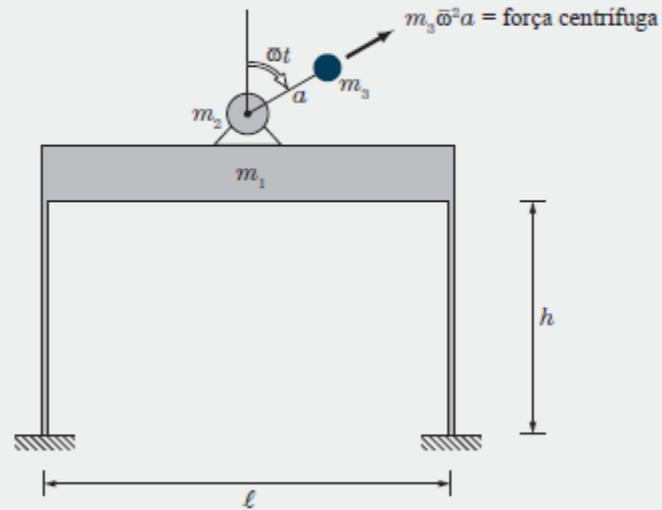


# Dinâmica das Estruturas

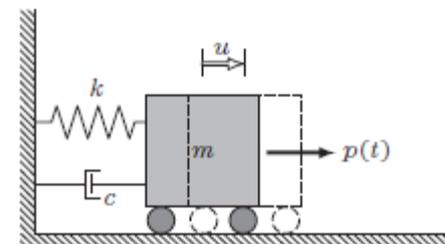
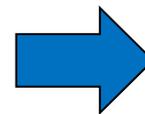
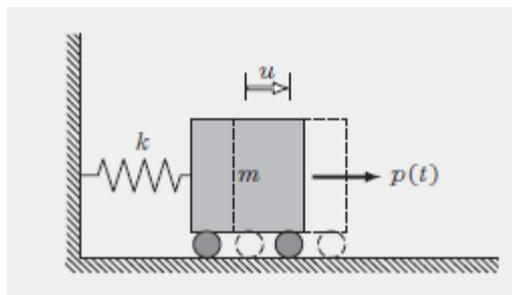
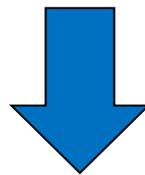
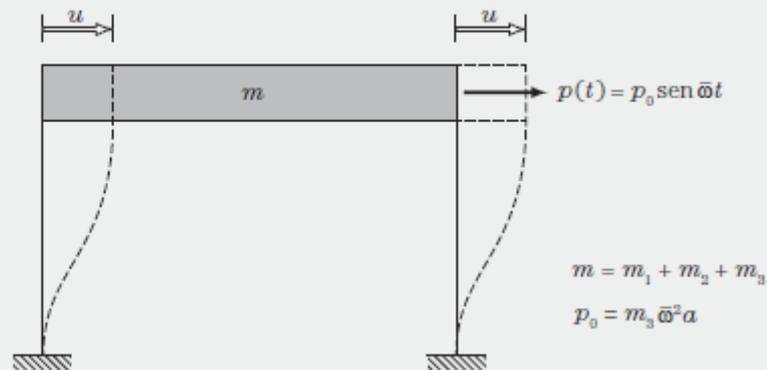


Fundação aporticada de máquina não balanceada

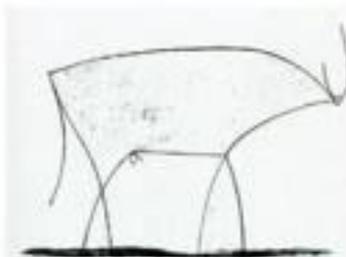
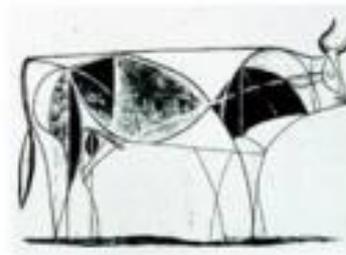
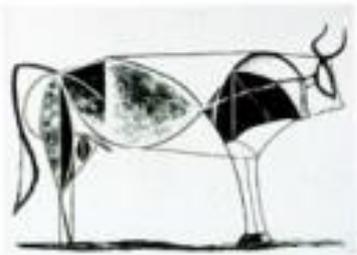
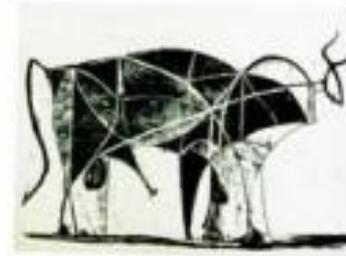
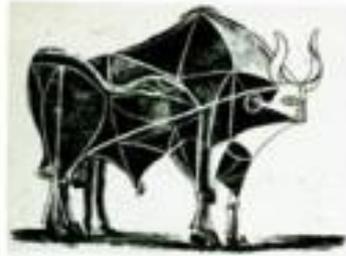
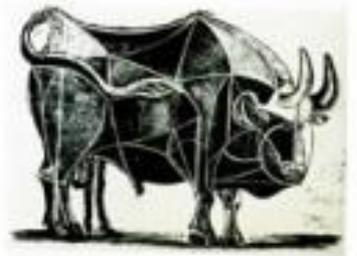
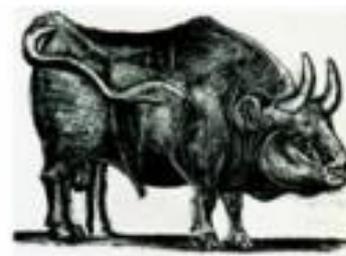
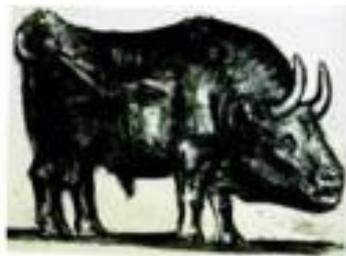
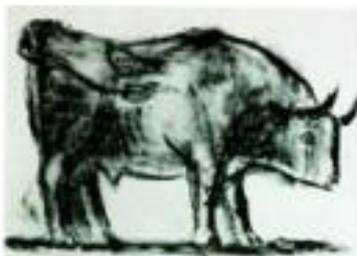


# Dinâmica das Estruturas

## Redução a Sistema com 1 Grau de Liberdade



Dinâmica



*Picasso*

Pablo Picasso, Bull (plates I - XI) 1945

# Dinâmica das Estruturas

## Vibrações em Sistemas com 1 Grau de Liberdade



$$\text{livres} \left\{ \begin{array}{l} \text{não - amortecidas} \Rightarrow m\ddot{u} + ku = 0 \\ \text{amortecidas} \Rightarrow m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{forçadas} \left\{ \begin{array}{l} \text{não - amortecidas} \Rightarrow m\ddot{u} + ku = p(t) \\ \text{amortecidas} \Rightarrow m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \end{array} \right.$$

# Dinâmica das Estruturas

## Vibrações livres não-amortecidas



$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{u} + ku = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{u} + \omega^2 u = 0 \\ \\ \text{cond iniciais : } \begin{cases} u(\mathbf{0}) = u_0 \\ \dot{u}(\mathbf{0}) = \dot{u}_0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\text{com } \omega^2 = \frac{k}{m} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

# Dinâmica das Estruturas

## Vibrações livres não-amortecidas



$$u(t) = \rho \mathbf{COS}(\omega t - \theta)$$

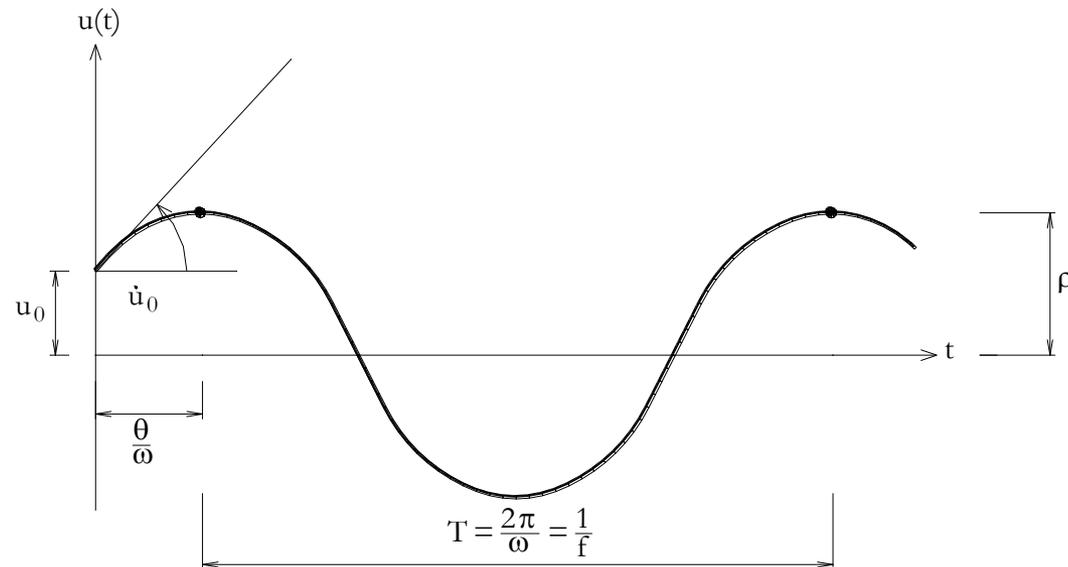
$$\text{com : } \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2 + (u_0)^2} \\ \theta = \text{arctg}\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega u_0}\right) \end{array} \right.$$

