UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - INSTITUTO DE FÍSICA
Complementos de Mecânica Clássica

Exercícios de Mecânica Analítica

Rafael Wagner - 8540310

21 de novembro de 2016

1 Primeiro exercício

Um sistema "pêndulo-mola"consiste de uma massa m amarrada num dos extremos de uma mola de massa desprezível e constante k cujo outro extremo está fixo a um suporte. Quando a mola está suspensa livremente, seu comprimento é L. Assuma que o movimento ocorre no plano vertical.

(a) Escreva as equações de Lagrange desse movimento. Use coordenadas θ e $\rho = r - r_0$ onde r_0 é o comprimento em repouso do pêndulo.
Para fazer isso tentemos entender como o sistema está e onde é melhor colocar a origem. A ideia mais importante do exercício é colocar a origem $\mathcal{O}$ no lugar correto. Desse modo escrevemos a parametrização das coordenadas generalizadas da massa m e construímos a Lagrangeana a partir de $\mathcal{L} = T - U$ com T sendo a nossa energia cinética e U a energia potencial.
Vamos entender o que são as nossas variáveis e vamos colocar a origem no ponto fixo cuja mola está presa. Supomos que ela esteja bem fixa em um anteparo e esse ponto será a nossa origem por motivos praticos, precisamos utilizar as coordenadas descritas acima, que são coordenadas polares, então queremos descrever o movimento da massa a partir de uma variável angular θ e uma variável radial ρ.
Com essa ideia intuitiva da origem e de como queremos descrever o movimento iniciamos o experimento medindo o comprimento L da mola sem nenhum peso fixado.

Figura 1: Apenas fixamos a mola sem colocar peso nenhum no sistema. A mola tem um peso que consideramos muito menor (desprezível com relação à) que a massa m. L é o comprimento dessa mola nessa situação.

Em seguida colocamos um peso m acoplado à mola de modo que ela se deforma e esperamos até que a mola pare de vibrar. Medimos esse tamanho novo da mola $r_0 > L$ com relação ao centro de massa do peso. Esse é o comprimento de repouso e ele é dado pela relação

$$F_{mola} = -k(r_0 - L) = -mg = P \tag{1}$$

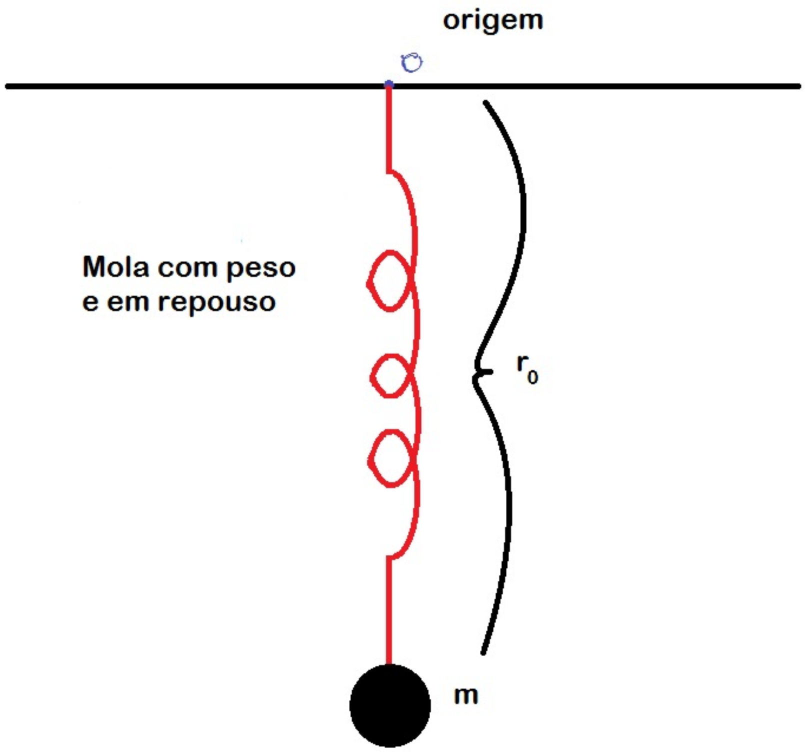

Figura 2: Acoplamos uma massa m à mola de modo que ela se deforma e esperamos que ela permaneça estável (parada) com relação à nossa origem $\mathcal{O}$.

