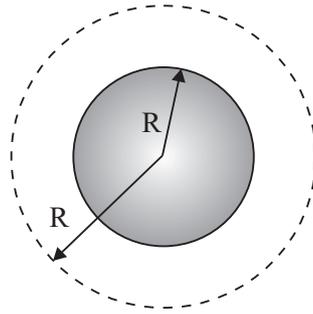


Figura 3.6: Pontos exteriores

1º) O campo será radial e seu módulo será constante sobre superfícies esféricas concêntricas com a distribuição. Então, podemos escrever

$$\oint_S \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{a} = |\mathbf{E}| \cdot 4\pi R_P^2$$

2º) Vamos calcular a quantidade de carga interna a essa superfície

$$q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

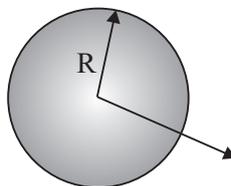


Figura 3.7: Pontos interiores

3º) Usando a lei de Gauss

$$|\mathbf{E}| \cdot 4\pi R_G^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \longrightarrow \quad |\mathbf{E}| = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0 4\pi R_G^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_G^2}$$

Note que R , o raio da distribuição de cargas NÃO COINCIDE com o raio da superfície de Gauss. O erro comum seria ter aprendido essa lei apenas como uma fórmula de cursinho e usá-la cegamente. Isso pode levar ao uso errôneo de uma única letra R para todos os raios envolvidos no problema. Nunca faça isso com as leis da Física. Tente perceber o que elas de fato *são* e depois em como expressar esse conteúdo matematicamente.

Será que deu para aprender? então vamos ao caso mais crítico: pontos *dentro* do volume da esfera carregada.

1º) Como é a superfície de Gauss? Desenhe-a e o seu raio R_P , distinguindo bem R_P do raio da esfera em questão

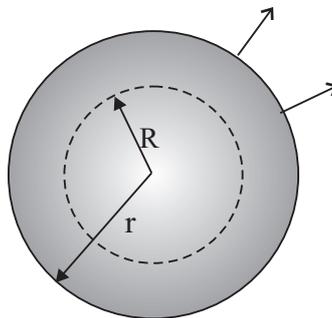


Figura 3.8: Superfície de Gauss

2º) O fluxo:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = |\mathbf{E}| \cdot 4\pi R_P^2$$

3º) A carga total dentro da superfície:

$$q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_P^3$$

NOTE que neste caso o raio que delimita a quantidade de carga que vai contribuir COINCIDE com R_P .

4º) A lei de Gauss:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{\epsilon_0} \longrightarrow |\mathbf{E}| \cdot 4\pi R_P^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi R_P^3$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R_P$$

O mesmo resultado que obtivemos laboriosamente fazendo uma integral tridimensional.

3.2.3 Exercícios resolvidos

E3) Considere agora uma esfera metálica de raio R com carga total Q . Calcule o campo elétrico para pontos exteriores e interiores a essa esfera.

A primeira questão a se considerar antes de pensar em qualquer fórmula é o tipo de material do qual estamos falando. No caso anterior tratava-se de uma esfera dielétrica. Como sabemos, as cargas não tem mobilidade em dielétricos e portanto as cargas podem estar uniformemente distribuídas. Agora estamos falando de uma esfera condutora, isto significa imediatamente que para pontos internos a essa esfera

$$\mathbf{E}_{int.} = 0$$

E os pontos exteriores?

Escolhemos como superfície de Gauss uma superfície esférica arbitrária de raio R_P

$$\text{Então } E \cdot 4\pi R_P^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_P^2}$$

E4) Considere agora um fio retilíneo de comprimento infinito, raio R e densidade volumétrica de cargas ρ como na figura 3.11. Usando a lei de Gauss calcule o campo elétrico para pontos no interior e no exterior do fio.

