

Sexta lista

Tarefa de leitura:

1. **Obrigatória:** capítulo 13 das notas de aula do curso.
2. **Obrigatória:** Griffiths capítulo 7.
3. **Sugerida:** Griffiths capítulo 6 ou Liboff capítulo 13.

1. Considere um rotor quântico com hamiltoniana

$$H = -\frac{\hbar^2}{2I} \frac{d^2}{d\varphi^2} + \lambda V(\varphi) ,$$

onde $V(\varphi) = \cos(2\varphi)$.

- (a) Escreva os níveis de energia e autofunções não perturbados do sistema ($\lambda = 0$). Discuta suas degenerescências.
 - (b) Calcule a correção em mais baixa ordem (não nula) da energia do estado fundamental. Qual a correção para a função de onda?
 - (c) Calcule a correção em mais baixa ordem (não nula) da energia do primeiro estado excitado. Forneça os novos estados de ordem zero.
2. Calcule as correções devidas a

$$H_{\text{ef}} = \frac{g}{2} \frac{1}{m^2 c^2} \vec{L} \cdot \vec{S} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} - \frac{1}{2mc^2} \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} \right)^2$$

aos estados $n = 1$ e 2 do problema de Coulomb

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} - V(r) ,$$

onde $V(r) = e^2/r$.

3. Considere átomo de hidrogênio na presença de um campo magnético externo constante $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z$. A hamiltoniana neste caso é dada por

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r} + \frac{e}{2\mu c} (\mathbf{L} + g\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} + \frac{e^2}{2\mu c^2} \mathbf{A}^2,$$

onde escolhemos $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \wedge \mathbf{r}$. Para campos fracos podemos desprezar o último termo da hamiltoniana acima. Calcule a correção de ordem mais baixa dos níveis de energia para campos fracos do primeiro estado excitado. Despreze a interação spin-órbita.

4. Um átomo de hidrogênio encontra-se na presença de uma campo elétrico $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$. Considere o campo elétrico como uma perturbação cujo potencial é $V = -qE_0 r \cos \theta$.
- Utilizando que $[V, L_z] = 0$ mostre que $\langle n\ell m | [V, L_z] | n\ell' m' \rangle$ implica que $\langle n\ell m | V | n\ell' m' \rangle$ é proporcional a $\delta_{m,m'}$. Aqui denotamos os estados do átomo de hidrogênio por $|n\ell m\rangle$.
 - Obtenha a correção de primeira ordem para o primeiro estado excitado.
 - Quais os estados de ordem zero escolhidos pela interação com o campo elétrico?
5. Estime variacionalmente a energia do primeiro estado excitado um átomo de hidrogênio com $\ell = 1$, utilizando a função tentativa $(1 + \alpha r) \exp(-\beta r/2) Y_{lm}$, onde α e β são os parâmetros variacionais. Assuma conhecida a função de onda do estado fundamental. Compare seus resultados com os resultados exatos.
6. Estime variacionalmente a energia do estado fundamental de um oscilador harmônico tridimensional utilizando a função tentativa $\exp(-\alpha r)$.
7. Considere um sistema unidimensional cujo potencial é

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{para } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

estime a energia do estado fundamental usando a função tentativa $x e^{-\alpha x}$ para x positivo e nula para $x \leq 0$, onde α é o parâmetro variacional.

8. Compute variacionalmente a energia do estado fundamental do átomo de hélio. Para tanto utilize um ansatz

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = f(r_1 + r_2)$$

onde $r_{1(2)} = |\mathbf{r}_{1(2)}|$.

- Mostre que

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \frac{\hbar^2}{30m} \int_0^\infty dr \, r^5 \left[\frac{df(r)}{dr} \right]^2 - \frac{9}{32} e^2 \int_0^\infty dr \, r^4 f^2(r) .$$

- Varie f com o vínculo que $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$.
- Resolva para f e avalie $\langle \Psi | H | \Psi \rangle$.