Matemática para Economia
Les 201

Aulas 28_29

Integrais

Márcia Azanha Ferraz Dias de Moraes

21_22/11/2016

Integrais

As operações inversas na matemática:

- adição e subtração
- multiplicação e divisão
- potenciação e radiciação

→ A operação inversa da ***diferenciação*** é a ***integração***

→ A ***integração*** reverte o processo da ***diferenciação***

→ Integral definida: calcular áreas abaixo da função e o eixo x

Ex: cálculo dos *excedentes consumidor* e do *produtor*

Integrais

- O símbolo para indicar a operação da integração de uma função é $\int$
- Partindo-se de uma função primitiva F(x):

$$F(x) \xrightarrow{\text{Deriva}} f'(x) \text{ ou } f(x)$$

$$f'(x) = f(x) \xrightarrow{\text{Integra}} F(x)$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad \rightarrow \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Integrais

- Uma família inteira de funções primitivas pode gerar a mesma derivada
- É necessário alguma informação adicional sobre a constante C, para se chegar à função original específica.

Exemplo: as seguintes funções primitivas têm a mesma derivada:

$y = 3x^2 + 20 \quad \rightarrow \quad y' = 6x$

$y = 3x^2 + 30 \quad \rightarrow \quad y' = 6x$

$y = 3x^2 \quad \rightarrow \quad y' = 6x$

Regras Básicas da Integração

1. Regra de Potência

a) Quando $n \neq -1$

$$\int x^n dx = \left(\frac{1}{n+1}\right) x^{n+1} + C$$

Pois a derivada de

$$\left(\frac{1}{n+1}\right) x^{n+1} + C$$

é: $$= (n+1)\left(\frac{1}{n+1}\right)x^{(n+1)-1} = x^n$$

Regras Básicas da Integração

1. Regra de Potência

a) Quando $n \neq -1$ (Exemplos)

$\int x^3 dx =$

$\int 1\, dx =$

$\int \sqrt{x^3}\, dx =$

$\int \frac{1}{x^8}\, dx =$

Regras Básicas da Integração

1. Regra de Potência

b) Quando n = -1

$$\int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C$$

Pois:
a derivada de ln x + C = 1/x

• Válido para x > 0 (a função logarítmica não é definida para números negativos)

De forma geral, pode-se escrever

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + C$$

Regras Básicas da Integração

2. Regra da exponencial

2.1) $$\int e^x\, dx = e^x + C$$

Pois a derivada de e^x é o próprio e^x

2.2) $$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C$$

2.3) $$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

Regras de Operação

1. A integral da soma é a soma das integrais

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

Exemplos:

a) $\int (x^4 + x^3 + 10)\, dx =$

b) $\int (e^x + \frac{1}{x})\, dx =$

Regras de Operação

2. Integral de um múltiplo

A integral de uma constante k vezes um integrando é k vezes a integral

$$\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

Ex:

a) $\int -3x^2 dx =$

Regras de Operação

2. Integral de um múltiplo

b) $\int (12e^x - x^{-3} + \frac{10}{x})\, dx =$

c) $\int \frac{x^3 + 8}{x} dx =$

Regras de Operação

3. Multiplicação

(Integral da Multiplicação ≠ Multiplicação Integral

- Não existe regra geral que dê a integral de um produto (ou quociente) de duas funções em termos de integrais separadas destas funções

→ ∴ a integração é mais difícil que a diferenciação

→ Integrandos complicados: procurar respostas em tabelas de fórmulas de integrais

Existem algumas regras que permitem transformar as funções:

$$\begin{cases} \text{regra substituição (regra da cadeia)} \\ \text{integração por partes} \end{cases}$$

- Estas regras são úteis quando é possível expressar o integrando (função de x) como produto de $f(u)$ (função de u) e du/dx

Regras de Operação

3. Multiplicação

3.1 – Regra da Substituição

- Simplificação da integral através da substituição da variável original
- Contrapartida da Regra da Cadeia

$$\int [f(u)\frac{du}{dx}]\,dx = \int f(u)d(u) = F(u) + C$$

- Substituir: *f(x)* por *u(x)*
  dx por *du*
  simplificar a expressão de modo a ter $\int udu$

Dica: olhar a expressão e ver se ao substituir *dx* por *du* "corta" termo da função original