Onde colocamos o sistema O_{xy} como y para cima e x para a direita com relação ao leitor. Nesse caso r_0 fica

$$r_0 = \frac{mg}{k} + L \tag{2}$$

Agora vamos parametrizar as coordenadas da massa m. Para isso fazemos as considerações contidas na Figura 3

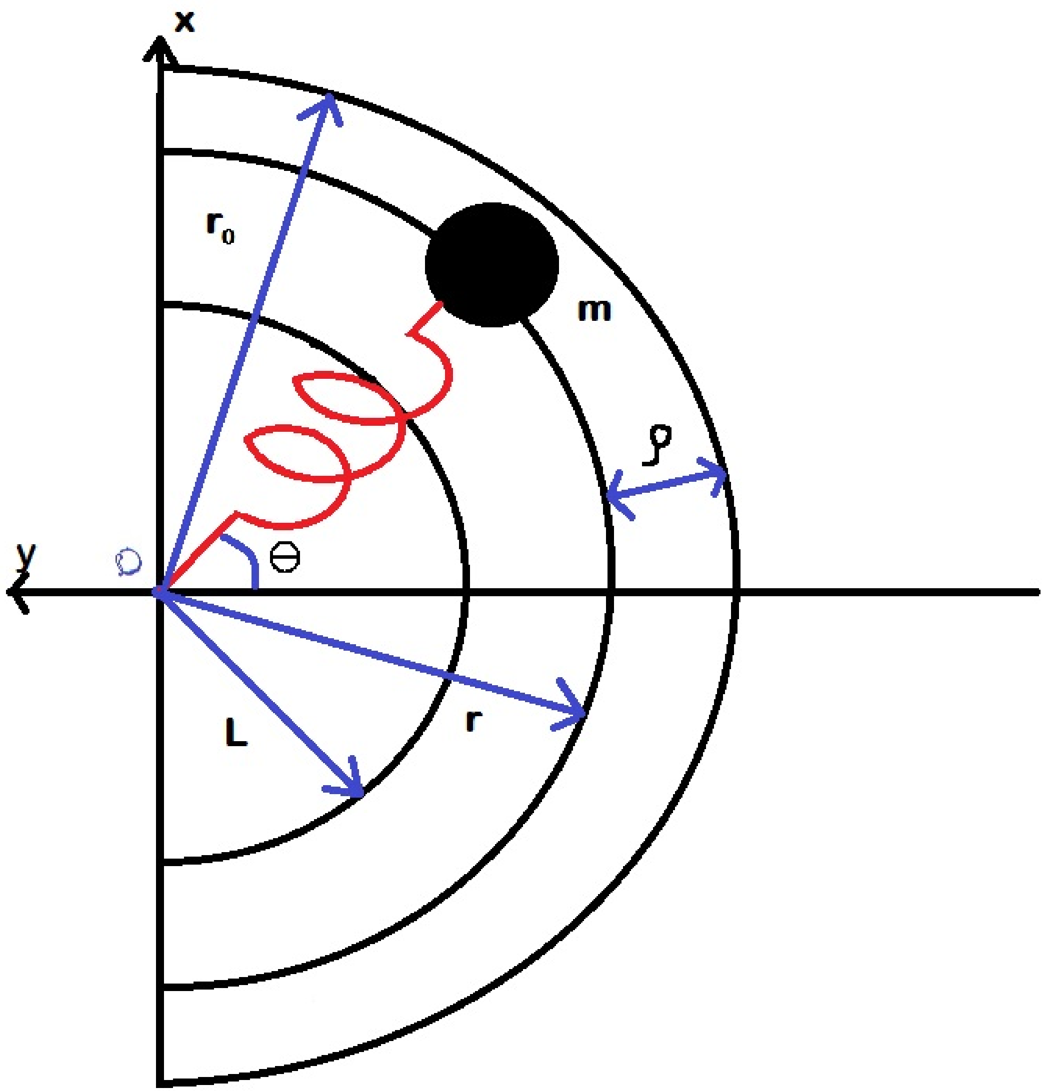

Figura 3: Como definimos as nossas coordenadas e como elas estão relacionadas às coordenadas polares usuais (r, θ). Desculpe pelo desenho meio tosco.

