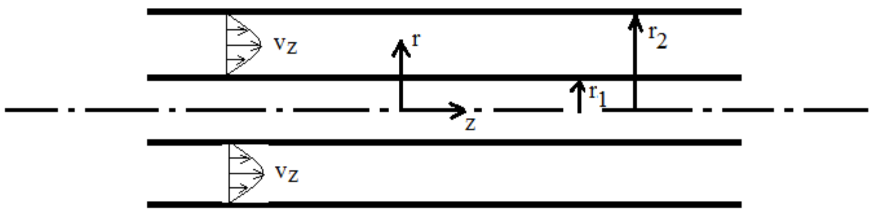
2ª Prova de PNV 2340 - Mecânica dos Meios Contínuos - 16/11/2016

1)Um fluido de massa específica ρ, viscosidade dinâmica μ, viscosidade cinemática ν, condutividade térmica k e calor específico c escoa na direção axial entre duas superfícies cilíndricas concêntricas e imóveis. Na superfície de raio r_1 temos um fluxo de calor por unidade de área $\vec{q} = -k\nabla T = \beta \vec{e}_r$, onde β é constante. Na superfície de raio r_2 temos uma temperatura uniforme Tw. Qual o perfil de temperaturas $T(r)$ no fluido? Qual o fluxo de calor $\vec{q}$ para o raio r_2? Considere o escoamento permanente, desenvolvido, incompressível, laminar, bidimensional axissimétrico e com efeitos gravitacionais desprezíveis.



Dados:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\upsilon_r)}{\partial r} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \upsilon_r}{\partial t} + \upsilon_r \frac{\partial \upsilon_r}{\partial r} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_r}{\partial z} = g_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\upsilon_r)}{\partial r}\right] + \frac{\partial^2 \upsilon_r}{\partial z^2}\right\}$$

$$\frac{\partial \upsilon_z}{\partial t} + \upsilon_r \frac{\partial \upsilon_z}{\partial r} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \upsilon_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial z^2}\right\}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \upsilon_r \frac{\partial T}{\partial r} + \upsilon_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right\} + \frac{\mu}{\rho c}\Phi$$

$$\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial \upsilon_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial \upsilon_r}{\partial z} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial r}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\upsilon_r}{r} + \frac{\partial \upsilon_r}{\partial r} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}\right)^2$$

2)Dado o tensor das tensões:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine seus valores principais e direções principais.

Dica: Dada a equação cúbica característica:

$$\sigma^3 - \lambda_1 \sigma^2 + \lambda_2 \sigma - \lambda_3 = 0$$

Uma de suas raízes, ou seja, um dos valores principais é $\sigma = 1$.

Solução

1)A equação da continuidade, supondo escoamento desenvolvido, fica:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,\upsilon_r)}{\partial r}+\underbrace{\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}}_{0}=0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial(r\,\upsilon_r)}{\partial r}=0$$

Logo:

$$r\,\upsilon_r=f(z) \quad\Rightarrow\quad \upsilon_r=\frac{f(z)}{r}$$

Mas, como $\upsilon_r=0$ para $r=r_1$ e para $r=r_2$, independente da posição *z*, resulta $f(z)=0$. Assim:

$$\boxed{\upsilon_r=0}$$

Da equação de Navier-Stokes na direção *r* para escoamento permanente, incompressível, desenvolvido e gravidade desprezível:

$$\underbrace{\frac{\partial \upsilon_r}{\partial t}}_{0}+\underbrace{\upsilon_r}_{0}\frac{\partial \upsilon_r}{\partial r}+\upsilon_z\underbrace{\frac{\partial \upsilon_r}{\partial z}}_{0}=\underbrace{g_r}_{0}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial(r\,\upsilon_r)}{\partial r}}_{0}\right]+\underbrace{\frac{\partial^2 \upsilon_r}{\partial z^2}}_{0}\right\}$$

Resulta:

$\frac{\partial p}{\partial r}=0$, logo $p=p(z)$ e $\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{dp}{dz}$

Da equação de Navier-Stokes na direção *z*:

$$\underbrace{\frac{\partial \upsilon_z}{\partial t}}_{0}+\underbrace{\upsilon_r}_{0}\frac{\partial \upsilon_z}{\partial r}+\upsilon_z\underbrace{\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}}_{0}=\underbrace{g_z}_{0}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \upsilon_z}{\partial r}\right)+\underbrace{\frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial z^2}}_{0}\right\}$$