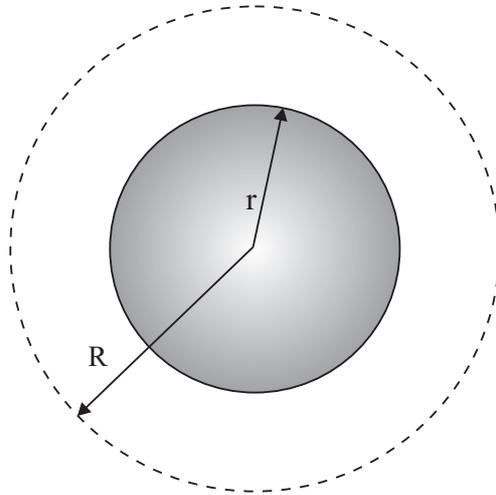


Figura 3.9: Superfície de Gauss

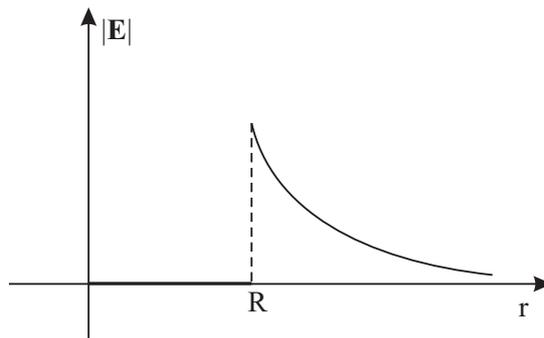


Figura 3.10: Gráfico do campo elétrico

Pontos fora do fio: a superfície de Gauss será um cilindro concêntrico ao fio, como mostra a figura. Note que a simetria existe porque o fio é infinito. Uma vez escolhida a superfície de Gauss, calcula-se a carga interior a ela

$$q = \rho \cdot \pi R^2 \cdot L$$

O fluxo nessa superfície é dado por

$$E \cdot 2\pi R_P L = \frac{\rho \pi R^2 L}{\epsilon_0} \quad (\text{NOTE } R_P \neq R!)$$

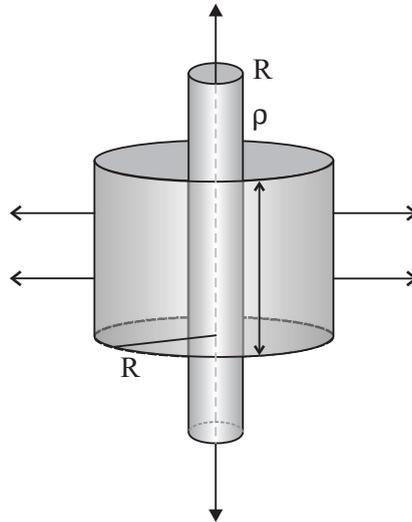


Figura 3.11: Superfície de Gauss

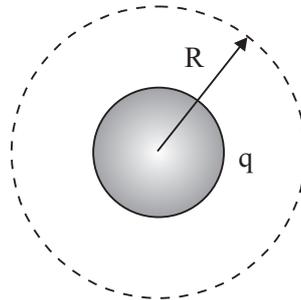


Figura 3.12: Superfície de Gauss

$$E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 R_P}$$

Para pontos internos

$$q' = \pi r'^2 L \rho$$

$$E \cdot 2\pi r' L = \pi r'^2 L \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{NOTE } R_P = r')$$

$$E = \frac{\rho r'}{2\epsilon_0} = \frac{\rho R_P}{2\epsilon_0}$$

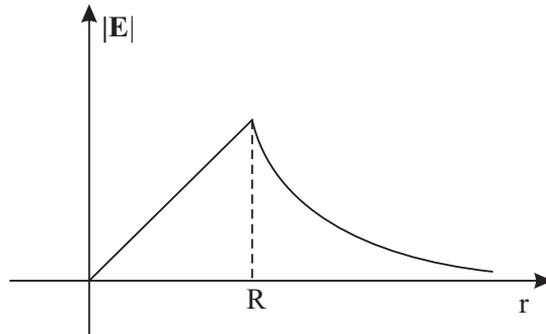


Figura 3.13: Gráfico do campo elétrico

Note que as duas expressões coincidem quando $r = R$.

E5) Que tal agora um pouco mais de física?

Neste problema você certamente entenderá o fenômeno. O desafio é conseguir expressá-lo em termos das leis físicas que conhecemos.

A porção visível de um raio é precedida por um estágio invisível no qual uma coluna de elétrons se estende da nuvem até o solo. Estes elétrons vem da nuvem e das moléculas do ar que são ionizadas dentro da coluna (é a chamada corrente Corona). A densidade linear de carga ao longo da coluna é tipicamente $-1 \times 10^{-3} C/m$. Quando a coluna atinge o solo, os elétrons dentro dela são rapidamente absorvidos pelo solo. durante esse processo, colisões entre os elétrons que se movem e o ar dentro da coluna resultam nu “flash” brilhante de luz. Conhecendo aproximadamente a rigidez dielétrica das moléculas de ar e sabendo que se ionizam num campo elétrico maior que $3 \times 10^6 N/C$, qual é o raio da coluna?