Note que quando o pêndulo faz seu movimento existem movimentos radiais e eles são tais que r a posição instantânea pode ser maior ou menor do que r_0 a posição do equilíbrio. Pode ser, caso a força da mola seja suficientemente grande, que inclusive r seja menor do que L. O desenho da Figura 3 representa apenas uma situação possível.

Com isso temos a seguinte parametrização:

$$\begin{cases} x &= rsin(\theta) = (\rho + r_0)sin(\theta) \\ y &= rcos(\theta) = (\rho + r_0)cos(\theta) \end{cases} \tag{3}$$

Donde concluímos que

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho}sin(\theta) + \rho\dot{\theta}cos(\theta) + r_0\dot{\theta}cos(\theta) \\ \dot{y} = \dot{\rho}cos(\theta) - \rho\dot{\theta}sin(\theta) - r_0\dot{\theta}sin(\theta) \end{cases} \tag{4}$$

Quadrando essas equações temos que

$$\dot{x}^2 = \dot{\rho}^2 sin^2(\theta) + 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}sin(\theta)cos(\theta) + 2r_0\dot{\rho}\dot{\theta}sin(\theta)cos(\theta) + \rho^2\dot{\theta}^2cos^2(\theta) + 2r_0\rho\dot{\theta}^2cos^2(\theta) + r_0^2\dot{\theta}^2cos^2(\theta)$$

$$\dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 cos^2(\theta) - 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}cos(\theta)sin(\theta) - 2r_0\dot{\rho}\dot{\theta}cos(\theta)sin(\theta) + \rho^2\dot{\theta}^2sin^2(\theta) + 2r_0\rho\dot{\theta}^2sin^2(\theta) + r_0^2\dot{\theta}^2sin^2(\theta)$$

Somando essas duas quantidades ficamos com

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \dot{\theta}^2\rho^2 + \dot{\theta}^2 r_0^2 + 2r_0\rho\dot{\theta}^2 \tag{5}$$

E obtemos então a energia cinética

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \dot{\theta}^2\rho^2 + \dot{\theta}^2 r_0^2 + 2r_0\rho\dot{\theta}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \dot{\theta}^2(\rho + r_0)^2\right) \tag{6}$$

Voltando nossa atenção para a energia potencial teremos duas contribuições: uma parte potencial gravitacional para pequenas alturas mgh e uma parte potencial de mola. Na parte gravitacional teremos que, como a massa está em valores negativos de y, a altura é a componente y da massa com relação à origem $\mathcal{O}$, que é $rcos(\theta)$

$$U_{gravidade} = mgh = mg(-rcos(\theta)) = -mg(\rho + r_0)cos(\theta) \tag{7}$$

A energia potencial da mola é dada pela variação do comprimento da mola $r - L$.

$$U_{mola} = \frac{k}{2}(r - L)^2 = \frac{k}{2}(\rho + r_0 - L)^2 \tag{8}$$

Nesse caso teremos que a nossa Lagrangeana será dada por

$$\mathcal{L} = T - U_{mola} - U_{gravidade} \tag{9}$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \dot{\theta}^2\rho^2 + \dot{\theta}^2 r_0^2 + 2r_0\rho\dot{\theta}^2\right) - \frac{k}{2}(\rho + r_0 - L)^2 + mg(\rho + r_0)cos(\theta) \tag{10}$$

Notamos que a nossa $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, \rho, \dot{\rho})$ de modo que teremos duas equações de Euler-Lagrange para obter:

Equação em ρ:

Para a parte radial teremos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = mgcos(\theta) + \frac{m}{2} 2r_0\dot{\theta}^2 + m\dot{\theta}^2\rho - k(\rho + r_0 - L) \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}}\right) = m\ddot{\rho} \tag{12}$$

