9ª Lista de Exercícios – Álgebra Linear – Prof. Erica Romão.

Autovalores e Autovetores

Diagonalização de Operadores

1. Dada as transformações lineares, encontrar o polinômio característico, os autovalores e os autovetores:

a) T: $R^2 \to R^2$, dada por T (x, y) = (x + 2y, - x + 4y);

b) T: $R^2 \to R^2$,dada por T (x, y) = (y, - x);

c) T: $R^3 \to R^3$, dada por T (x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z);

d) T: $R^3 \to R^3$, dada por T (x, y, z) = (x, - 2x – y, 2x + y + 2z);

2. Calcular os autovalores e os correspondentes autovetores das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

3. Encontre a equação característica os autovalores e bases dos autoespaços das matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

4. Seja A uma matriz quadrada:

a) Prove que se A é uma matriz triangular superior (ou inferior), então os autovalores de A são os elementos da diagonal principal de A.

b) Prove que A e A^T têm os mesmos autovalores. O que, se houver, pode ser dito sobre os autovetores associados de A e de A^T?

5. Verificar se a matriz A é diagonalizável. Caso seja, determinar uma matriz P que diagonaliza A e calcular $P^{-1}AP$.

a) A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; b) A = $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; c) A = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; d) A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

6. Seja T: $R^2 \to R^2$ operador dado por T(x, y) = (4x + 4y, x + 4y). Calcular o polinômio característico, os vetores da base e calcular $D = P\,A\,P^{-1}$.

7. Prove que T: $R^2 \to R^2$ operador dado por T(x, y) = (x + 3y, -3x - 5y) não é diagonalizável.

8. Em cada caso, ou mostre que a sentença é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa. Em todos os itens, A representa uma matriz quadrada.
   a) Se A possui autovalores reais, então ela é diagonalizável.
   b) Se A é diagonalizável, então ela possui autovalores distintos.
   c) Se todos os autovalores de A são reais e distintos, então ela é diagonalizável.
   d) Se A é diagonalizável, então sua transposta A^T também é diagonalizável.
   e) Toda matriz inversível é diagonalizável.
   f) Toda matriz diagonalizável é simétrica.
   g) Se A não tem inversa, então $\lambda = 0$ é um autovalor de A.

9. Verifique se as transformações dadas são diagonalizáveis e encontre os autoespaços de T. Explique sua conclusão.
   a) T: $R^3 \to R^3$, dada por T (x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z);
   b) T: $R^4 \to R^4$, dada por T (x, y, z,t) = (x + y , y, 2z + t, 2z + t);

10. Determine o polinômio característico de A, os autovalores, uma base para autoespaço, e as multiplicidade algébrica e geométrica de cada autovalor:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

Resp. a)λ = -2, 1, 3 b) λ = 3, c) λ = 3, 4.

11. Se possível, encontre a matriz P que diagonaliza A = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ Resp:P=$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$