

Planejamento de Rotas

SSC5955

Slides adaptados de Masahiro Ono - MIT

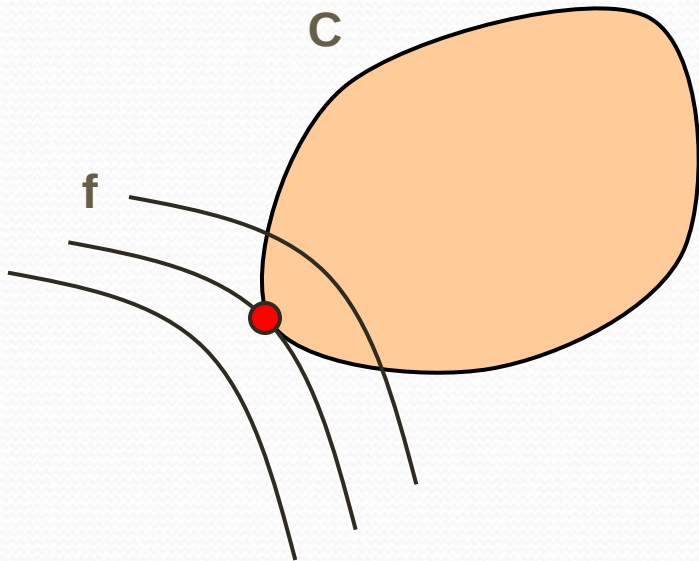
Otimização com restrições

$$\min f(x)$$

$$s.t. \quad x \in C$$

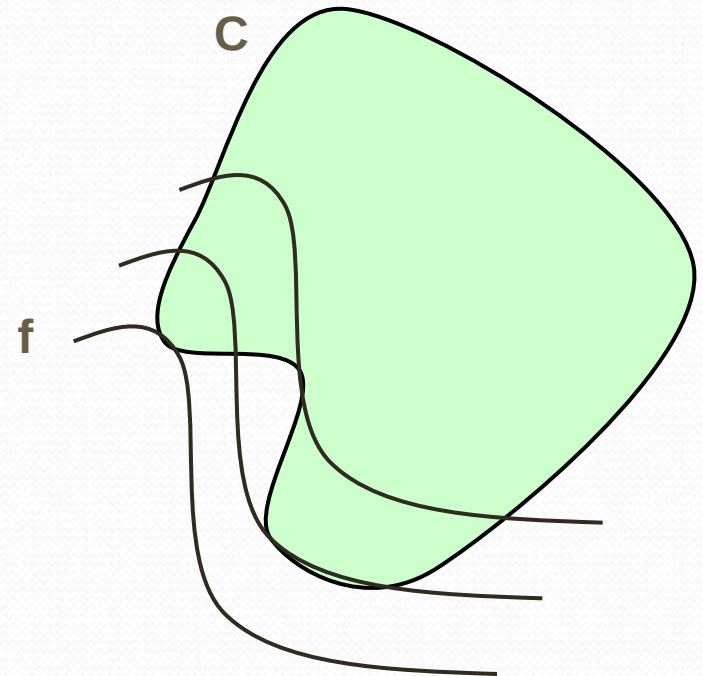
- Otimização convexa

- f é uma função convexa
- C é um conjunto convexo



Fácil de solucionar $\Rightarrow$ LP

- Otimização não-convexa



Difícil de solucionar $\Rightarrow$ MILP

Planejamento de Rotas com Incertezas



Planejamento de Rotas com Incertezas

Riscos possíveis

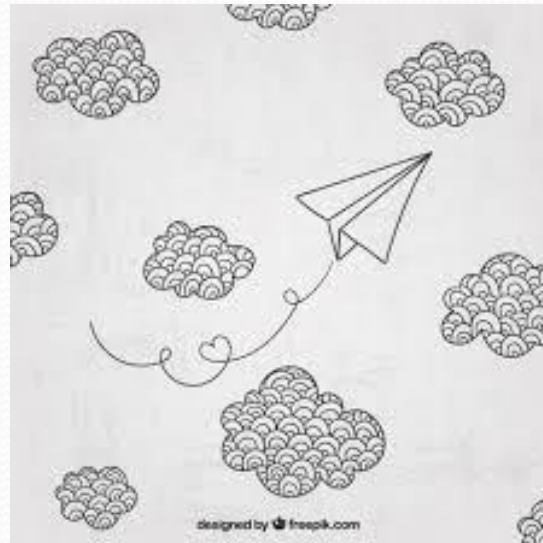
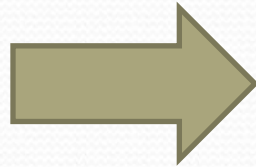


Riscos inaceitáveis



Planejamento de Rotas com Incertezas

Incertezas externas



Robust Model Predictive Control^[1]

- Receding horizon planner reagem a incertezas **depois** que alguma coisa errada ocorre.
- Podemos tomar precauções antes de alguma coisa errada ocorrer?

Incertezas nos modelos

- Modelo determinístico e discreto:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$

- Modelo multiplicativo de incerteza

$$x_{t+1} = (A + \Delta A)x_t + Bu_t$$

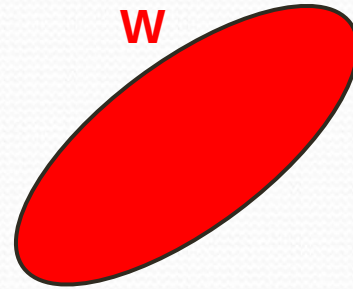
- Modelo aditivo de incerteza

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + w_t$$

Incertezas nos modelos

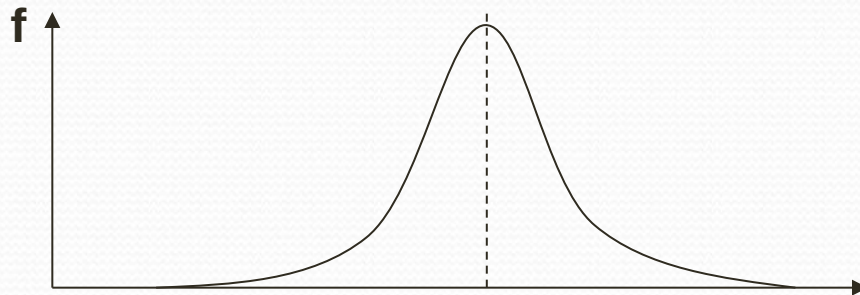
- Incerteza limitada

$$w_t \in W$$



- Incerteza estocástica

$$w_t \sim f(w)$$



f: função de distribuição de probabilidade

Incerteza Estocástica

- Otimizando penalizando probabilidade de falha

$$\min_{\mathbf{U}} J(\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{U}) + pf(\mathbf{U})$$