Portanto concluímos que a equação deve ser

$$m\ddot{\rho} - m\dot{\theta}^2(\rho + r_0) + k(\rho + r_0 - L) - mgcos(\theta) = 0 \tag{13}$$

Equação em θ:

Para a parte angular teremos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mg(\rho + r_0)sin(\theta) \tag{14}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} + mr_0^2\dot{\theta} + 2mr_0\rho\dot{\theta} \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\rho^2\ddot{\theta} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + mr_0^2\ddot{\theta} + 2mr_0\rho\ddot{\theta} + 2mr_0\dot{\rho}\dot{\theta} = m\ddot{\theta}(\rho + r_0)^2 + 2m\dot{\rho}\dot{\theta}(\rho + r_0) \tag{16}$$

Concluímos que

$$m\ddot{\theta}(\rho + r_0)^2 + 2m\dot{\rho}\dot{\theta}(\rho + r_0) + mg(\rho + r_0)sin(\theta) = 0 \tag{17}$$

Simplificando (podemos 'cortar' os valores m e $\rho + r_0$) obtemos a equação de Euler-Lagrange para θ:

$$\ddot{\theta}(\rho + r_0) + 2\dot{\rho}\dot{\theta} + gsin(\theta) = 0 \tag{18}$$

(b)Resolva as equações do movimento para aproximações de pequenos ângulos e pequenos deslocamentos em relação à posição de equilíbrio. Considere condições iniciais $\theta_0 = 0$, $\rho_0 = A$, $\dot{\rho}_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = gB/r_0$ com A e B duas constantes.

Agora temos que fazer as seguintes aproximações. Primeiro que $\theta << 1$ e então teremos que $cos(\theta) = 1$ e que $\sin(\theta) = \theta$. Teremos também que como os movimentos são pequenos devemos ter que $\rho << r_0$ e que $\dot{\rho}$ e $\dot{\theta}$ também são pequenos, donde quaisquer termos quadráticos podem ser negligenciados.

Fazendo essas apriximações nas equações de Euler-Lagrange obtidas teremos que

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{\rho} - m\dot{\theta}^2(\rho + r_0) + k(\rho + r_0 - L) - mgcos(\theta) = 0 \overset{\dot{\theta}^2 \approx 0}{\Rightarrow} \\
& m\ddot{\rho} + k(\rho + r_0 - L) - mgcos(\theta) = 0 \overset{cos(\theta) \approx 1}{\Rightarrow} \\
& \\
& m\ddot{\rho} + k(\rho + r_0 - L) - mg = 0
\end{aligned}
$$

Agora usamos que

$$k(\rho + r_0 - L) = k(\rho + \frac{mg}{k}) = k\rho + mg \tag{19}$$

Logo

$$\overset{(19)}{\Rightarrow} m\ddot{\rho} + k\rho = 0 \tag{20}$$

A solução dessa equação de movimento harmônico é dada por

$$\rho(t) = \alpha_\rho cos(\omega_0 t + \delta_\rho) \tag{21}$$

Onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ e α_ρ,δ_ρ são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais. No caso as condições para ρ são que $\rho(0) = A$ e $\dot{\rho}(0) = 0$, onde A é positivo. Nesse caso teremos que

$$-\alpha_\rho \omega_0 sin(\delta_\rho) = 0 \tag{22}$$

Para a velocidade e isso nos implica que $\delta_\rho = 0$ é uma solução possível. Aplicando a condição da posição inicial teremos

$$\alpha_\rho cos(0) = A \tag{23}$$

Portanto teremos que

$$\rho(t) = Acos(\omega_0 t) \tag{24}$$

Para a equação angular teremos que

$$
\begin{aligned}
& \ddot{\theta}(\rho + r_0) + 2\dot{\rho}\dot{\theta} + gsin(\theta) = 0 \overset{\dot{\rho}\dot{\theta} \approx 0}{\Rightarrow} \\
& \ddot{\theta}(\rho + r_0) + gsin(\theta) = 0 \overset{\rho << r_0}{\Rightarrow} \\
& \ddot{\theta} r_0 + gsin(\theta) = 0 \overset{sin(\theta) \approx \theta}{\Rightarrow} \\
& \ddot{\theta} r_0 + g\theta = 0
\end{aligned}
$$