FÍSICA: A idéia importante para fazer a modelagem do problema é considerar que, embora a coluna não seja reta ou infinitamente longa, podemos para efeito de obtermos a *ordem de grandeza*, aproximá-la por uma linha de cargas como na figura 3.14:

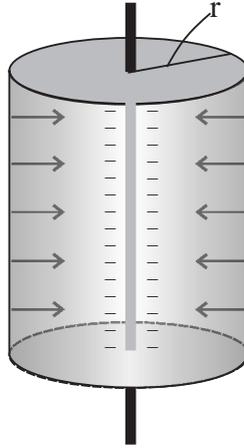


Figura 3.14: Superfície de Gauss

Como a linha está negativamente carregada, o campo elétrico estará apontando para dentro da superfície gaussiana.

A segunda hipótese fundamental é a de que a superfície da coluna de cargas deve estar no raio r_P onde a intensidade do campo elétrico é $3 \times 10^6 N/C$, pois as moléculas do ar dentro desse raio serão ionizadas (o campo fica cada vez maior a partir daí no sentido do fio).

$$\text{Lei de Gauss } E \cdot 2\pi r_P L_P = \frac{\lambda}{\epsilon_0} L_P$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_P}$$

$$r_P = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 E} = \frac{1 \times 10^{-3} C/m}{(2\pi)(8.85 \times 10^{-12} C^2/Nm^2)(3 \times 10^6 N/C)} \cong 6m$$

Sabemos que o raio da porção luminosa do raio é bem menor, da ordem de $0.5m$.

E6) Calcule o campo elétrico de um plano infinito de cargas de densidade superficial σ .

Se o plano é infinito, a simetria nesse caso é uma simetria linear e o campo deve estar orientado perpendicular ao plano. Não há como produzir componentes paralelas ao plano. elas vão se cancelar sempre.

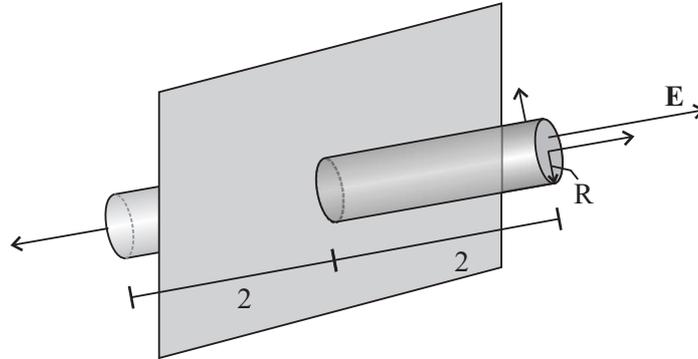


Figura 3.15: Superfície de Gauss

1) A superfície de Gauss será o cilindro indicado na figura, de raio R_P e comprimento L_P . A carga dentro do cilindro considerado é:

$$q = \sigma A, \text{ sendo } A \text{ a área correspondente à tampa do cilindro.}$$

2) O campo elétrico é perpendicular às tampas e paralelo à superfície do cilindro, por isso:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = E \quad \text{nas tampas.}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na superfície.}$$

Portanto, somando todas as contribuições a lei de Gauss nos fornecerá

$$E \cdot 2A = \sigma \frac{A}{\epsilon_0} \longrightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

(na direção perpendicular à tampa do cilindro)

Vemos que esse campo é uniforme.

E7) A figura 3.16 mostra uma carga $+q$ uniformemente distribuída sobre uma esfera não condutora de raio a e localizada no centro de uma casca esférica, condutora, de raio interno b e raio externo c . A casca externa possui uma carga $-q$. Determine $E(r)$:

- No interior da esfera ($r < a$),
- Entre a esfera e a casca ($a < r < b$),
- Dentro da casca ($b < r < c$),
- Fora da casca ($r > c$),
- Que cargas surgem sobre as superfícies interna e externa da casca?