Probabilidade
de falha

- Otimizando com restrições de probabilidade (chance-constraints).

$$\min_{\mathbf{U}} J(\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{U})$$

$$s.t. \quad f(\mathbf{U}) \leq \Delta$$

Probabilidade de
falha

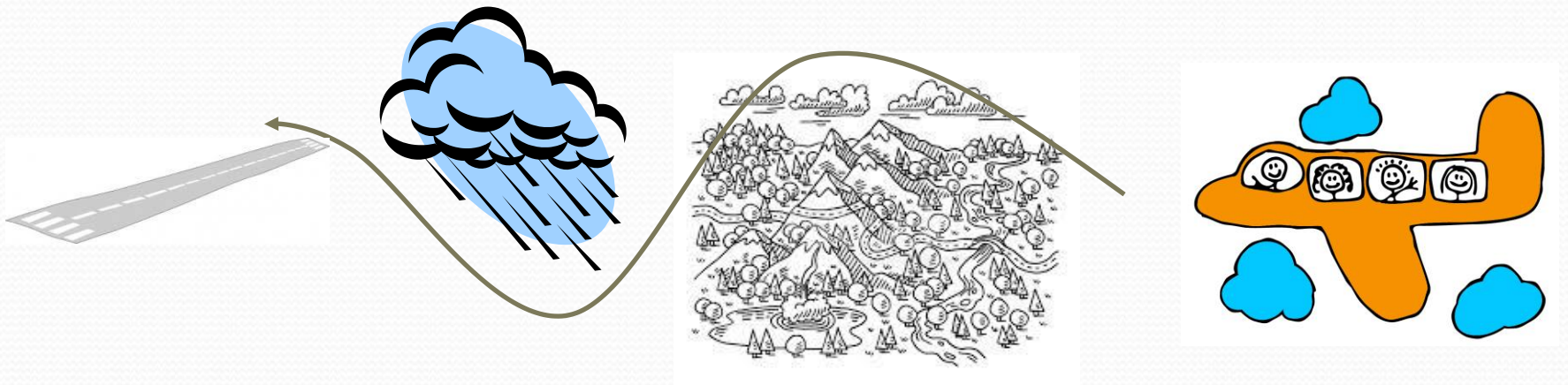
Limite
de risco

Problema

Definição: Dado um sistema com uma dinâmica discreta no tempo e estocástica, encontrar uma sequência de controles que minimize uma função de custo enquanto limita a probabilidade de violar restrições, dentro de um horizonte de planejamento finito, dentro de um dado limite superior (chance constraint)[2].

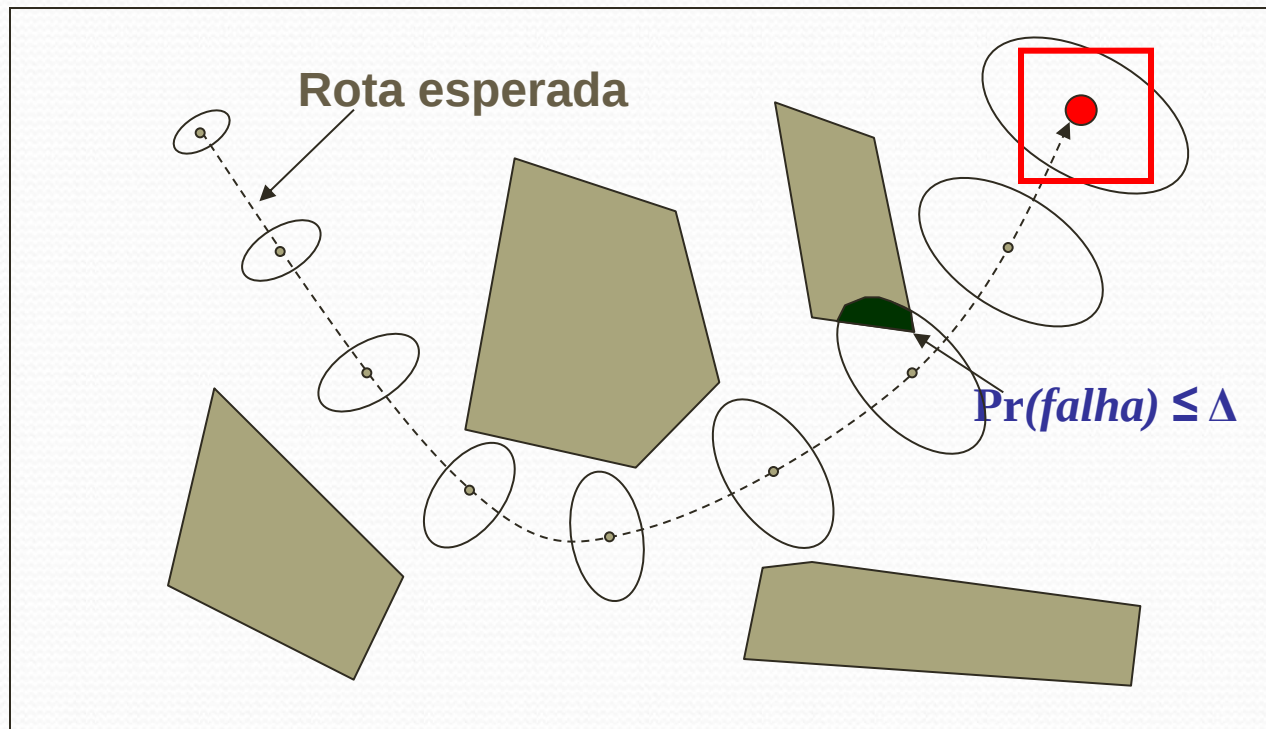
Problema

- Exemplo: Planejar uma trajetória que minimize consumo de combustível enquanto limita a 0.1% a probabilidade de atingir um obstáculo ou adentrar uma região de risco.