Com isso teremos que θ também satisfaz uma equação harmônica. Agora para um valor $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{g/r_0}$ teremos que

$$\theta(t) = \alpha_\theta cos(\tilde{\omega}_0 t + \delta_\theta) \tag{25}$$

Aplicando as condições iniciais teremos que

$$\alpha_\theta cos(\delta_\theta) = 0 \tag{26}$$

O que nos implica que $\delta_\theta = \pm\pi/2$ é solução. Note que a solução positiva não pode ocorrer por causa da segunda condição inicial (o seno é uma função ímpar) e nós temos que $B > 0$.

$$-\alpha_\theta \tilde{\omega}_0 sin(-\pi/2) = gB/r_0 = \tilde{\omega}_0^2 \tag{27}$$

logo

$$\alpha_\theta = \tilde{\omega}_0 \tag{28}$$

Temos então que

$$\theta(t) = B\sqrt{\frac{g}{r_0}} cos\left(\sqrt{\frac{r}{r_0}} t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{29}$$

2 Segundo exercício

Uma partícula de massa m está presa a uma mola de comprimento l_0 e constante elástica k, de tal forma que ela somente pode ser movimentar na direção vertical. Outra partícula de massa m está acoplada à primeira através de uma haste fina de comprimento l e massa desprezível. O movimento desse pêndulo está restrito a um plano vertical que contém a reta correspondente à trajetória da primeira partícula. Escreva as equações de Lagrange desse sistema. Considere a origem das coordenadas na posição de equilíbrio da mola.

Finja que o exercício não diz de imediato onde colocar a origem e vamos tentar nos convencer de que essa é uma boa escolha :)

Nesse caso nós temos uma situação inusitada onde a massa que está presa à mola se movimente apenas para cima e para baixo. Entretando a outra massa faz o movimento de um pêndulo comum cujo movimento está inteiramente contido no plano (não é um problema tridimensional). Teremos o seguinte caso ilustrado na figura abaixo portanto

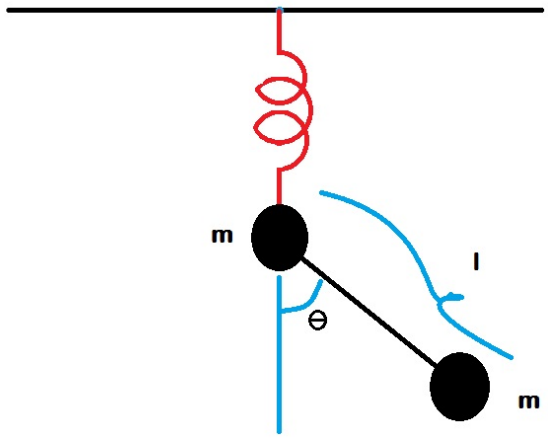

Figura 4: Aqui colocamos a massa m na mola e essa massa vibra somente na direção vertical. Acoplamos a esta uma outra massa, as duas estando presas uma à outra por uma barra de comprimento l.

Onde nós colocamos a origem?... Essa pergunta não é simples. Note que gostaríamos de usar coordenadas polares novamente, principalmente para descrever o movimento da segunda massa. Podemos usar que a massa presa à mola se movimenta só na vertical, ou seja, possuí apenas um grau de liberdade o seu movimento, denotemos por y. Pensando em coordenadas polares, podemos escrever o movimento da segunda massa como x_2 descrito por coordenadas polares e a primeira massa não afeta esse movimento, e mais, verticalmente ela afeta apenas linearmente $y_2 = y + etc.$

Pensando nisso vamos tentar resolver o exercício colocando a origem no ponto onde a mola ainda não possúi nenhuma massa acoplada (l_0). Definimos como o sentido positivo de y para cima e o sentido positivo de x para a direita com relação ao leitor.