# Dinâmica das Estruturas

## Vibrações livres não-amortecidas



$$u(t) = \rho \cos(\omega t - \theta)$$



# Dinâmica das Estruturas

## Vibrações livres amortecidas



$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2u \\ \text{condições iniciais : } \begin{cases} u(\mathbf{0}) = u_0 \\ \dot{u}(\mathbf{0}) = \dot{u}_0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\text{com : } \xi = \frac{c}{2m\omega} \quad \text{e} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

## Dinâmica das Estruturas

Vibrações Livres com Amortecimento Subcrítico

$$\xi < 1$$



$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \rho \mathbf{COS}(\omega_D t - \theta) \quad \omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

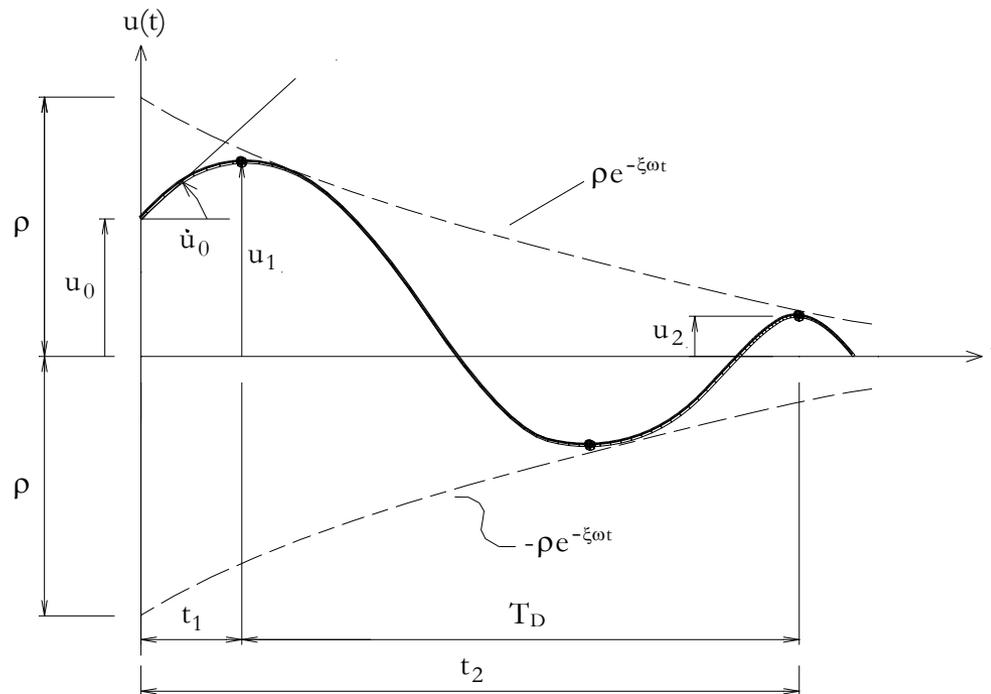
$$\text{com : } \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{\left( \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D} \right)^2 + (u_0)^2} \\ \theta = \arctg\left( \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D u_0} \right) \end{array} \right.$$

# Dinâmica das Estruturas

Vibrações Livres com Amortecimento Subcrítico  $\xi < 1$



$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \rho \mathbf{COS}(\omega_D t - \theta)$$

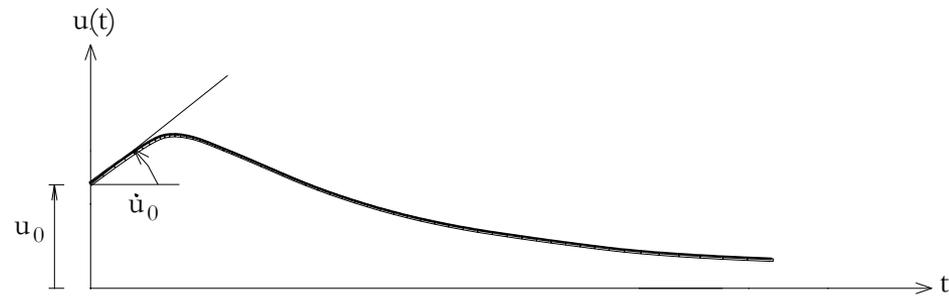


# Dinâmica das Estruturas

Vibrações Livres com Amortecimento Crítico  $\xi = 1$



$$u(t) = e^{-\xi\omega t} [u_0 + (\dot{u}_0 + \omega u_0)t]$$



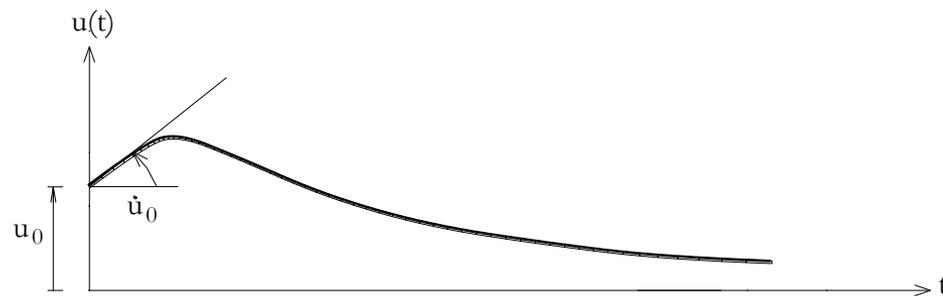
## Dinâmica das Estruturas

Vibrações Livres com Amortecimento Supercrítico  $\xi > 1$



$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left[ u_0 \cosh(\hat{\omega}t) + \frac{(\dot{u}_0 + \xi\omega u_0)}{\hat{\omega}} \sinh(\hat{\omega}t) \right]$$

com  $\hat{\omega} = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$



# Dinâmica das Estruturas

## Choque Mecânico: Perfeitamente Elástico



ANTES DA COLISÃO

$$Q_a = m_A v_0 \quad E_{c_a} = \frac{m_A v_0^2}{2}$$



DEPOIS DA COLISÃO

$$Q_d = m_A v_A + m_B v_B$$
$$E_{c_d} = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{m_B v_B^2}{2}$$

CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

$$Q_a = Q_d \quad \therefore \quad m_A v_0 = m_A v_A + m_B v_B \quad (1)$$

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA

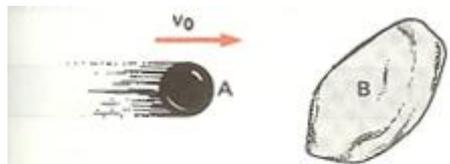
$$E_{c_a} = E_{c_d} \quad \therefore \quad m_A v_0^2 = m_A v_A^2 + m_B v_B^2 \quad (2)$$