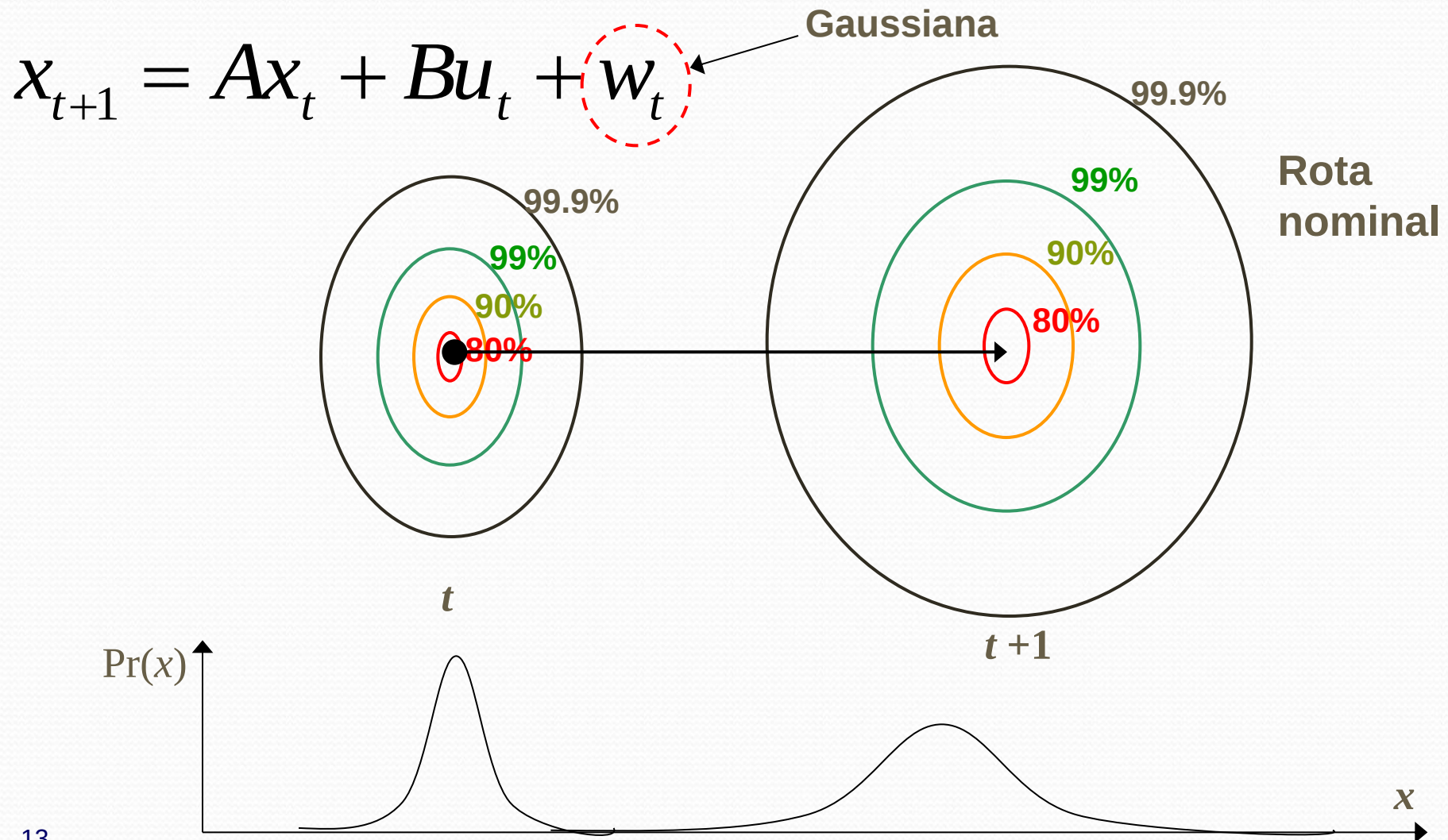
Planejamento de Rota Robusto

- Definir uma rota ótima até o destino tal que $\Pr(\text{falha}) \leq \Delta.$
- Uso das chance constraints.