Como $\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}=0$ e $\frac{\partial \upsilon_z}{\partial t}=0$, podemos $\upsilon_z=\upsilon_z(r)$ e podemos escrever $\frac{\partial \upsilon_z}{\partial r}=\frac{d\upsilon_z}{dr}$. Assim:

$$\nu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\upsilon_z}{dr}\right)=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dr}\left(r\frac{d\upsilon_z}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}r$$

Integrando a primeira vez:

$$r\frac{d\upsilon_z}{dr}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\frac{r^2}{2}+C_1$$

Isso resulta:

$$\frac{d\upsilon_z}{dr}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\frac{r}{2}+\frac{C_1}{r}$$

Integrando a segunda vez:

$$\boxed{\upsilon_z=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\frac{r^2}{4}+C_1\ln r+C_2}$$

Com condições de contorno $\upsilon_z=0$ para $r=r_1$ e $r=r_2$, logo:

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\frac{r_1^2}{4}+C_1\ln r_1+C_2=0$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\frac{r_2^2}{4}+C_1\ln r_2+C_2=0$$

Subtraindo a primeira expressão da segunda:

$$\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}\left(r_2^2-r_1^2\right)-C_1\left(\ln r_1-\ln r_2\right)=0$$

Resulta:

$$\boxed{C_1=\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}\frac{\left(r_2^2-r_1^2\right)}{\ln\left(r_1/r_2\right)}}$$

e

$$\boxed{C_2=-\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\frac{r_1^2}{4}-C_1\ln r_1}$$

A equação da energia, sempre considerando escoamento permanente, desenvolvido e incompressível, fica:

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{0}+\underbrace{\upsilon_r}_{0}\frac{\partial T}{\partial r}+\upsilon_z\underbrace{\frac{\partial T}{\partial z}}_{0}=\frac{k}{\rho c}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}_{0}\right\}+\frac{\mu}{\rho c}\Phi$$

Como $\frac{\partial T}{\partial z}=0$, temos que $T=T(r)$ e $\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{dT}{dr}$. A dissipação fica:

$$\Phi=2\left[\underbrace{\left(\frac{\partial\upsilon_r}{\partial r}\right)^2}_{0}+\underbrace{\left(\frac{\upsilon_r}{r}\right)^2}_{0}+\underbrace{\left(\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}\right)^2}_{0}\right]+\left(\underbrace{\frac{\partial\upsilon_r}{\partial z}}_{0}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial r}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\underbrace{\frac{\upsilon_r}{r}}_{0}+\underbrace{\frac{\partial\upsilon_r}{\partial r}}_{0}+\underbrace{\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}}_{0}\right)^2$$

Logo, $\Phi = \left(\dfrac{d\upsilon_z}{dr} \right)^2$

Assim:

$$k\left\{ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{d\,r} \right) \right\} + \mu\Phi = 0$$

Logo:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{d\,r} \right) = -\frac{\mu}{k}\left(\frac{d\upsilon_z}{dr} \right)^2 \; r$$

Mas, da solução da equação de Navier-Stokes, temos que:

$$\frac{d\upsilon_z}{dr} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

Logo, substituindo na expressão anterior:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{d\,r} \right) = -\frac{\mu}{k}\left[\left(\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} \right)^2 \frac{r^2}{4} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dz} \right) C_1 + \frac{C_1^2}{r^2} \right] r$$

Que resulta:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{d\,r} \right) = -\frac{\mu}{k}\left[\left(\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} \right)^2 \frac{r^3}{4} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dz} \right) C_1\, r + \frac{C_1^2}{r} \right]$$

Integrando a primeira vez:

$$r\frac{dT}{d\,r} = -\frac{\mu}{k}\left[\left(\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} \right)^2 \frac{r^4}{16} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dz} \right) C_1 \frac{r^2}{2} + C_1^2 \ln r \right] + C_3$$

Isso resulta:

$$\frac{dT}{d\,r} = -\frac{\mu}{k}\left[\left(\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} \right)^2 \frac{r^3}{16} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dz} \right) C_1 \frac{r}{2} + C_1^2 \frac{\ln r}{r} \right] + \frac{C_3}{r}$$

Integrando:

$$\boxed{T = -\frac{\mu}{k}\left[\left(\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} \right)^2 \frac{r^4}{64} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dz} \right) C_1 \frac{r^2}{4} + C_1^2 \frac{(\ln r)^2}{2} \right] + C_3 \ln r + C_4}$$

Temos duas condições de contorno. Para $r = r_2$ temos $T = T_w$. A condição de contorno em $r = r_1$ é dada pelo fluxo de calor em $r = r_1$:

$$\vec{q} = -k\,\nabla T = \beta\,\vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad -k\,\frac{dT}{dr}\vec{e}_r = \beta\,\vec{e}_r$$