# Dinâmica das Estruturas

## Choque Mecânico: Perfeitamente Inelástico

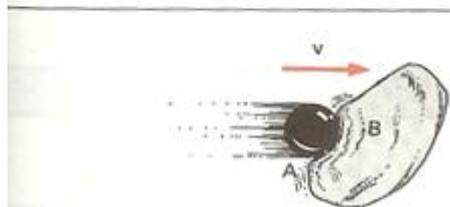


**ANTES DA COLISÃO**


$$Q_a = m_A v_0 \quad E_{c_a} = \frac{m_A v_0^2}{2}$$

---

**DEPOIS DA COLISÃO**

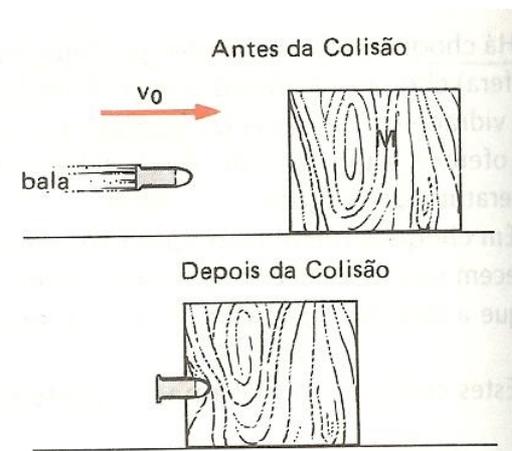

$$Q_d = (m_A + m_B)v \quad E_{c_d} = \frac{(m_A + m_B)v^2}{2}$$

---

**CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO**

$$Q_a = Q_d \quad \therefore m_A v_0 = (m_A + m_B)v$$

**DISSIPACÃO DA ENERGIA**  $E_{c_a} > E_{c_d}$



# Dinâmica das Estruturas

## Choque Mecânico

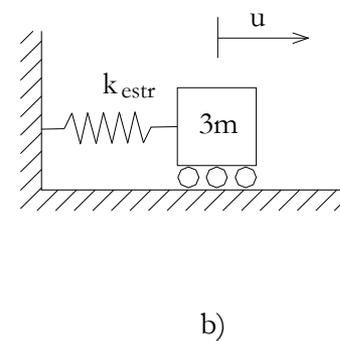
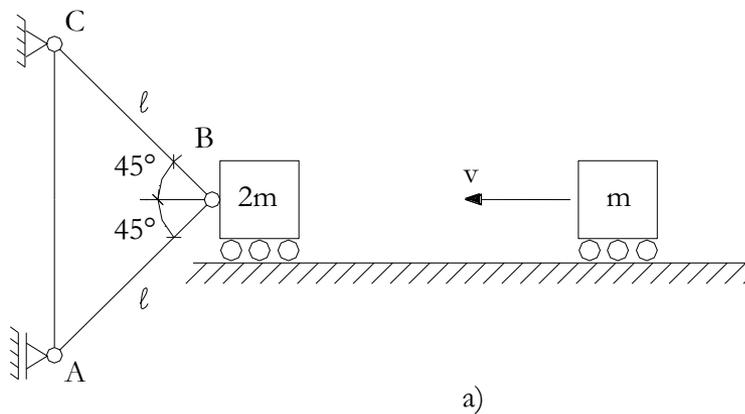


e = COEFICIENTE DE RESTITUIÇÃO		
e = 0	e < 1	e = 1
Choque Perfeitamente Inelástico	Choque Parcialmente Elástico	Choque Perfeitamente Elástico
ENERGIA		
Máxima Dissipação	Dissipação Parcial	Conservação da Energia Cinética
QUANTIDADE DE MOVIMENTO		
Constante	Constante	Constante

$$e = \frac{\text{Velocidade Relativa de Afastamento (depois)}}{\text{Velocidade Relativa de Aproximação (antes)}}$$

# Dinâmica das Estruturas

## Choque Horizontal (Puramente Inelástico) - Exemplo 3



## Dinâmica das Estruturas

Choque Horizontal - *desprezando o amortecimento*



$$\left\{ \begin{array}{l} 3m\ddot{u} + k_{est}u = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{u} + \omega^2 u = 0 \\ \\ \text{cond iniciais : } \left\{ \begin{array}{l} u(\mathbf{0}) = 0 \\ \dot{u}(\mathbf{0}) = -\frac{v}{3} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

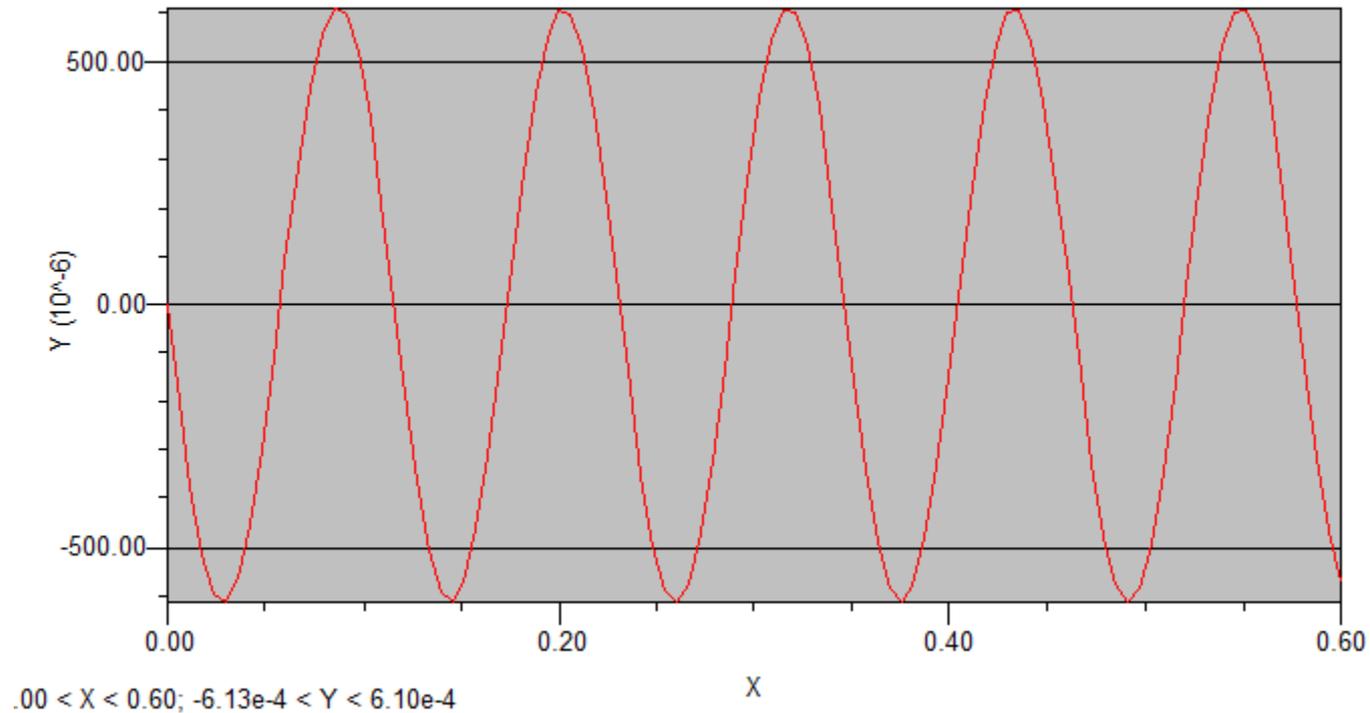
$$\omega = 54.36 \frac{\text{rd}}{\text{s}} \quad ; \quad T = 0.11558\text{s} \quad ; \quad f = 8.65191\text{Hz}$$