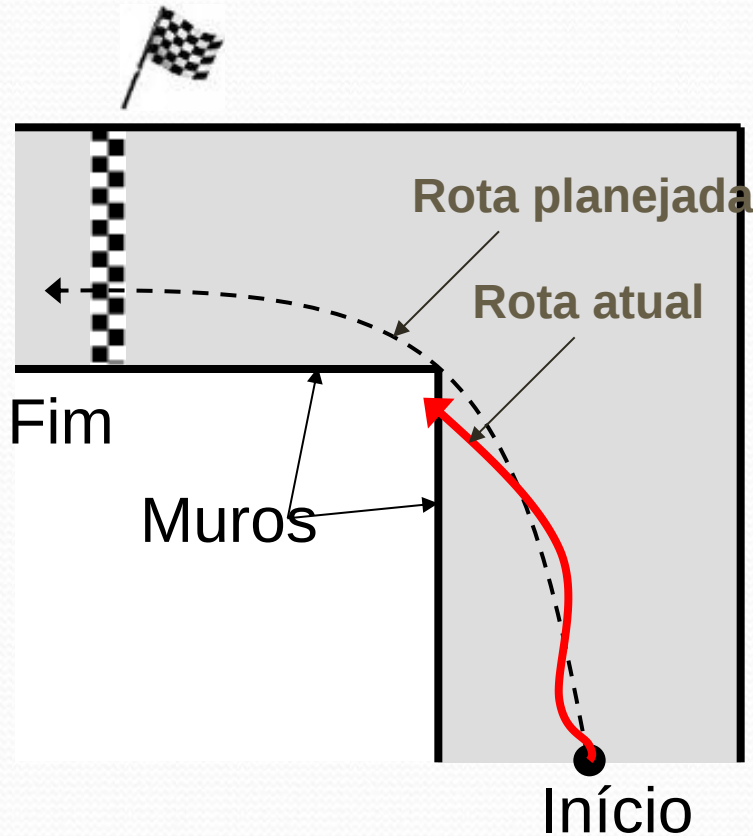
Modelo Estocástico

- Stochastic Plant Model - SPM



Exemplo

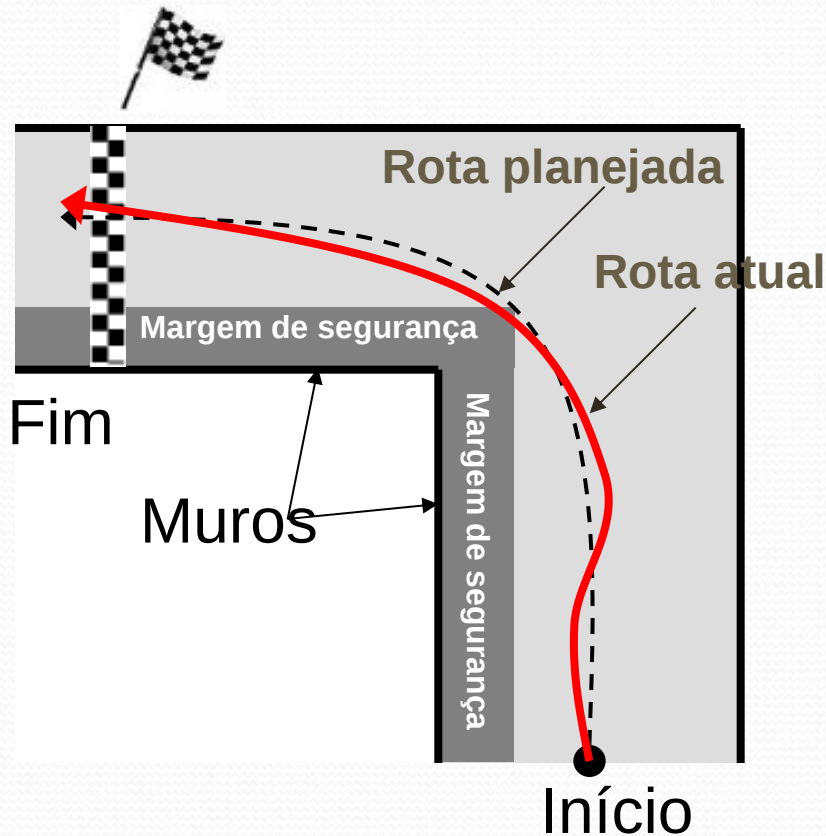
- Planejamento rota em uma corrida de carro



- Impossível garantir 100% de segurança
- Corredores querem reduzir chance de acidentes
 $P(\text{acidente}) < 0.1\%$
– **Chance constraint**

Exemplo

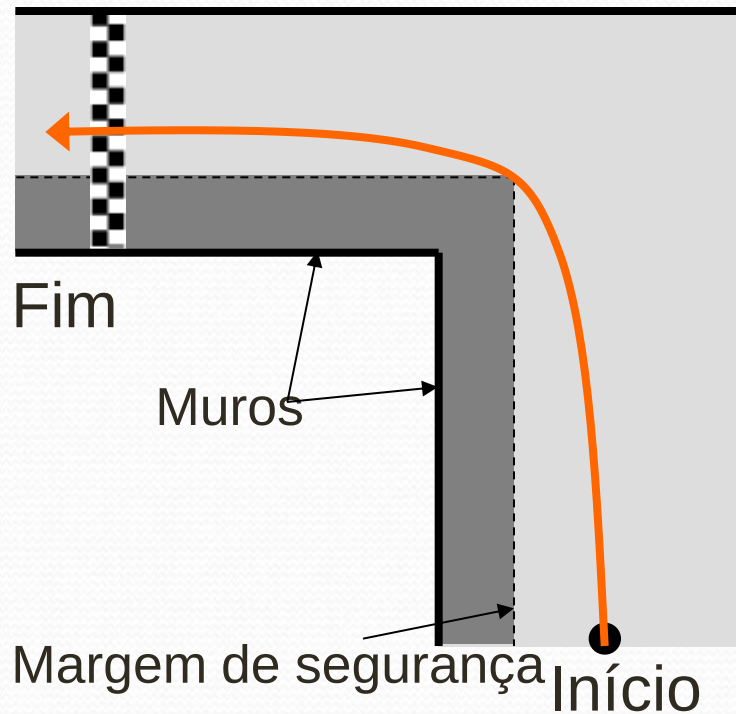
- Planejamento rota em uma corrida de carro