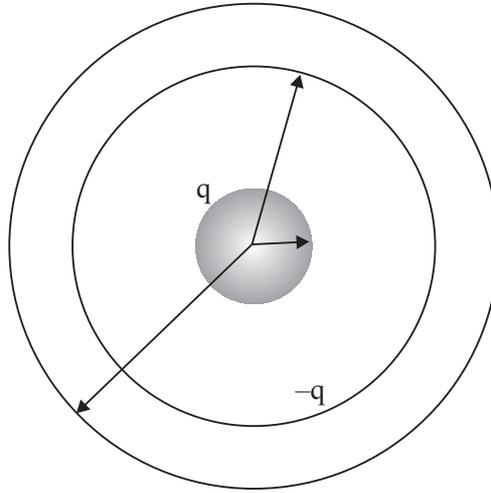


Figura 3.16: Superfície de Gauss

A casca externa é condutora e a interna é isolante. Sabemos como se comportam cargas adicionadas a esses materiais.

Vamos começar com a esfera dielétrica. Este problema foi o primeiro que resolvemos. E como a lei de Gauss nos garante que apenas as cargas *internas* à superfície gaussiana influenciarmos o campo, podemos escrever rapidamente esta resposta:

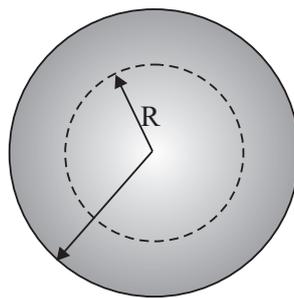


Figura 3.17: Superfície de Gauss

Para $r < a$ a carga contida dentro da superfície desenhada é

$$q \times \frac{\text{Volume dentro de } R_P}{\text{Volume total}} = q \frac{4\pi R_P^3/3}{4\pi a^3/3} = q \frac{R_P^3}{a^3}$$

A lei de Gauss sobre a superfície desenhada nos fornece

$$E \cdot 4\pi R_P^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \cdot \frac{R_P^3}{a^3} \longrightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_P}{a^3}$$

Para $c < r < b$, a carga no interior de qualquer superfície gaussiana esférica será igual a q . Pela lei de Gauss, temos

$$E \cdot 4\pi R_P^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \longrightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_P^2}$$

Para $b < r < c$, estaremos dentro da casca condutora. Sabemos que o campo dentro dessa casca tem que ser nulo. As cargas vão se distribuir nas superfícies interna e externa de maneira a garantir isto.

$$\text{Para } b < r < c \quad E = 0.$$

Mas sabemos que esse $E = 0$ deve ser uma superposição do campo gerado pela esfera interior mais o campo devido à parte interna da casca condutora. Seja R_P o raio da superfície gaussiana e seja q' a carga gerada em $r = b$. A lei de Gauss nos fornece:

$$E \cdot 4\pi R_P^2 = \frac{q + q'}{\epsilon_0}$$

Como $E = 0$, descobrimos que $q' = -q$.

Se existe uma carga $-q$ em $r = b$, e sabemos que esta é a carga sobre o condutor, toda ela vai se mover para a superfície interna da casca condutora. então, o campo elétrico para campos fora do conjunto, i.e, $r > c$ será nulo, uma vez que a soma das cargas no seu interior é zero.

E8) Idem exercício anterior se o condutor estivesse descarregado.

Neste caso o problema $r = b$ é idêntico ao anterior. Vimos que a carga sobre a superfície b tem que ser $-q$ para que não haja campo elétrico entre b e c . Mas agora, como não há cargas “extras” sobre o condutor, os elétrons vão migrar para a superfície interna deixando necessariamente um excesso de carga positiva $+q$ na superfície exterior à casca. Neste caso o campo na região externa será

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r_P^2}$$

E9) Uma carga puntiforme q está localizada no centro de um cubo de aresta d .

- Qual é o valor de $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ estendida a *uma face* do cubo?
- A carga q é deslocada até um vértice do cubo. Qual é agora o valor do fluxo de \mathbf{E} , através de cada uma das faces do cubo?

a) O fluxo total é $\frac{q}{\epsilon_0}$. O fluxo através de cada face do cubo precisa ser o mesmo, por simetria. Portanto, através de cada uma das seis faces:

$$\int_{face} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

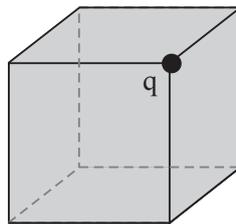


Figura 3.18: Superfície cúbica

Como o campo de q é paralelo à superfície das faces A , B e C , o fluxo através dessas faces é nulo!