# Dinâmica das Estruturas

Choque Horizontal - *desprezando o amortecimento*



$$u(t) = 6.13177e-4 * \cos(54.3616 * t + 1.5708)$$



## Dinâmica das Estruturas

Choque Horizontal - *Considerando o amortecimento*



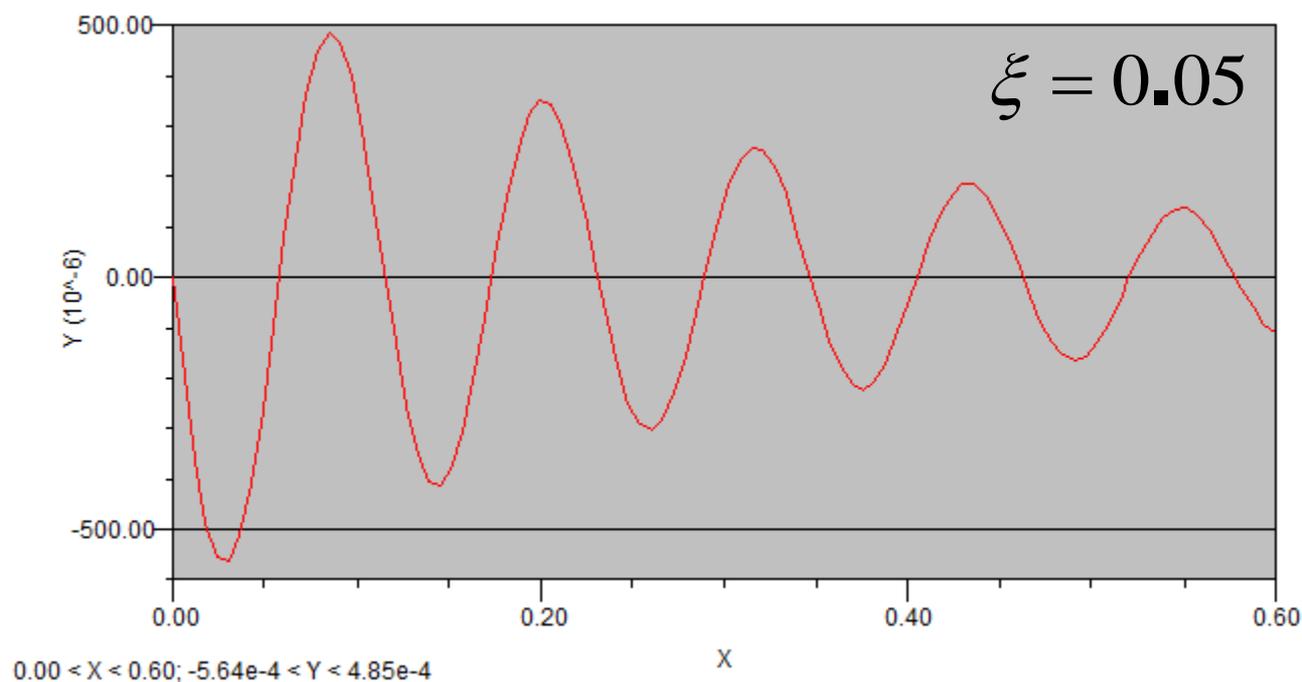
$$\left\{ \begin{array}{l} 3m\ddot{u} + c\dot{u} + k_{estr}u = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2u \\ \text{condições iniciais :} \quad \left\{ \begin{array}{l} u(\mathbf{0}) = 0 \\ \dot{u}(\mathbf{0}) = -\frac{v}{3} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

## Dinâmica das Estruturas

Choque Horizontal - Considerando o amortecimento



$$u(t) = e^{-2,71808t} [0,000614 \cos(54,2936t + 1,5708)]$$

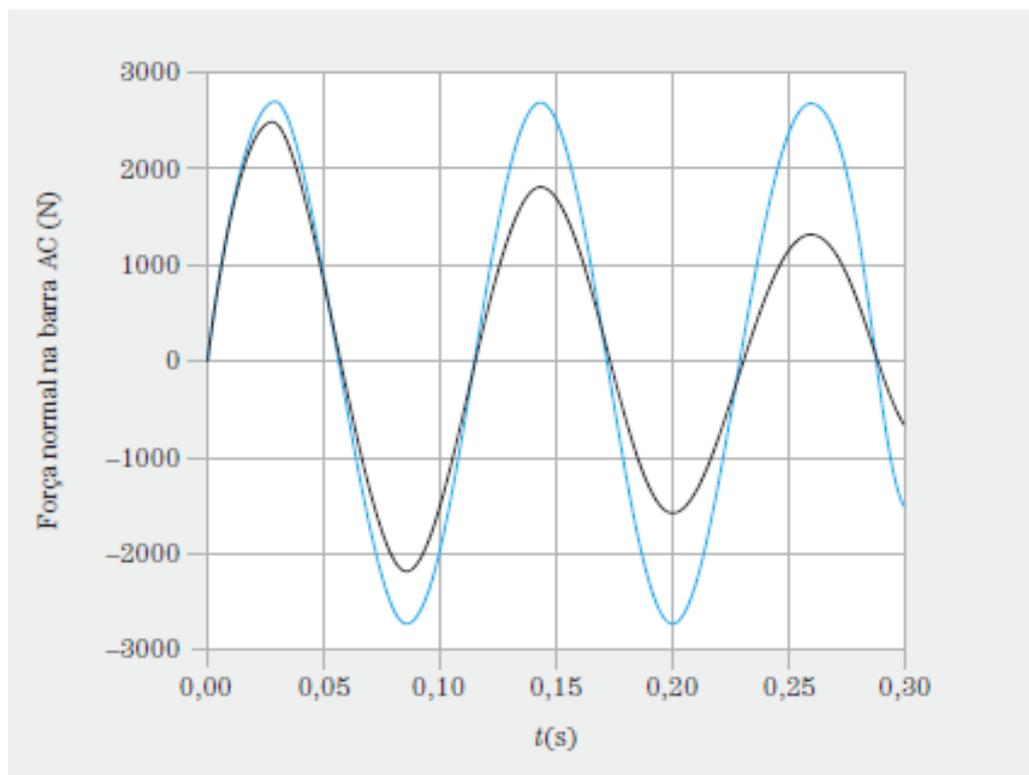


[ - 5.65388e-4, 4.83106e-4, - 4.12799e-4, 3.52724e-4] em metros

[ - 0.92206, 0.78787, - 0.67321, 0.57524]

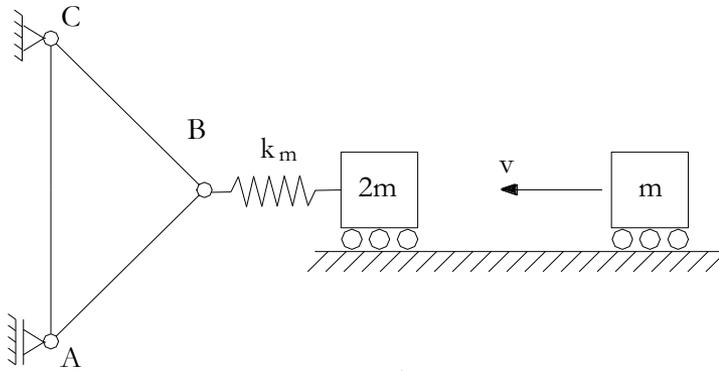
## Dinâmica das Estruturas

Choque Horizontal – Força normal na barra AC:  
sem e com amortecimento

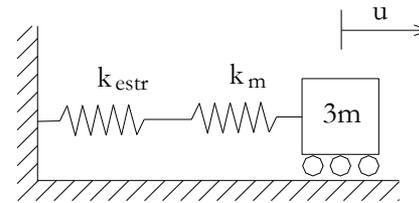


# Dinâmica das Estruturas

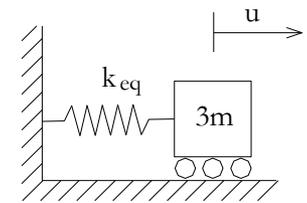
## Acoplamento em Série de Molas



a)



b)



c)

$$u = \frac{F}{k_{eq}} = \frac{F_{est}}{k_{est}} + \frac{F_m}{k_m}$$

$$F = F_{est} = F_m$$

$\Rightarrow$

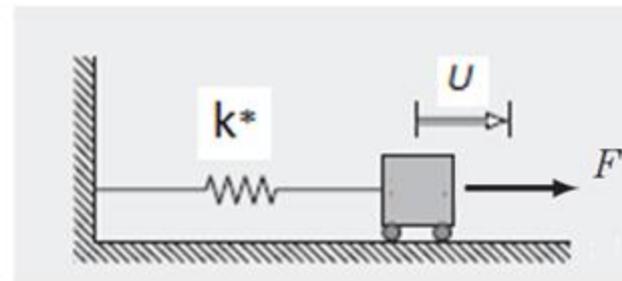
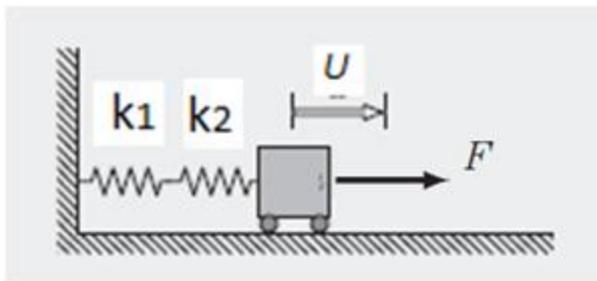
$$k_{eq} = \frac{k_{est} k_m}{k_{est} + k_m}$$