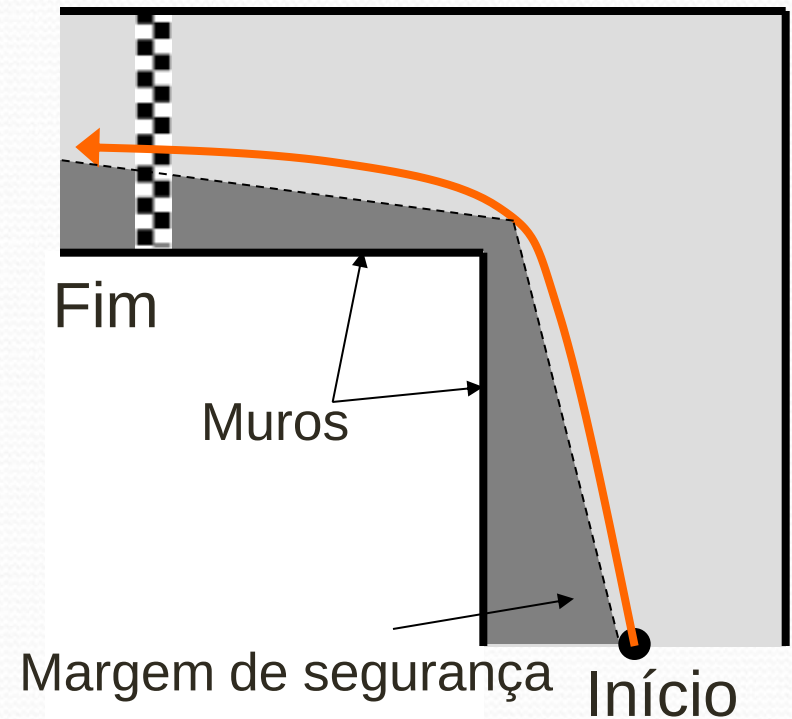
- Impossível garantir 100% de segurança
- Corredores querem reduzir chance de acidentes
 $P(\text{acidente}) < 0.1\%$
– **Chance constraint**
- Solução: Ajustar uma margem de segurança que garanta o limite de risco

Ajustando a margem de segurança

(a) Uniforme



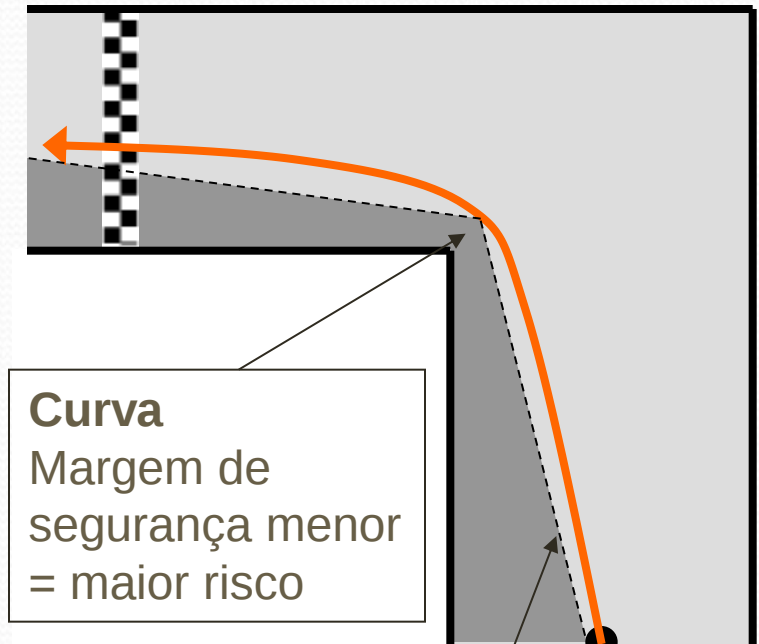
(b) Não uniforme



Alocação de Risco

- Estratégia: Incorrer em um risco maior na curva para obter ganho de tempo ao invés de assumir o mesmo risco durante toda a rota.
- **Alocação de risco**
 - Incorre em risco quando isso leva a uma recompensa relevante, enquanto economiza o risco quando a recompensa for menor.

Margem de segurança não uniforme



Curva
Margem de
segurança menor
= maior risco

Linha reta
Margem de
segurança ampla
= menor risco

Chance-Constraints e Model Control Predictive (MPC)

$$\min_{\mathbf{U}} J(\mathbf{X}, \mathbf{U})$$

s.t.

Função Objetivo: custo, por exemplo, consumo de combustível

$$\forall_{0 \leq t \leq T-1} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t$$

Equações de dinâmica discreta

$$\bigwedge_{t=0}^T \bigwedge_{i=0}^N h_t^{iT} \mathbf{x}_t \leq g_t^i$$

Restrições

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_0 \cdots \mathbf{x}_T]^T$$

Vetor de estados, por exemplo, posição do veículo

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_0 \cdots \mathbf{u}_{T-1}]^T$$

Controles aplicados

Chance-Constraints e Model Control Predictive (MPC)

$$\min_{\mathbf{U}} J(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \quad \text{Função Objetivo: custo, por exemplo, consumo de combustível}$$

$s.t.$

$$\forall_{0 \leq t \leq T-1} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t \quad \text{Equações de dinâmica discreta}$$

$$\mathbf{w}_t \sim N(0, \Sigma_t)$$

$$\mathbf{x}_0 \sim N(\bar{\mathbf{x}}_0, \Sigma_{\mathbf{x},0})$$

$$\bigwedge_{t=0}^T \bigwedge_{i=0}^N h_t^{iT} \mathbf{x}_t \leq g_t^i \quad \text{Restrições}$$

Chance-Constraints e Model Control Predictive (MPC)

$$\min_{\mathbf{U}} J(\mathbf{X}, \mathbf{U})$$

s.t.

Função Objetivo: custo, por exemplo, consumo de combustível

$$\forall_{0 \leq t \leq T-1} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t$$

Equações de dinâmica discreta

$$\mathbf{w}_t \sim N(0, \Sigma_t)$$

$$\mathbf{x}_0 \sim N(\bar{\mathbf{x}}_0, \Sigma_{\mathbf{x},0})$$

$$\bigwedge_{t=0}^T \bigwedge_{i=0}^N h_t^{iT} \mathbf{x}_t \leq g_t^i$$

Restrições

Chance-Constraints e Model Control Predictive (MPC)

$$\min_{\mathbf{U}} J(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \quad \text{s.t.}$$

Função Objetivo: custo, por exemplo, consumo de combustível

$$\forall_{0 \leq t \leq T-1} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t$$

Equações de dinâmica discreta

$$\mathbf{w}_t \sim N(0, \Sigma_t)$$

$$\mathbf{x}_0 \sim N(\bar{\mathbf{x}}_0, \Sigma_{\mathbf{x},0})$$

Limite superior na
probabilidade de falha
= *Limite de risco*

$$\Pr \left[\bigwedge_{t=0}^T \bigwedge_{i=0}^N h_t^{iT} \mathbf{x}_t \leq g_t^i \right] \geq 1 - \Delta$$