O total do fluxo sobre as outras três faces precisa ser $\frac{q}{8\epsilon_0}$ porque esse cubo é um dos oito que circundam q . As três faces estão simetricamente dispostas em relação a q de modo que o fluxo através de cada uma delas é:

$$\frac{1}{3} \frac{q}{8\epsilon_0}$$

E10) Um condutor esférico A contém duas cavidades esféricas. A carga total do condutor é nula. No entanto, há uma carga puntiforme q_b no centro de uma cavidade e q_c no centro da outra. A uma grande distância r está outra q_d . Qual a

força que age em cada um dos quatro corpos A , q_b , q_c e q_d ? Quais dessas respostas, se há alguma, são apenas aproximadas e dependem de ser r relativamente grande?

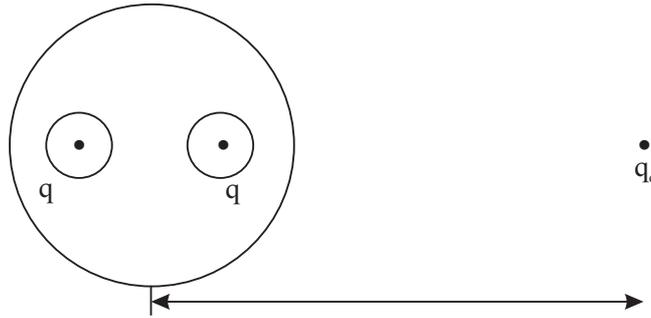


Figura 3.19: Condutor esférico e cavidades

A força sobre q é zero. O campo dentro da cavidade esférica é independente de qualquer coisa fora dela. Uma carga $-q_b$ fica uniformemente distribuída sobre a superfície condutora. O mesmo vale para q_c . Como a carga total no condutor A é zero, uma carga $q_b + q_c$ fica distribuída sobre sua superfície externa. Se q_d não existisse o campo fora de A seria simétrico e radial $E = k \frac{(q_b + q_c)}{r^2}$, que é o mesmo campo de uma carga puntual situada no centro da esfera.

A influência de q_d alterará ligeiramente a distribuição de carga em A , mas *sem* afetar a carga total. Portanto para r grande, a força sobre q_d será aproximadamente

$$k \frac{q_d (q_b + q_c)}{r^2}$$

A força em A precisa ser exatamente igual e oposta à força em q_d . O valor *exato* da força em q_d é a soma da força acima e a força que agiria em q_d se a carga total sobre e dentro de A fosse 0, que corresponde à atração devido a indução de cargas sobre a superfície da esfera.

E11) Considere uma carga q a uma distância h acima de um plano condutor, que tomaremos como infinito. Seja $q > 0$.

- a) Desenhe as linhas de campo elétrico.
- b) Em que ponto da superfície do condutor se encontra uma linha que nasce na carga puntiforme e sai dela horizontalmente, isto é, paralelamente ao plano?

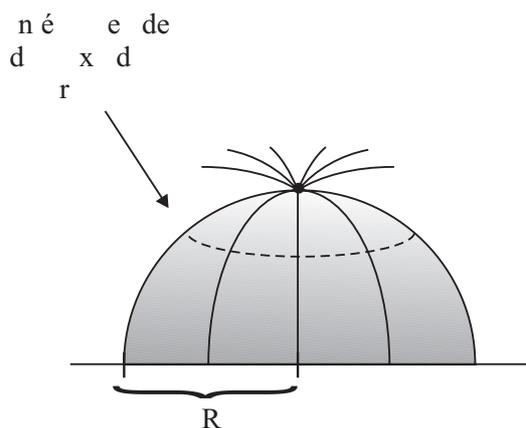


Figura 3.20: Linhas de campo

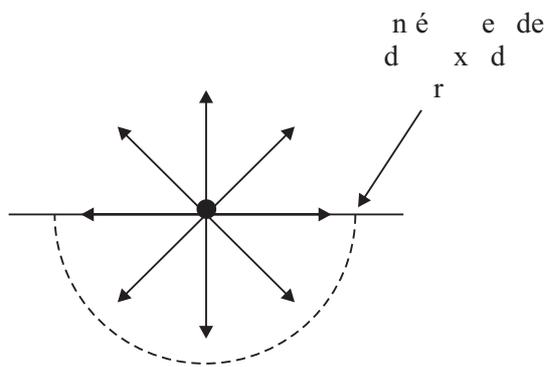


Figura 3.21: Visão em *close up*

Vamos atribuir ao plano o potencial zero. Vamos chamar de z o eixo perpendicular ao plano que passa pela carga q . Esperamos que a carga positiva q

atraia carga negativa do plano. Claro que a carga negativa não se acumulará numa concentração infinitamente densa no pé da perpendicular que passa por q .