$$u_{est} = \frac{k_{eq}}{k_{est}} u$$

$$u_m = \frac{k_{eq}}{k_m} u$$

# Dinâmica das Estruturas

## Acoplamento em Série de Molas



$$F = F_1 = F_2 \quad F = k^*U \quad F_1 = k_1U_1 \quad F_2 = k_2U_2$$

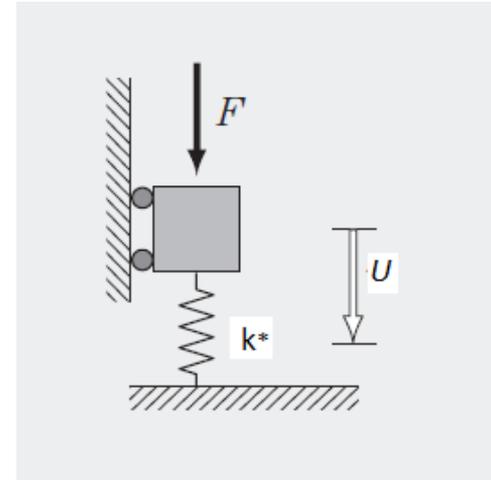
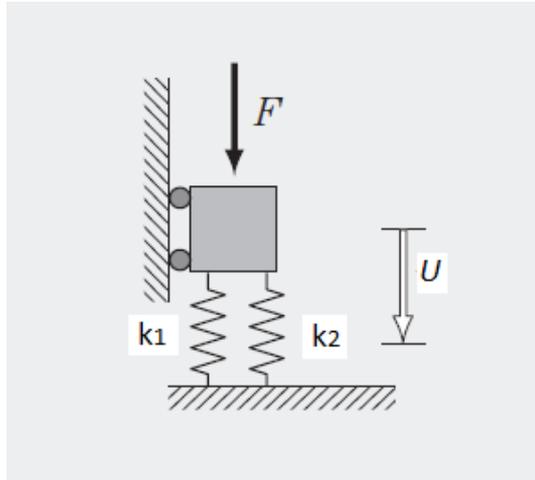
$$U = U_1 + U_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{k^*} = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k^*} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$U_1 = \frac{F_1}{k_1} = \frac{F}{k_1} = \frac{k^*}{k_1}U$$

$$U_2 = \frac{F_2}{k_2} = \frac{F}{k_2} = \frac{k^*}{k_2}U$$

# Dinâmica das Estruturas

## Associação em Paralelo



$$F = F_1 + F_2$$
$$U = U_1 = U_2$$

$$F = k^* U$$

$$F_1 = k_1 U_1 \quad \Rightarrow \quad F = F_1 + F_2 \quad \Rightarrow \quad k^* = k_1 + k_2$$

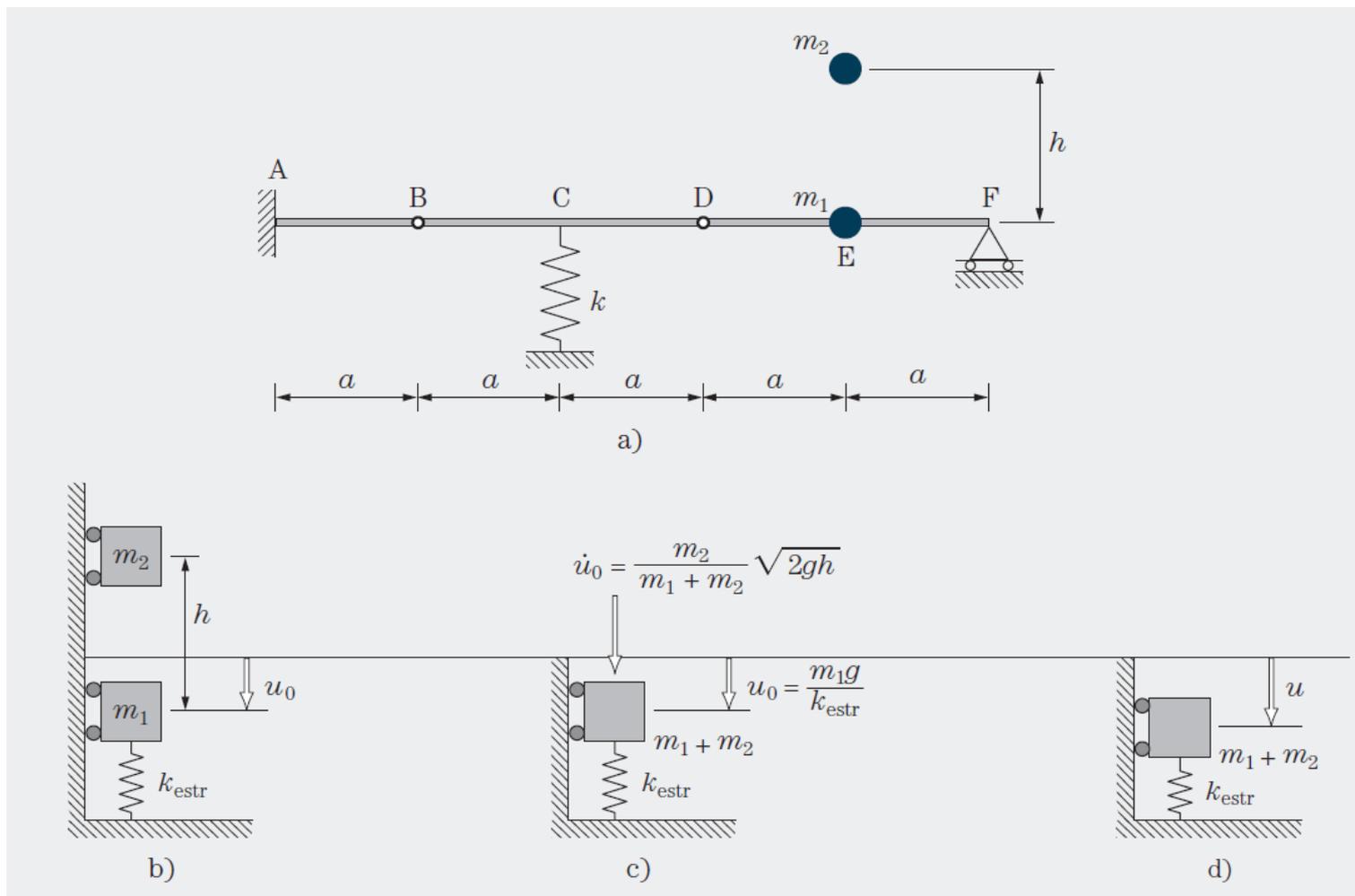
$$F_2 = k_2 U_2$$

$$F_1 = k_1 U_1 = \frac{k_1}{k^*} F$$

$$F_2 = k_2 U_2 = \frac{k_2}{k^*} F$$

# Dinâmica das Estruturas

## Choque Vertical - Exemplo 4



# Dinâmica das Estruturas

## Choque Vertical - Exemplo 4



$$\left\{ \begin{array}{l} (m_1 + m_2)\ddot{u} + k_{est}u = (m_1 + m_2)g \quad \text{ou} \quad \ddot{u} + \omega^2u \\ \text{condições iniciais :} \left\{ \begin{array}{l} u(0) = \frac{m_1 g}{k_{est}} \\ \dot{u}(0) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

# Dinâmica das Estruturas

## Choque Vertical - Exemplo 4



$$u(t) = \frac{(m_1 + m_2)g}{k_{est}} + \rho \cos(\omega t - \theta)$$
$$\text{com : } \begin{cases} \omega^2 = \frac{k_{est}}{(m_1 + m_2)} \\ \rho = m_2 \sqrt{\frac{g}{k_{est}} \left( \frac{2h}{m_1 + m_2} + \frac{g}{k_{est}} \right)} \\ \theta = \arctan \left( -\frac{k_{est} \sqrt{2gh}}{\omega(m_1 + m_2)g} \right) \end{cases}$$