3.1 – Regra da Substituição - Exemplos

Ex (1): $\int 2x\,(x^2+1)\,dx$

2 modos de resolver:

a) Multiplicando o integrando (neste caso é possível)

$$\int 2x\,(x^2+1)\,dx = \int (2x^3+2x)dx = \quad 2\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^4}{2} + x^2 + C$$

b) Por substituição: Chamando

3.1 – Regra da Substituição - Exemplos

Ex (2): $\int 6x^2\,(x^3+2)^9\,dx$

Dica: tentar ver se ao chamar um membro de *u*, consegue cortar *du/dx* com o outro

OBS: neste caso não dá para multiplicar os 2 membros da equação

Fazendo:

3.1 – Regra da Substituição - Exemplos

Ex (3): $\int 8\,e^{2x+3}\,dx$ Sabe-se que $\int e^x\,dx = e^x$

Regras de Operação

3.2 – Integração por partes

A integral de *v* com respeito a *u* é igual a *uv* menos a integral de *u* com respeito a *v*

$$\int vdu = uv - \int udv$$

Essência da regra: substituir $\int du$ por $\int dv$

Regras de Operação

3.2 – Integração por partes

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$u'v = (uv)' - uv'$$

$$\int u'v = \int (uv)' - \int uv'$$

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

$$\int vdu = uv - \int udv$$

3.2 – Integração por partes - Exemplos

Ex (1): $\int x(x+1)^{1/2}\,dx$

-Não dá para resolver por substituição. Transformar:

3.2 – Integração por partes - Exemplos

Ex (2): $\int \ln x\,dx$

OBS: NÃO DÁ PARA USAR A REGRA DO LN $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

3.2 – Integração por partes - Exemplos

Ex (3): $\int x\,e^x\,dx$

Integrais Indefinidas e Definidas

Integral Indefinida:

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ é *Integral Indefinida* porque não possui um valor numérico definido

→ Como F(x) + C é função de x, seu valor se altera com a variação de x (mesmo quando se conhece o valor de C).

Integrais Indefinidas e Definidas

Integral Definida

- Se selecionamos dois valores de x no domínio da função, a e b, (b > a) e os substituímos na função formando a diferença F(b) – F(a), obtem-se um valor numérico, independente da constante C, pois:

$$[F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

- O valor assim obtido é a *Integral Definida* de *f(x)* no intervalo de a até b
- *a* é chamado limite inferior de integração e *b* o limite superior de integração.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Se uma função *f(x) é contínua em um intervalo, então ela possui integrais neste intervalo; além disso, se* F(x) é uma integral de *f(x),* então para dois pontos quaisquer *a* e *b* no intervalo temos:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_1^5 4x^3\,dx = \frac{4}{4}x^4\Big|_1^5 = 5^4 - 1^4 = 625 - 1 = 624$$

Ex (1) $\int_0^2 \left(\frac{1}{2+x} + 2x\right) dx =$

Ex (2) $\int_a^b ke^x dx$

Teorema Fundamental do Cálculo

Observação importante

- Os limites da integração referem-se aos valores de x
- Se usar técnica da substituição das variáveis e introduzir a variável *u*, *a* e *b* não podem ser usados como limites de *u*

Ex: $\int_1^2 (2x^3 - 1)^2 6x^2 dx$

A interpretação geométrica da Integral Definida

O valor da *Integral Definida* é interpretado geometricamente como uma área sob uma dada curva

- Limite da Soma de Riemann

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty} \sum f(xi)\Delta xi = \text{Área A}$$

A interpretação geométrica da Integral Definida

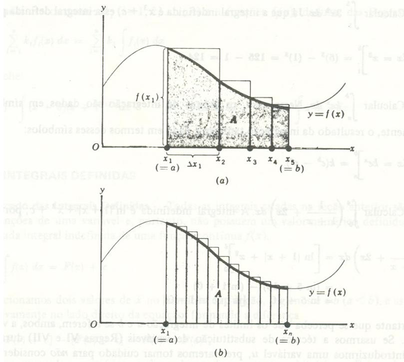
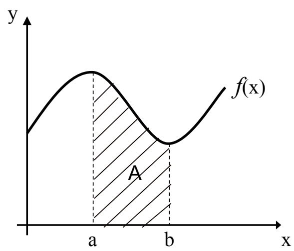


Figura 13.1

A interpretação geométrica da Integral Definida

Dada a função *f(x)*, contínua e não negativa no intervalo [a,b] , a integral é a área da região sob o gráfico de *f(x),* o eixo x e as verticais que passam por *a* e *b*.