Chance constraints

Modelando Chance Constraints

$$\Pr \left[\bigwedge_{t=0}^T \bigwedge_{i=0}^N h_t^{iT} x_t \leq g_t^i \right] \geq 1 - \Delta$$

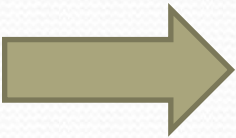
Desigualdade Booleana

$$\Pr[A \cup B] \leq \Pr[A] + \Pr[B]$$

Modelando Chance Constraints

$$\Pr \left[\bigwedge_{t=0}^T \bigwedge_{i=0}^N h_t^{iT} x_t \leq g_t^i \right] \geq 1 - \Delta$$

Limite superior na probabilidade de violar qualquer restrição dentro do horizonte de planejamento


$$\bigwedge_t \bigwedge_i \left(\Pr[h_t^{iT} x_t \leq g_t^i] \geq 1 - \delta_t^i \right)$$
$$\sum_{t,i} \delta_t^i \leq \Delta$$

Limite superior na probabilidade de violar a i -ésima restrição no tempo t

Risk allocation: $\delta = [\delta_1^1, \delta_1^2, \dots, \delta_T^N]$

Modelando Chance Constraints

Risk allocation
optimization
s.t.

$$\min_{\delta} \min_U J(\mathbf{X}, \mathbf{U})$$

$$\forall_{0 \leq t \leq T-1} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t$$

Equações de dinâmica discreta

$$\mathbf{w}_t \sim N(0, \Sigma_t)$$

$$\mathbf{x}_0 \sim N(\bar{\mathbf{x}}_0, \Sigma_{\mathbf{x},0})$$

$$\bigwedge_t \bigwedge_i \Pr[\mathbf{h}_t^{iT} \mathbf{x}_t \leq g_t^i] \geq 1 - \delta_t^i$$

$$\sum_{t,i} \delta_t^i \leq \Delta$$

Chance constraints

Modelando Chance Constraints

Variável aleatória

$$\Pr[h_t^{iT} \bar{x}_t \leq g_t^i] \geq 1 - \delta_t^i \quad \text{Restrição de probabilidade (chance constraint)}$$

Variável determinística

$$\Leftrightarrow h_t^{iT} \bar{x}_t \leq g_t^i - m_t^i(\delta_t^i) \quad \text{Restrição determinística}$$

“Aperto” na restrição - Constraint tightening

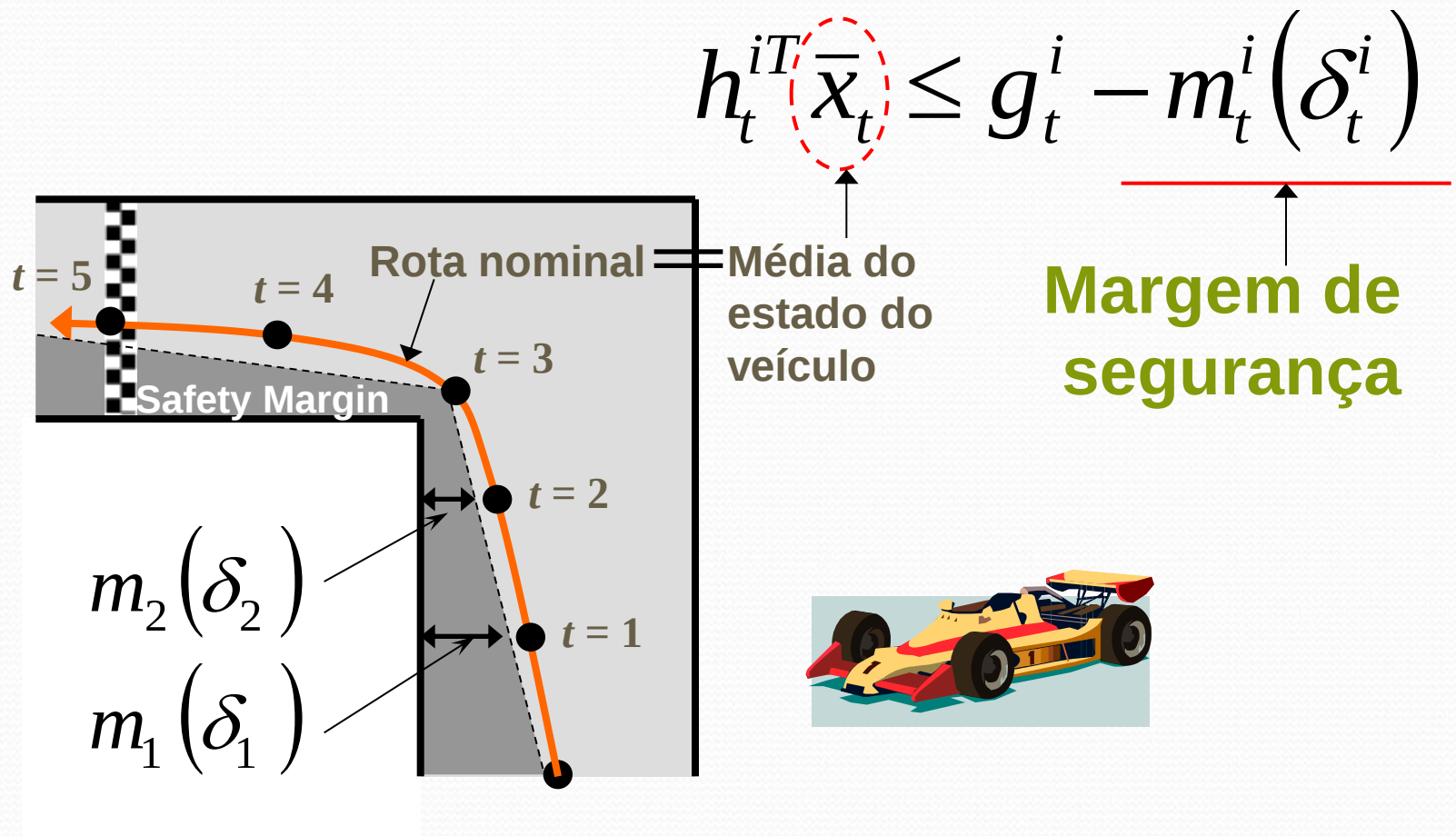
onde,

$$m_t^i(\delta_t^i) = -\sqrt{2h_t^{iT} \Sigma_{x,t} h_t^i} \operatorname{erf}^{-1}(2\delta_t^i - 1) \quad \text{Inversa da função de distribuição acumulada}$$

