Controle por Realimentação de Estados – Alocação de Polos

11.1 Introdução

Esta experiência tem por objetivo efetuar o controle de posição do servomecanismo utilizando uma abordagem em espaço de estados. Será considerada uma alocação de polos por realimentação de estados, com um integrador para eliminar o erro em regime estacionário.

11.2 Espaço de estados

A modelagem por espaço de estados possui as seguintes vantagens:

- Equações de estado fornecem um modelo matemático de grande generalidade;
- A notação matricial compacta facilita muito manipulações complexas;
- Pode descrever sistemas lineares e também não lineares;
- Pode descrever sistemas invariantes no tempo e também variantes no tempo;
- Adequada para sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO);

Considere um sistema SISO linear e invariante no tempo. O mesmo pode ser representado da seguinte forma em espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \quad y = Cx \end{cases} \tag{11.1}$$

onde,

- x: vetor de estado (vetor n);
- u: sinal de controle (escalar);
- y: sinal de saída (escalar);
- A: matriz $n \times n$ denominada matriz de estados;
- B: matriz $n \times 1$ denominada matriz de entrada;
- C: matriz $1 \times n$ denominada matriz de saída;

Os autovalores da matriz A representam os polos do sistema. Ao aplicar a transformada de Laplace em (11.1), tem-se:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow (sI - A)X(s) = BU(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s)$$

Assim,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B = C\,\frac{\mathrm{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}B \tag{11.2}$$

Com isso, comprova-se que os autovalores de A representam os polos do sistema.

11.3 Controlabilidade e Observabilidade

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade possuem um papel importante no projeto de sistemas de controle no espaço de estados.

Controlabilidade: um sistema será dito controlável no instante t_0 se existir uma entrada (vetor de controle) capaz de transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0)$ para qualquer outro estado, em um intervalo de tempo finito.

Para o sistema ser completamente controlável, a matriz

$$Co = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B],$$

denominada matriz de controlabilidade, deve possuir posto (rank) igual a n.

Observabilidade: Um sistema será dito observável no instante t_0 se, com o sistema no estado $x(t_0)$, for possível determinar esse estado a partir da observação da saída durante um intervalo de tempo finito. Pode-se mostrar que para o sistema ser completamente observável, o posto da matriz

$$Ob = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

deve ser igual a n. Essa é a matriz de observabilidade.

11.4 Alocação de Polos por Realimentação de Estados

Se o sistema for controlável, há uma lei de controle da forma $u = -K x$, capaz de alocar arbitrariamente o os polos do sistema em malha fechada. A partir da equação (11.1), o sistema em malha fechada é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x \\ y = Cx \end{cases} \qquad (11.3)$$

Os polos do sistema em malha fechada correspondem aos autovalores da matriz (A – BK). A figura 11.1 apresenta o diagrama em blocos do sistema em malha fechada.

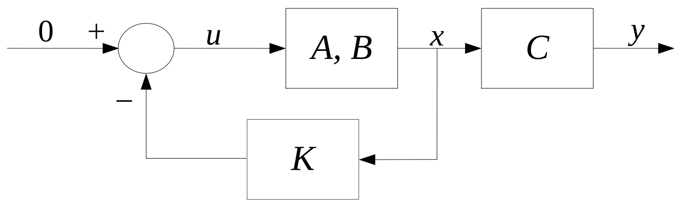

Figura 11.1 – Sistema em malha fechada com realimentação de estados.

Os autovalores do sistema em malha fechada são os valores de s que satisfazem a seguinte equação:

$$\det[sI - (A - BK)] = 0 \tag{11.4}$$

Seja $p = [p_1 \;\; p_2 \;\; \ldots \;\; p_n]^T$ o vetor com os polos desejados de malha fechada. Se o sistema for controlável, então existe K, tal que,

$$\det[sI - (A - BK)] = (s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n) \tag{11.5}$$

Para sistemas SISO, a solução de (11.5) pode ser encontrada pela fórmula de Ackerman. No MATLAB, o problema é resolvido da seguinte forma: **`K = acker(A,B,p)`**. Para sistemas MIMO, pode-se utilizar o comando **`place`** do MATLAB com a mesma sintaxe do comando **`acker`**. A função **`place`** também pode ser aplicada para sistemas SISO.

11.5 Inserção de Integrador

O diagrama da Figura 11.1 representa um sistema de controle em modo regulatório, onde se deseja estabilizar o sistema (levar os estados para zero) sem seguir uma dada trajetória.

Para que o sistema seja capaz de seguir uma trajetória com erro em regime estacionário nulo, integradores precisam ser adicionados nos canais de entrada. No caso SISO, pode-se ter o seguinte diagrama equivalente.

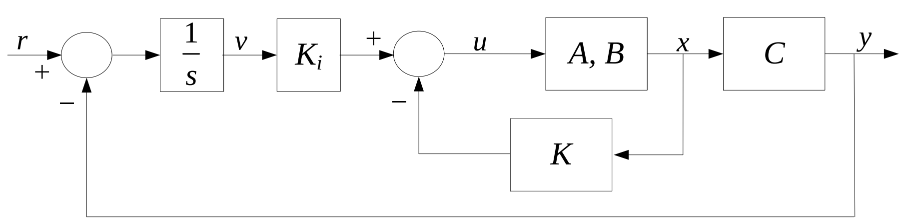

Figura 11.2 – Realimentação de estados com inserção de integrador.

Nessa caso, $u = -K\,x + K_i\,v$. O sistema em malha fechada é representado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + BK_i v \\ y = Cx \end{cases} \tag{11.6}$$

A dinâmica do integrador é dada por:

$$\dot{v} = r - y = r - Cx \tag{11.7}$$

Ao definir o um vetor de estados aumentado $x_a = [x \ \ v]^T$, tem-se a seguinte equação de estados em malha fechada:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{11.8}$$

A equação (11.5) pode ser reescrita como,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{A_a} - \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_a} \underbrace{\begin{bmatrix} K & -K_i \end{bmatrix}}_{K_a} \right) \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{11.9}$$

Assim, o problema de alocação de polos com integrador é resolvido da seguinte forma: **`Ka=place(Aa,Ba,pa)`**. O vetor p_a deve conter um termo a mais que representa o polo do integrador em malha fechada. As n primeiras colunas de K_a representam o ganho de realimentação de estados, enquanto que a última coluna de K_a representa o ganho na saída do integrador com sinal trocado.

11.3 Atividades

1) Encontre uma representação em espaço de estados para o servomecanismo, considerando como variáveis de estado a velocidade no eixo do potenciômetro (ω_p) e a posição angular no eixo do potenciômetro (θ_p). Verifique se o sistema é controlável.

2) Projete um controlador por realimentação de estados com integrador, conforme a figura 11.2, alocando os polos em malha fechada do sistema com a seguinte especificação: $\xi = 0,707$ e $\omega_n = 10$ rad/s. Escolha o polo do integrador em $s = -10$.

3) Aplique a lei de controle obtida no servomecanismo. Assuma como referência para θ_p uma onda quadrada com amplitude de $-\pi/2$ a $\pi/2$, com frequência igual a 0,1 Hz.

4) Compare os resultados experimentais com os simulados, considerando o modelo não linear com atrito.