# Dinâmica das Estruturas

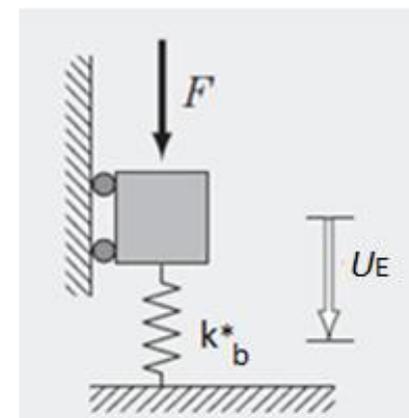
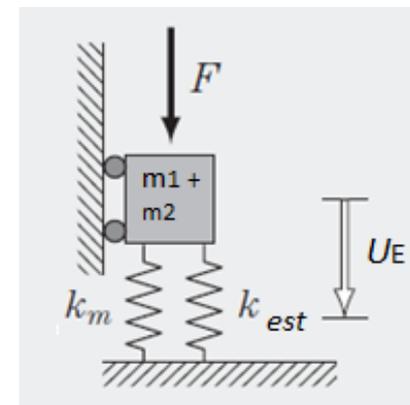
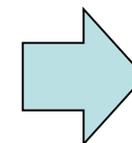
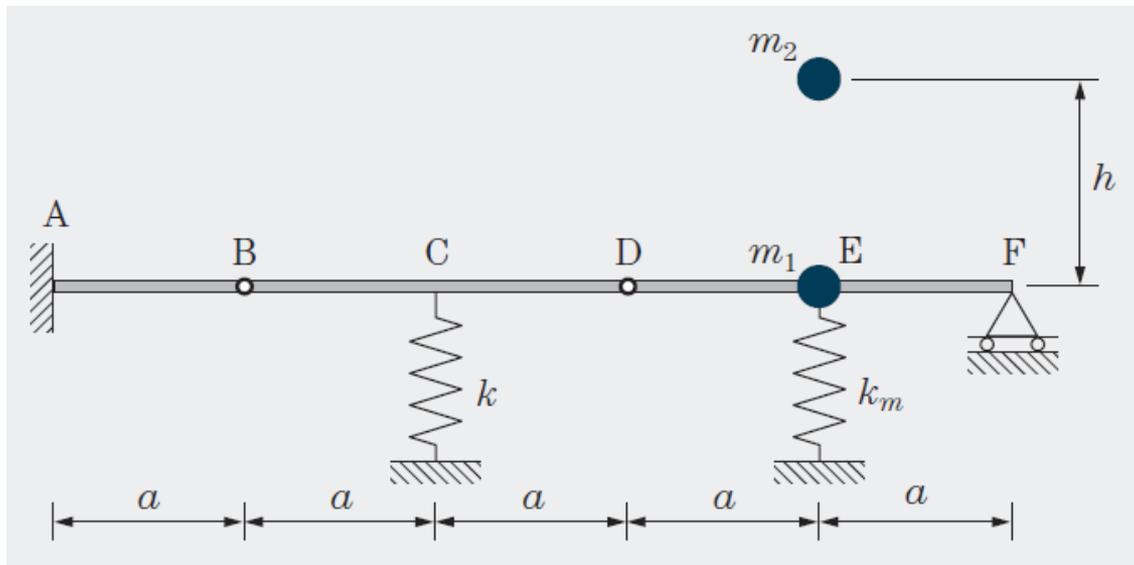
## Choque Vertical - Exemplo 4



$$\left. \begin{aligned} u_{m\acute{a}x} &= \frac{(m_1 + m_2)g}{k_{est}} + \rho \\ u_{est} &= \frac{(m_1 + m_2)g}{k_{est}} \\ u_{m\acute{a}x} &= Du_{est} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D = 1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{1 + \frac{2h}{u_{est}}}$$

# Dinâmica das Estruturas

## Choque Vertical - Exemplo 4 – Associação em Paralelo



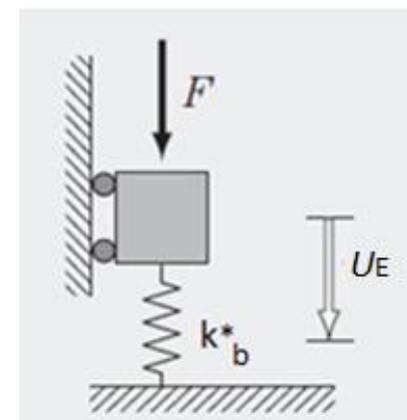
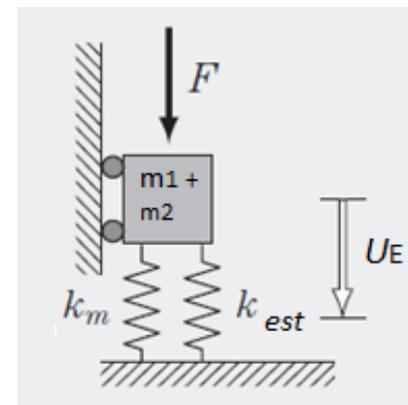
$$k_b^* = k_{est} + k_m$$

# Dinâmica das Estruturas

## Choque Vertical - Exemplo 4 – Associação em Paralelo

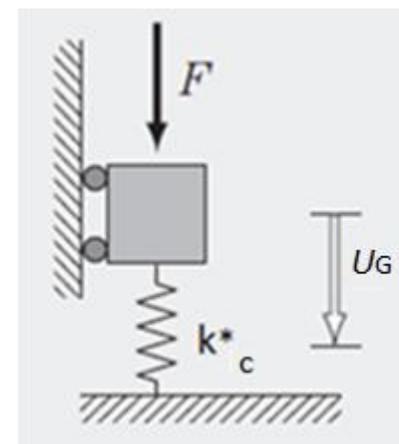
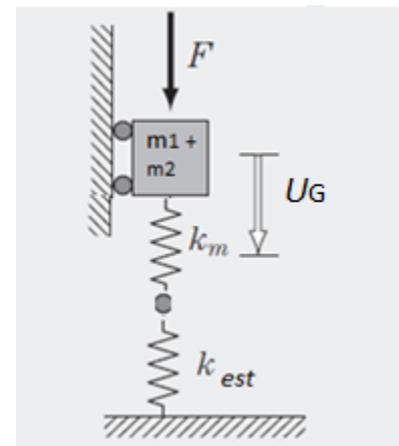
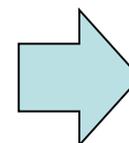
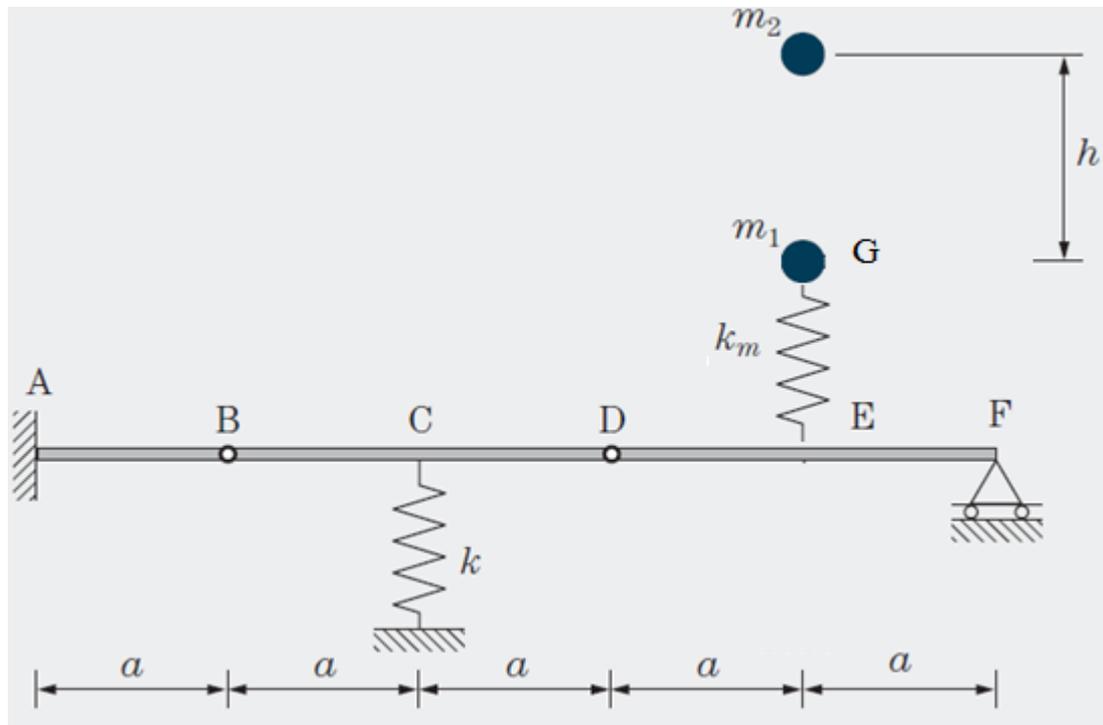