$$x_t \sim N(\bar{x}_t, \Sigma_{x,t})$$

$$\Sigma_{x,t} = \sum_{n=0}^{t-1} A^n \Sigma_w (A^n)^T + \Sigma_{x,0}$$

Modelando Chance Constraints



Modelando Chance Constraints

$$\min_{\delta} \min_{\mathbf{U}} J(\mathbf{X}, \mathbf{U})$$

s.t.

~~$$\forall_{0 \leq t \leq T-1} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t$$~~

$$\forall_{0 \leq t \leq T-1} \bar{\mathbf{x}}_{t+1} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t$$

$$\mathbf{w}_t \sim N(0, \Sigma_t)$$

$$\mathbf{x}_0 \sim N(\bar{\mathbf{x}}_0, \Sigma_{\mathbf{x},0})$$

$$\mathbf{h}_t^{iT} \bar{\mathbf{x}}_t \leq g_t^i - m_t^i(\delta_t^i)$$

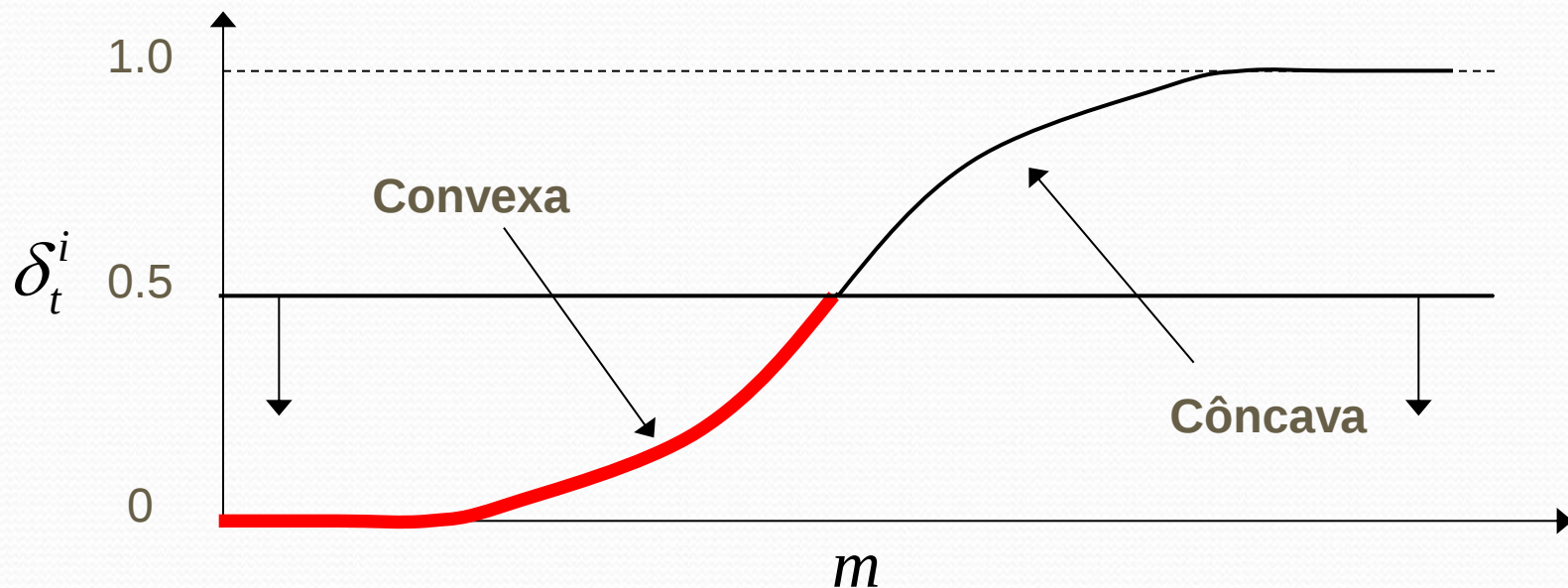
Convexa?

$$\sum_{t,k} \delta_t^i \leq \Delta$$

Convexidade das Chance Constraints

$$\Delta \leq 0.5 \Rightarrow \forall t, i \quad \delta_t^i \leq 0.5$$

$m^i(\delta_t^i)$ (função de distribuição acumulada da distribuição Gaussiana)

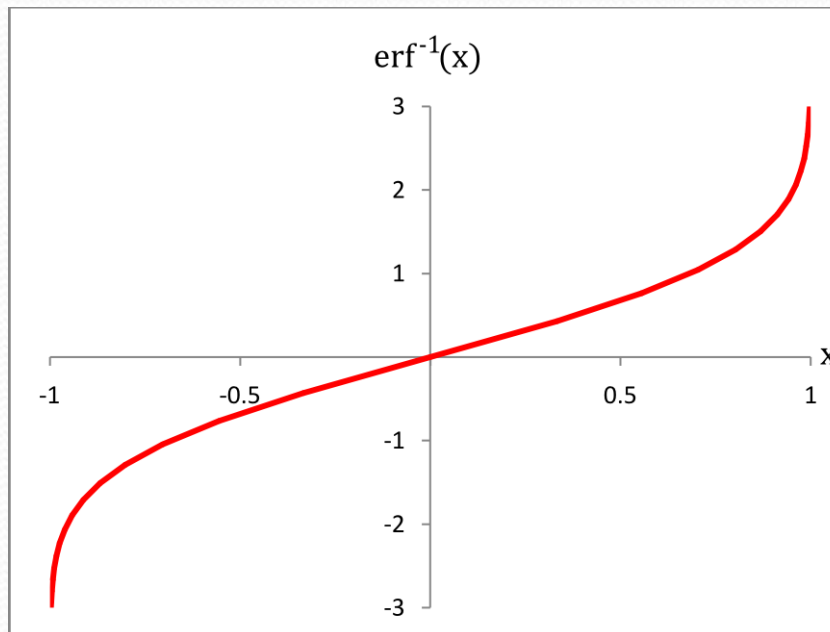


Usuários usualmente não querem incorrer em riscos que levem a uma probabilidade de falha maior que 50%.