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

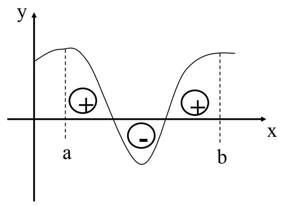
A interpretação geométrica da Integral Definida

- Se *f(x)* assume valores negativos, então a área da região abaixo do eixo x e acima da função, delimitada no intervalo [a,b] corresponde a

$$-\int_a^b f(x)dx$$

- Se f(x) assume valores positivos e negativos, então a área total corresponde à soma das integrais dos intervalos positivos com as integrais dos intervalos negativos (que neste caso têm sinal negativo).

A interpretação geométrica da Integral Definida



$$\int_a^b f(x)dx = R_1 - R_2 + R_3$$

A interpretação geométrica da Integral Definida

Ex: Dada a função $y = x^2 - 4x + 3$ calcule a área sob a curva no intervalo [0,4].

Para o cálculo da área total dividem-se os intervalos para os quais a função é positiva e negativa. A partir do gráfico da função, nota-se que no intervalo [0,4], a função assume valores positivos nos intervalos [0,1] e [3,4], e valores negativos no intervalo [1,3].

A = A1 – A2 + A3 , onde:

$$A_1 = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\Big]_0^1 = \frac{1}{3} - 2 + 3 = 1{,}333$$

$$A_2 = -\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\Big]_1^3 = -[\frac{3^3}{3} - 2(3^2) + 3(3) - [\frac{1}{3} - 2 + 3]] = 1{,}333$$

$$A_3 = \int_3^4 (x^2 - 4x + 3)dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\Big]_3^4 = -[\frac{4^3}{3} - 2(4^2) + 3(4) - [\frac{3^3}{3} - 2(3^2) + 3(3)]] = 1{,}333$$

A área total é a soma das três áreas = 1,333 + 1,333 + 1,333 = 4

A interpretação geométrica da Integral Definida

Ex: Calcule a área sob a curva $y = x^2$ no intervalo (0,1)

A interpretação geométrica da Integral Definida

Ex: Calcule a área da região R sob o gráfico de :

f (x) = $e^{(½)x}$ entre $x = -1$ a $x = 1$

Propriedades da Integral Definida

(I) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(II) $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$

(III) $\int_a^d f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$

a < b < c < d

(IV) $\int_a^b - f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

(V) $\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

(VI) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(VII) $\int_a^b v\,du = uv\Big]_a^b - \int_a^b u\,dv$

Exemplos econômicos

1 – Função Marginal a FunçãoTotal

A partir de uma função marginal conhecida (custo marginal, receita marginal, lucro marginal, etc), calcular a função primitiva (custo total, receita total, lucro total).

Ex: Calcule o Custo Total de uma firma cujo Custo Marginal é dada pela expressão: CMg = C´(Q) = $Q^2 - 3Q$. Sabe-se também que o custo fixo da firma é de 90 unidades monetárias

Exemplos econômicos

Ex: O Custo Marginal de uma firma é $CMg = C'(Q) = 2e^{0,2Q}$. Sabe-se também que o custo fixo da firma é de 90 unidades monetárias. Qual o custo total?

Exemplos econômicos

b) Achar Excedente do Produtor e do Consumidor

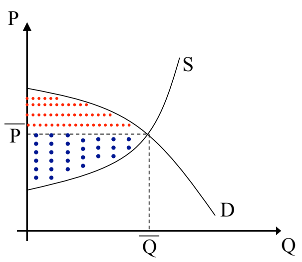
- Excedente do consumidor:

é representado pela área entre a função demanda e a linha paralela ao eixo das abscissas que passa pelo preço de mercado

- Excedente do produtor:

é a área acima da curva de oferta e delimitada pela linha paralela ao eixo das abscissas que passa pelo preço de mercado

Excedentes do Produtor e do Consumidor



Ex 2 – Excedente do Produtor e do Consumidor

Suponha que as funções demanda e oferta de certo produto sejam dadas por : $D(x) = P = -0,001x^2 + 250$

$S(x) = P = 0,0006x^2 + 0,02x + 100$

- Determine o excedente do produtor e do consumidor

a) Achar equilíbrio de mercado

Excedentes do Produtor e do Consumidor

Continuação do exercício

Excedente do Consumidor

Excedente do Produtor