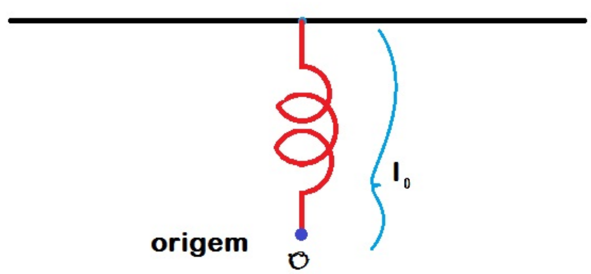

Figura 5: Esquema de onde nós colocamos a origem para resolver os problemas propostos pelo exercício.

Com essa escolha vamos escrever a parametrização dos valores x_1,y_1 que caracterizam as coordenadas da primeira massa e x_2, y_2 que caracterizam as coordenadas da segunda massa.

$$\begin{cases} x_1 & = 0 \\ & y_2 = y \end{cases} \tag{30}$$

Agora, esse valor y é uma coordenada generalizada! Observe o que essa coordenada mede: ela mede a variação com relação à posição da origem, podendo portanto ser negativa, positiva ou mesmo nula com o passar do tempo.
Agora as equações para a segunda partícula

$$\begin{cases} x_2 & = lsin(\theta) \\ & y_2 = y - lcos(\theta) \end{cases} \tag{31}$$

Com isso teremos as seguintes energias cinéticas correspondentes a cada uma das partículas

$$T_1 = \frac{m}{2}\dot{y}^2 \tag{32}$$

$$T_2 = \frac{m}{2}\left(\dot{y}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{y}\dot{\theta}sin(\theta)\right) \tag{33}$$

A cinética total será então

$$T = T_1 + T_2 = m\dot{y}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{y}\dot{\theta}sin(\theta) \tag{34}$$

Agora vamos calcular a energia de cada partícula. A primeira partícula possuí uma parte de energia devida à mola e outra parte devida ao potencial gravitacional mgh.

$$U_1 = U_{mola} + U_{gravidade} = \frac{k}{2}y^2 + mgy \tag{35}$$

Note que o valor de h sempre é aquele relativo à origem.
Para a segunda partícula existe somente o termo gravitacional

$$U_2 = U_{gravidade} = mgh = mg(y - lcos(\theta)) = mgy - mglcos(\theta) \tag{36}$$

Portanto a energia potencial total do sistema será

$$U = U_1 + U_2 = \frac{k}{2}y^2 + 2mgy - mglcos(\theta) \tag{37}$$

E com isso a Lagrangeana do sistema será simplesmente

$$\mathcal{L} = T - U = m\dot{y}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{y}\dot{\theta}sin(\theta) - \frac{k}{2}y^2 - 2mgy + mglcos(\theta) \tag{38}$$

Note que temos então as seguintes coordenadas generalizadas $\mathcal{L} = \mathcal{L}(y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$ de modo que teremos então duas equações de Euler-Lagrange.

Equação para y:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -ky - 2mg \tag{39}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = 2m\dot{y} + ml\dot{\theta}sin(\theta) \tag{40}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = 2m\ddot{y} + mlsin(\theta)\ddot{\theta} + ml\dot{\theta}^2cos(\theta) \tag{41}$$

Temos portanto a equação

$$2m\ddot{y} + mlsin(\theta)\ddot{\theta} + ml\dot{\theta}^2cos(\theta) + ky + 2mg = 0 \tag{42}$$

Equação para θ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = ml\dot{y}\dot{\theta}cos(\theta) - mglsin(\theta) \tag{43}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{y}sin(\theta) \tag{44}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{y}sin(\theta) + ml\dot{y}\dot{\theta}cos(\theta) \tag{45}$$