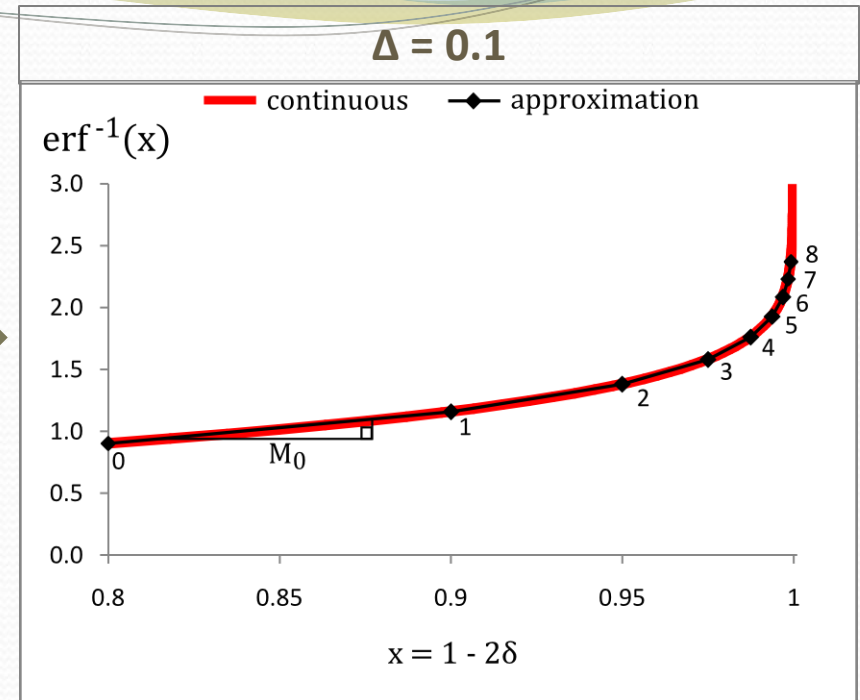
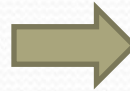
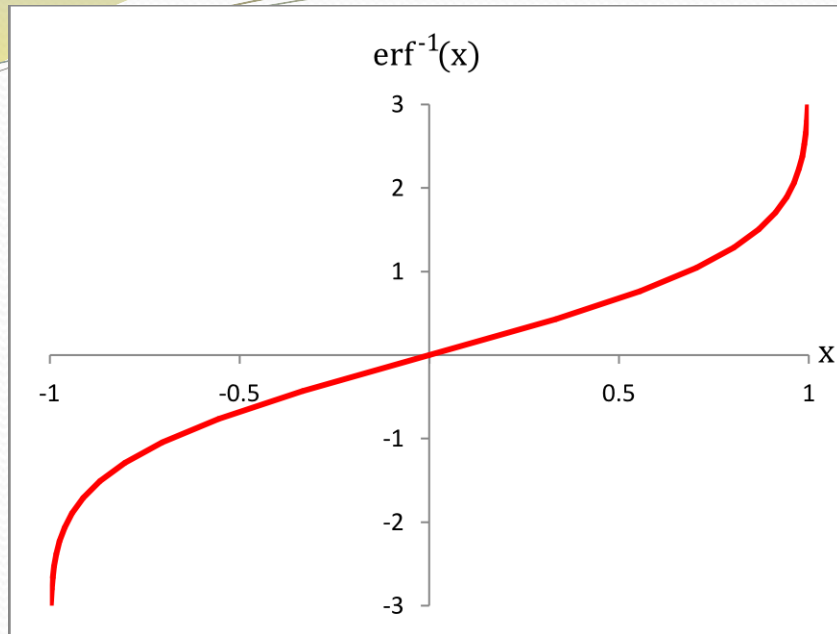
Convexidade das Chance Constraints

$$m_t^i(\delta_t^i) = -\sqrt{2h_t^{iT}\Sigma_{x,t}h_t^i} \operatorname{erf}^{-1}(2\delta_t^i - 1)$$

Inversa da função de distribuição acumulada



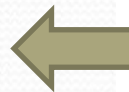
Aproximando a função inversa do erro



$$\bar{x}_n = 1 - 2 \left(\frac{\Delta}{2^n} \right) \quad n = 0, \dots, N$$

$$\bar{y}_n = \operatorname{erf}^{-1}(\bar{x}_n) \quad n = 0, \dots, N$$

$$M_n = \frac{\bar{y}_{n+1} - \bar{y}_n}{\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n} \quad n = 0, \dots, N-1$$



$$1 - 2\delta_{jt} = \bar{x}_0 + \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_{n,jt}$$

$$\operatorname{erf}^{-1}(x) := \bar{y}_0 + \sum_{n=0}^{N-1} M_n \lambda_{n,jt}$$

$$0 \leq \lambda_{n,jt} \leq [\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n]$$

$$\lambda_{n+1,jt} > 0 \Rightarrow \lambda_{n,jt} = [\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n]$$

Referências

- [1] Ali A. Jalali and Vahid Nadimi, “A Survey on Robust Model Predictive Control from 1999-2006”.
- [2] Dennis Harald van Hessem. Stochastic inequality constrained closed-loop model predictive control with application to chemical process operation. PhD thesis, Delft University of Technology, 2004