Caso B - Associação em Paralelo - Análise Dinâmica do Ponto E					
km	k*b	UEb_est	Db	UEb_din_max	Erro
595000	970000	3,866E-02	2,588	0,100069	0,069%
595100	970100	3,866E-02	2,589	0,100062	0,062%
595200	970200	3,865E-02	2,589	0,100055	0,055%
595300	970300	3,865E-02	2,589	0,100048	0,048%
595400	970400	3,864E-02	2,589	0,100040	0,040%
595500	970500	3,864E-02	2,589	0,100033	0,033%
595600	970600	3,864E-02	2,589	0,100026	0,026%
595700	970700	3,863E-02	2,589	0,100019	0,019%
595800	970800	3,863E-02	2,589	0,100012	0,012%
595900	970900	3,862E-02	2,589	0,100005	0,005%
<b>596000</b>	<b>971000</b>	<b>3,862E-02</b>	<b>2,589</b>	<b>0,099997</b>	<b>0,003%</b>
596100	971100	3,862E-02	2,589	0,099990	0,010%
596200	971200	3,861E-02	2,589	0,099983	0,017%
596300	971300	3,861E-02	2,590	0,099976	0,024%
596400	971400	3,860E-02	2,590	0,099969	0,031%
596500	971500	3,860E-02	2,590	0,099961	0,039%
596600	971600	3,860E-02	2,590	0,099954	0,046%
596700	971700	3,859E-02	2,590	0,099947	0,053%
596800	971800	3,859E-02	2,590	0,099940	0,060%
596900	971900	3,858E-02	2,590	0,099933	0,067%
597000	972000	3,858E-02	2,590	0,099926	0,074%
597100	972100	3,858E-02	2,590	0,099918	0,082%



# Dinâmica das Estruturas

## Choque Vertical - Exemplo 4 – Associação em Série



$$\frac{1}{k_c^*} = \frac{1}{k_{est}} + \frac{1}{k_m}$$

# Dinâmica das Estruturas

## Choque Vertical - Exemplo 4 – Associação em Série

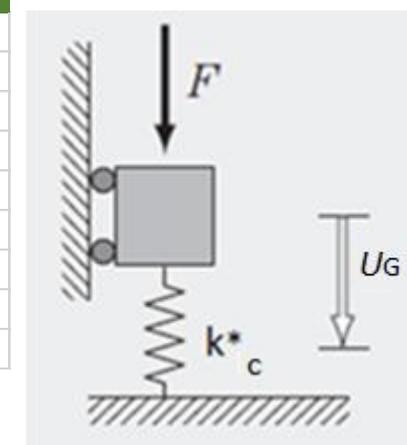
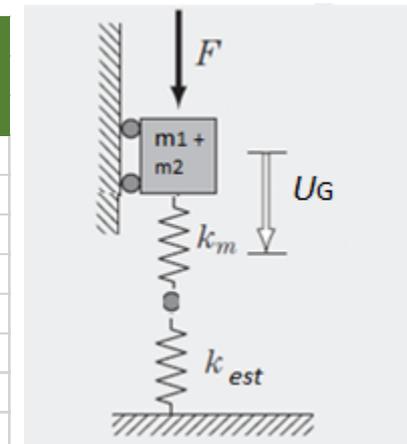


### Caso C - Associação em Série - Análise Dinâmica do Ponto G

A determinação do deslocamento vertical do ponto E faz-se pela relação  $UE = UG \cdot kc/ka$

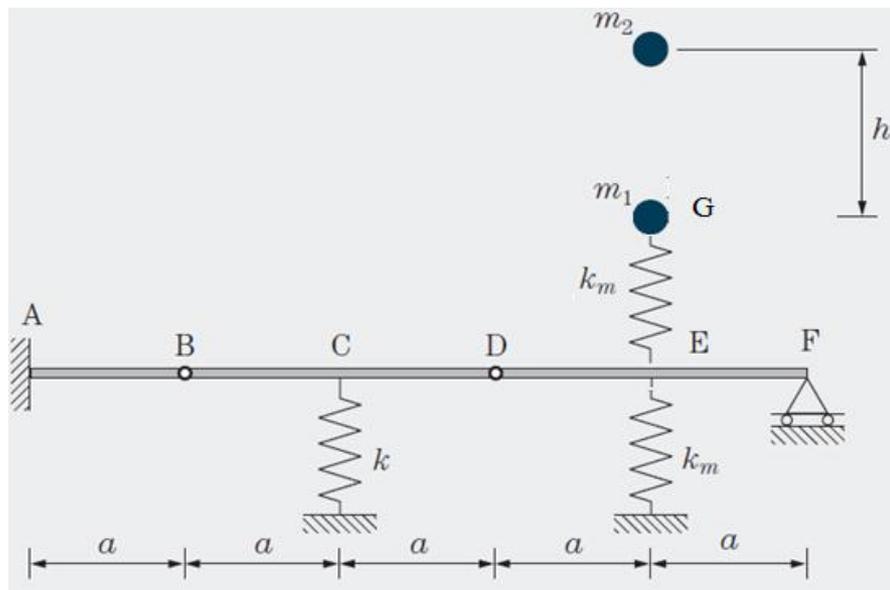
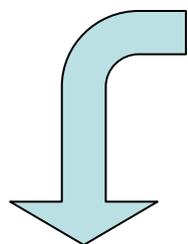
Note-se que  $UE_{est}$  é sempre igual a 0,1 m e, portanto,  $UE_{din\_max} > 0,1m$

km	k*c	UG_est	UE_est	Dc	UGc_din_max	UEc_din_max	Erro
104900	81970	0,4575	0,1000	1,49984	6,86153E-01	1,49984E-01	0,0104%
104920	81982	0,4574	0,1000	1,49987	6,86066E-01	1,49987E-01	0,0083%
104930	81989	0,4574	0,1000	1,49989	6,86022E-01	1,49989E-01	0,0073%
104940	81995	0,4573	0,1000	1,49991	6,85978E-01	1,49991E-01	0,0063%
104950	82001	0,4573	0,1000	1,49992	6,85934E-01	1,49992E-01	0,0052%
104960	82007	0,4573	0,1000	1,49994	6,85890E-01	1,49994E-01	0,0042%
104970	82013	0,4572	0,1000	1,49995	6,85846E-01	1,49995E-01	0,0031%
104980	82019	0,4572	0,1000	1,49997	6,85802E-01	1,49997E-01	0,0021%
104990	82025	0,4572	0,1000	1,49998	6,85758E-01	1,49998E-01	0,0010%
<b>105000</b>	<b>82031</b>	<b>0,4571</b>	<b>0,1000</b>	<b>1,50000</b>	<b>6,85714E-01</b>	<b>1,50000E-01</b>	<b>0,0000%</b>
105010	82037	0,4571	0,1000	1,50002	6,85670E-01	1,50002E-01	0,0010%
105020	82043	0,4571	0,1000	1,50003	6,85627E-01	1,50003E-01	0,0021%
105030	82050	0,4570	0,1000	1,50005	6,85583E-01	1,50005E-01	0,0031%
105040	82056	0,4570	0,1000	1,50006	6,85539E-01	1,50006E-01	0,0042%
105050	82062	0,4570	0,1000	1,50008	6,85495E-01	1,50008E-01	0,0052%
105060	82068	0,4569	0,1000	1,50009	6,85451E-01	1,50009E-01	0,0062%
105070	82074	0,4569	0,1000	1,50011	6,85407E-01	1,50011E-01	0,0073%
105080	82080	0,4569	0,1000	1,50012	6,85364E-01	1,50012E-01	0,0083%
105090	82086	0,4568	0,1000	1,50014	6,85320E-01	1,50014E-01	0,0094%



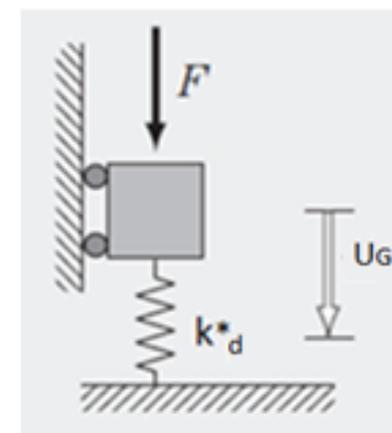
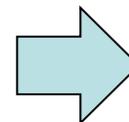
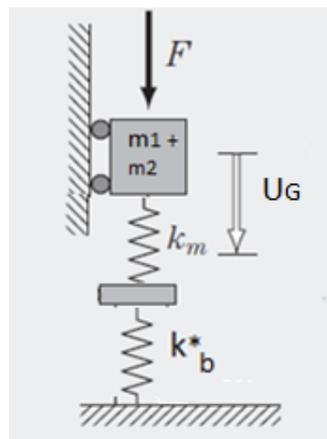
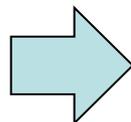
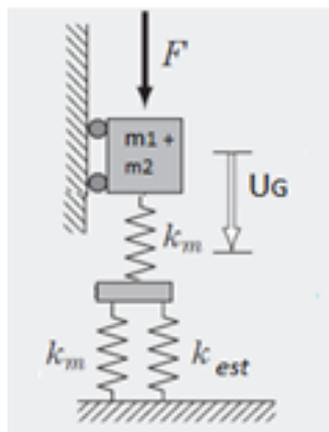
# Dinâmica das Estruturas