Portanto

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{y}sin(\theta) + ml\dot{y}\dot{\theta}cos(\theta) - ml\dot{y}\dot{\theta}cos(\theta) + mglsin(\theta) = 0 \Rightarrow \tag{46}$$

$$l\ddot{\theta} + \ddot{y}sin(\theta) + gsin(\theta) = 0 \tag{47}$$

E isso completa esse exercício

3 Terceiro Exercício

Utilize o formalismo Hamiltoniano para determinar as equações de movimento de uma partícula de massa m que se movimenta na superfície de um cilindro definido por $x^2 + y^2 = R^2$. A partícula está submetida à uma força dirigida para a origem e proporcional â distância da partícula à origem onde $\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$ e $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Usando coordenadas cilíndricas podemos colocar a origem no centro de simetria do cilíndro em algum ponto em que a massa está paralela ao mesmo. O importante não é onde a origem está mas é importante que esteja no eixo de simetria para podermos parametrizar esse problema com coordenadas cilíndricas.

$$\begin{cases} x & = \rho cos(\theta) \\ y & = \rho sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \tag{48}$$

Mas notamos antes que existe um vínculo, ou seja, uma restrição com relação ao movimento dessa partícula dado pelo fato de que a partícula está restrita a se mover na superfície, ou seja temos que $\rho = R =$ constante.

$$\begin{cases} x & = Rcos(\theta) \\ y & = Rsin(\theta) \\ z = z \end{cases} \tag{49}$$

Nesse caso teremos que

$$\dot{x} = -R\dot{\theta}sin(\theta) \tag{50}$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta}cos(\theta) \tag{51}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = R^2\dot{\theta}^2 sin^2(\theta) + R^2\dot{\theta}^2 cos^2(\theta) + \dot{z}^2 \tag{52}$$

A energia cinética da partícula será, portanto,

$$T = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) \tag{53}$$

A energia potencial da partícula é dada simplesmente por

$$U = \frac{kr^2}{2} \tag{54}$$

Onde escrevemos $r^2 = \rho^2 + z^2$ e portanto teremos que

$$U = \frac{k(\rho^2 + z^2)}{2} \tag{55}$$

Como $\rho = R$ devemos ter

$$U = \frac{k(R^2 + z^2)}{2} \tag{56}$$

E portanto teremos a Lagrangeana dada por

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{k(R^2 + z^2)}{2} = \mathcal{L}(\dot{\theta}, z, \dot{z}) \tag{57}$$

Como nós temos que

1. A energia cinética é função apenas quadrática das velocidades generalizadas

2. A energia potencial é independente das velocidades

Então é válido que $\mathcal{H} = E$ onde E é a energia mecânica do sistema $E = T + U$. Também temos que, E é constante porque a Lagrangeana não depende explicitamente do tempo

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tag{58}$$

Portanto podemos escrever a nossa Hamiltoniana facilmente usando isso

$$\mathcal{H} = T + U = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{k(R^2 + z^2)}{2} \tag{59}$$

A partir disso podemos calcular as equações do movimento (canônicas) para θ e para z:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} = \dot{\theta} \tag{60}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 0 = \dot{p_\theta} \tag{61}$$

Concluímos que p_θ =constante e, então, $\dot{\theta}$ =constante.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} = \dot{z} \tag{62}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = kz = -\dot{p_z} \tag{63}$$

Concluímos então que $m\ddot{z} = -kz$ que é a equação de um oscilador harmônico.

4 Quarta Questão (optativa)

Dê exemplo de uma Lagrangeana que não é igual à $T - U$. Mostre claramente porque a escolha $T - U$ não pode ser tomada.

Um primeiro exemplo é a Lagrangeana de uma partícula livre que se move próxima da velocidade da Luz. Se a partícula está livre então teremos $U = 0$. Nesse caso teremos que a partícula possui somente energia cinética, que será toda sua energia, dada por

$$T = E - E_0 = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2 \tag{64}$$

donde a sua Lagrangeana seria

$$\mathcal{L} = (\gamma - 1) m_0 c^2 = \mathcal{L}(v) \tag{65}$$

Mas isso faz com que o momento com relação à velocidade seja

$$p = \gamma^3 \frac{v}{c^2} \tag{66}$$

Se, por outro lado, escrevermos

$$\mathcal{L} = -\gamma^{-1} m_0 c^2 \tag{67}$$

teremos que o momento será dado por

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = -m_0 c^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{1 - v^2/c^2}\right) = \gamma m_o v \tag{68}$$

que é o momento correto para a partícula.