Logo, temos que $\dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{\beta}{k}$ em $r = r_1$. Aplicando essa condição de contorno:

$$\beta = \mu\left[\left(\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\right)^2 \frac{r_1^3}{16} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dz}\right)C_1\,\frac{r_1}{2} + C_1^2\,\frac{\ln r_1}{r_1}\right] + \frac{C_3}{r_1}$$

Resulta:

$$\boxed{C_3 = \beta\,r_1 - \mu\left[\left(\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\right)^2 \frac{r_1^4}{16} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dz}\right)C_1\,\frac{r_1^2}{2} + C_1^2\,\ln r_1\right]}$$

Aplicando a condição de contorno $T = T_w$ para $r = r_2$:

$$T_w = -\frac{\mu}{k}\left[\left(\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\right)^2 \frac{r_2^4}{64} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dz}\right)C_1\,\frac{r_2^2}{4} + C_1^2\,\frac{(\ln r_2)^2}{2}\right] + C_3\,\ln r_2 + C_4$$

Resulta:

$$\boxed{C_4 = T_w + \frac{\mu}{k}\left[\left(\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\right)^2 \frac{r_2^4}{64} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dz}\right)C_1\,\frac{r_2^2}{4} + C_1^2\,\frac{(\ln r_2)^2}{2}\right] + C_3\,\ln r_2}$$

Finalmente, o fluxo de calor em $r = r_2$ é dado por:

$$\vec{q}(r = r_2) = -k\,\nabla T(r = r_2) = -k\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=r_2}\vec{e}_r$$

Isso resulta:

$$\boxed{\vec{q}(r = r_2) = \left\{\mu\left[\left(\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\right)^2 \frac{r_2^3}{16} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dz}\right)C_1\,\frac{r_2}{2} + C_1^2\,\frac{\ln r_2}{r_2}\right] + \frac{C_3}{r_2}\right\}\vec{e}_r}$$

2)Dado o tensor das tensões:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Os invariantes da equação característica são:

$$\lambda_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 6$$

$$\lambda_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$\lambda_3 = \det(\sigma_{ij}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

A equação característica fica:

$$\sigma^3 - 6\sigma^2 + 11\sigma - 6 = 0$$

As raízes são:

$$\boxed{\sigma_I = 3 \quad \sigma_{II} = 2 \quad \sigma_{III} = 1}$$

As direções principais são obtidas de :

$$(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})n_j = 0$$

Isso resulta:

$$\sigma_{ij}\, n_j - \sigma\delta_{ij} n_j = 0$$

Ou seja:

$$\sigma_{i1}\, n_1 - \sigma\delta_{i1}\, n_1 + \sigma_{i2}\, n_2 - \sigma\delta_{i2}\, n_2 + \sigma_{i3}\, n_3 - \sigma\delta_{i3}\, n_3 = 0$$

Fazendo i=1,2,3, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} (\sigma_{11} - \sigma)n_1 + \sigma_{12}\, n_2 + \sigma_{13}\, n_3 = 0 \\ \sigma_{21}\, n_1 + (\sigma_{22} - \sigma)n_2 + \sigma_{23}\, n_3 = 0 \\ \sigma_{31}\, n_1 + \sigma_{32}\, n_2 + (\sigma_{33} - \sigma)n_3 = 0 \end{cases}$$

Para $\sigma = \sigma_I = 3$:

$$\begin{cases} -n_1 + n_2 = 0 \\ n_1 - n_2 = 0 \\ -n_3 = 0 \end{cases}$$

Temos $n_3 = 0$ e $n_1 = n_2$. Da condição $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ resulta $n_1 = n_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim:

$$\vec{n}_I = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_2\right)$$

Para $\sigma = \sigma_{II} = 2$:

$$\begin{cases} n_2 = 0 \\ n_1 = 0 \\ 0.n_3 = 0 \end{cases}$$

Da condição $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ resulta:

$$\vec{n}_{II} = \pm\vec{e}_3$$

A terceira direção principal pode ser obtida tanto do sistema quanto levando em conta que as direções principais devem formar um sistema de referência ortogonal. Assim:

$$\vec{n}_{III} = \vec{n}_I \times \vec{n}_{II}$$

Podemos adotar qualquer combinação das direções possíveis para $\vec{n}_I$ e $\vec{n}_{II}$. Adotando:

$$\boxed{\vec{n}_I = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_2}$$

$$\boxed{\vec{n}_{II} = \vec{e}_3}$$

Obtemos:

$$\boxed{\vec{n}_{III} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_2}$$