Também lembremos que o campo elétrico é sempre perpendicular á superfície do condutor, nos pontos da superfície. Muito próximo à carga q , por outro lado, a presença do plano condutor só pode fazer uma pequena diferença.

Podemos usar um artifício. Procuramos um problema facilmente solúvel cuja solução (ou parte dela) pode ser ajustada ao problema em questão.

Considere duas cargas iguais e opostas, puntiformes, separadas pela distância $2h$.

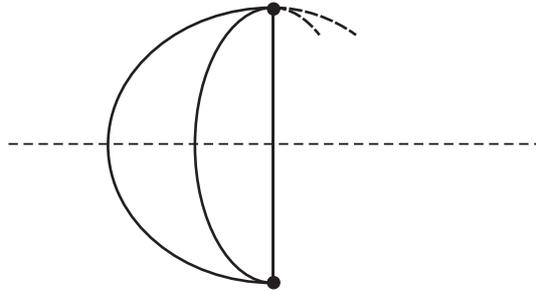


Figura 3.22: Artifício da carga imagem

No plano bissetor da reta que une as cargas (reta AA) o campo elétrico é em todos os pontos perpendicular ao plano.

A metade superior do desenho acima satisfaz a todos os requisitos do problema da carga e do plano infinito.

Podemos dessa forma calcular a intensidade e a direção do campo sobre o plano condutor em qualquer ponto.

Considere um ponto na superfície a uma distância r da origem.

A componente z do campo de q neste ponto é

$$E_z = -\frac{kq}{(r^2 + h^2)} \cos \theta$$

A “carga imagem”, $-q$, sob o plano, contribui com uma componente z igual.

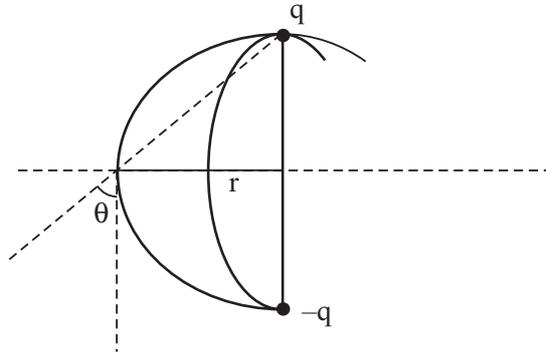


Figura 3.23: Ângulo do campo

Assim o campo elétrico aí é dado por

$$E_z = -\frac{2kq}{(r^2 + h^2)} \cos \theta = -\frac{2kq}{(r^2 + h^2)} \frac{h}{(r^2 + h^2)^{1/2}}$$

$$= -\frac{2kqh}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

Uma pergunta que podemos responder seria: Qual a densidade superficial de carga no plano condutor?

Podemos responder esta questão usando a lei de Gauss

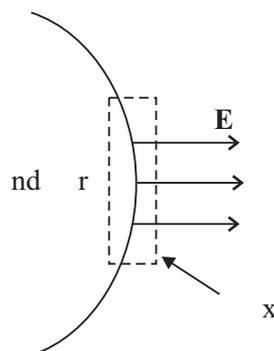


Figura 3.24: Superfície de Gauss

Não há fluxo através do “fundo” da caixa. logo, pela lei de Gauss

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E_n A = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

onde E_n é a componente normal do campo. Portanto

$$\sigma = E_z \epsilon_0 = -\frac{2kqh}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \epsilon_0 = -\frac{2qh}{4\pi\epsilon_0(r^2 + h^2)^{3/2}} \epsilon_0 = -\frac{qh}{2\pi(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

(onde usamos $k \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$).

Apenas para verificação, a carga superficial total deve-se igualar a $-q$.

De fato:

$$\text{Carga superficial total} = \int_0^\infty \sigma 2\pi r dr$$

$$\text{Onde usamos } \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r dr d\theta$$

$$= -q \int_0^\infty \frac{hr dr}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = -q$$

Este é o chamado método das imagens! Voltando à solução do nosso problema, nós determinaremos R , a distância a partir da origem que a linha de campo que parte horizontalmente de q , atinge o plano como sendo a distância que determina a metade da carga induzida no plano (isto é, $-\frac{q}{2}$), confinada num círculo de raio R .

$$-\frac{q}{2} = \int_0^\infty \sigma 2\pi r dr$$

ou

$$\frac{1}{2} = \int_0^R \frac{hr dr}{(R^2 + h^2)^{3/2}} = \left[-\frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right]_0^R$$

$$\Rightarrow \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} = \frac{1}{2}$$

ou

$$h^2 + R^2 = 4h^2 \Rightarrow \sqrt{3}h$$

E12) Uma região esférica está uniformemente carregada com uma densidade volumétrica de carga ρ . Seja \mathbf{r} o vetor que vai do centro da esfera a um ponto genérico P no interior da esfera.

a) Mostre que o campo elétrico no ponto P é dado por

$$\mathbf{E} = \frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0}$$

b) Uma cavidade esférica é aberta na esfera, como nos mostra a figura 3.25. Usando o conceito de superposição mostre que o campo elétrico, em todos os pontos no interior da cavidade é

$$\mathbf{E} = \frac{\rho \mathbf{a}}{3\epsilon_0}$$

Uniforme, onde \mathbf{a} é o vetor que vai do centro da esfera ao centro da cavidade. Note que ambos os resultados são independentes dos raios da esfera e da cavidade.

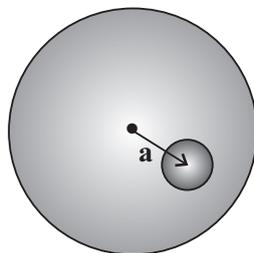


Figura 3.25: Cavidade esférica

a) Desenhando a superfície de Gauss e tomando um ponto genérico sobre ele, teremos

Usando a lei de Gauss, vem

$$|\mathbf{E}| \cdot 4\pi r_P^2 = \rho \frac{4\pi r_P^3}{3\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_P \hat{\mathbf{r}} \quad c.q.d.$$

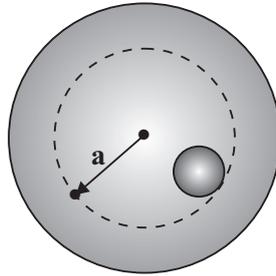


Figura 3.26: Superfície de Gauss

b) A maneira de calcular o campo dentro da cavidade é usar o princípio da superposição. Se a densidade volumétrica de carga também preenchesse a cavidade teríamos que o campo num ponto dentro da cavidade $\hat{\mathbf{r}}$ (ver figura 3.27):

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \hat{\mathbf{r}} \quad c.q.d.$$

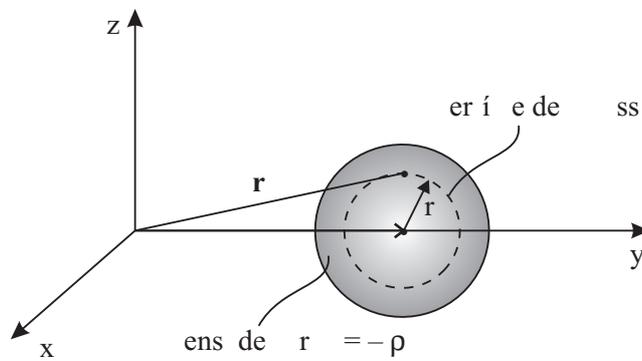


Figura 3.27: Princípio da superposição

Para incluir o efeito da cavidade, usamos o princípio da superposição, i.e, consideramos esse problema somado com o problema de uma distribuição uniforme, com carga *oposta* localizada em $\hat{\mathbf{a}}$.

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}_P$$

O fluxo do campo elétrico que atravessa a superfície de Gauss é

$$|\mathbf{E}_2| \cdot 4\pi r_P^2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \times \frac{4\pi r_P^3}{3}$$

$$|\mathbf{E}_2| = -\frac{\rho r_P}{3\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_P}{r_P} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{a})$$

O campo total é dado por $\mathbf{E}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{E}_2$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{a} \quad c.q.d.$$