## Choque Vertical - Exemplo 4 – Associação em Série e Paralelo



$$k_b^* = k_{est} + k_m$$

$$\frac{1}{k_d^*} = \frac{1}{k_b^*} + \frac{1}{k_m}$$



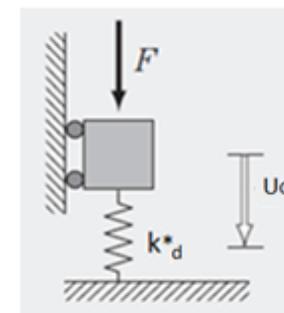
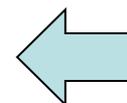
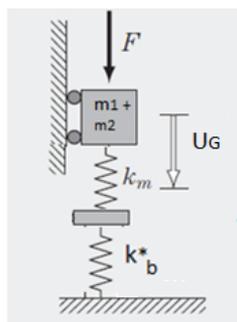
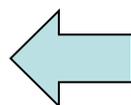
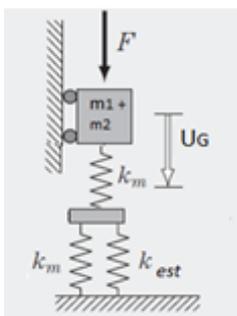
# Dinâmica das Estruturas

## Choque Vertical - Exemplo 4 – Associação em Série e Paralelo



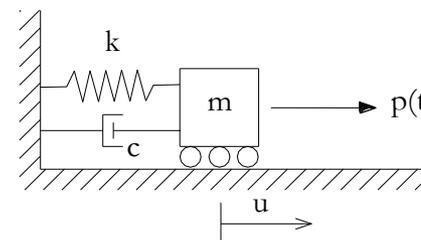
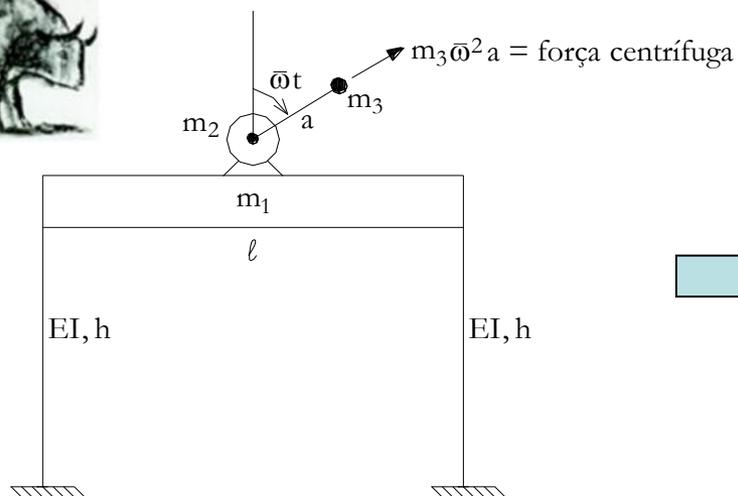
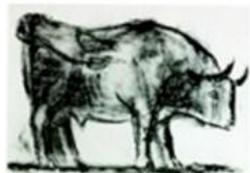
Caso D - Associação em Série e Paralelo - Análise Dinâmica do Ponto G  
A determinação do deslocamento vertical do ponto E faz-se pela relação  $UE = UG \cdot k^*d/k^*b$

km	kb	k*d	UGd_est	UEd_est	Dd	UGd_din_max	UEd_din_max	Erro
260.000	635.000	184.469	0,203285887	0,059055118	1,716	0,349	0,101321	1,321%
261.000	636.000	185.057	0,202640425	0,058962264	1,717	0,348	0,101224	1,224%
262.000	637.000	185.644	0,201999473	0,058869702	1,718	0,347	0,101127	1,127%
263.000	638.000	186.231	0,201362981	0,058777429	1,719	0,346	0,101030	1,030%
264.000	639.000	186.817	0,200730901	0,058685446	1,720	0,345	0,100933	0,933%
265.000	640.000	187.403	0,200103184	0,05859375	1,721	0,344	0,100836	0,836%
266.000	641.000	187.989	0,199479784	0,05850234	1,722	0,343	0,100740	0,740%
267.000	642.000	188.574	0,198860653	0,058411215	1,723	0,343	0,100643	0,643%
268.000	643.000	189.159	0,198245746	0,058320373	1,724	0,342	0,100547	0,547%
269.000	644.000	189.744	0,197635018	0,058229814	1,725	0,341	0,100451	0,451%
270.000	645.000	190.328	0,197028424	0,058139535	1,726	0,340	0,100355	0,355%
271.000	646.000	190.912	0,196425919	0,058049536	1,727	0,339	0,100260	0,260%
272.000	647.000	191.495	0,195827462	0,057959815	1,728	0,338	0,100164	0,164%
273.000	648.000	192.078	0,195233008	0,05787037	1,729	0,338	0,100069	0,069%
<b>274.000</b>	<b>649.000</b>	<b>192.661</b>	<b>0,194642516</b>	<b>0,057781202</b>	<b>1,730</b>	<b>0,337</b>	<b>0,099974</b>	<b>0,026%</b>
275.000	650.000	193.243	0,194055944	0,057692308	1,731	0,336	0,099879	0,121%
276.000	651.000	193.825	0,193473252	0,057603687	1,732	0,335	0,099784	0,216%
277.000	652.000	194.407	0,192894399	0,057515337	1,733	0,334	0,099689	0,311%
278.000	653.000	194.988	0,192319345	0,057427259	1,734	0,334	0,099595	0,405%
279.000	654.000	195.569	0,191748052	0,05733945	1,735	0,333	0,099501	0,499%
280.000	655.000	196.150	0,191180480	0,057251908	1,736	0,332	0,099407	0,593%
281.000	656.000	196.730	0,190616591	0,057164634	1,737	0,331	0,099313	0,687%



# Dinâmica das Estruturas

## Vibrações Forçadas Harmônicas



$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin(\bar{\omega}t) \\ \text{condições iniciais : } \begin{cases} u(0) = u_0 \\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \end{cases} \end{array} \right.$$

# Dinâmica das Estruturas

## Vibrações Forçadas Harmônicas



$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin(\bar{\omega}t) \quad \xi < 1 \\ \text{condições iniciais : } \begin{cases} u(\mathbf{0}) = u_0 \\ \dot{u}(\mathbf{0}) = \dot{u}_0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$u(t) = \underbrace{e^{-\xi\omega t} \rho \cos(\omega_D t - \theta)}_{\text{solução homogênea}} + \underbrace{\bar{\rho} \text{sen}(\bar{\omega}t - \bar{\theta})}_{\text{solução particular}}$$

## Dinâmica das Estruturas

### Vibrações Forçadas Harmônicas – Solução da Homogênea



$$u_h(t) = e^{-\xi\omega t} \rho \cos(\omega_D t - \theta)$$

$\rho$  e  $\theta$  decorrem das condições iniciais  $u_0$  e  $\dot{u}_0$ , bem como de  $\bar{\rho}$  e  $\bar{\theta}$ .

$$u_0 = \rho \cos \theta - \bar{\rho} \text{sen} \bar{\theta},$$

$$\dot{u}_0 = -\xi\omega\rho \cos \theta + \omega_D \rho \text{sen} \theta + \bar{\omega} \bar{\rho} \cos \bar{\theta},$$

chega-se a:

$$\rho = \sqrt{(u_0 + \bar{\rho} \text{sen} \bar{\theta})^2 + \left[ \frac{\dot{u}_0 - \bar{\omega} \bar{\rho} \cos \bar{\theta} + \xi\omega (u_0 + \bar{\rho} \text{sen} \bar{\theta})}{\omega_D} \right]^2},$$

$$\theta = \arctan \frac{\dot{u}_0 - \bar{\omega} \bar{\rho} \cos \bar{\theta} + \xi\omega (u_0 + \bar{\rho} \text{sen} \bar{\theta})}{\omega_D (u_0 + \bar{\rho} \text{sen} \bar{\theta})}.$$

# Dinâmica das Estruturas

## Vibrações Forçadas Harmônicas – Solução Particular

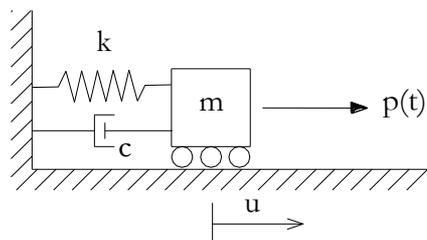
$$u_p(t) = \bar{\rho} \text{sen}(\bar{\omega}t - \bar{\theta})$$

$$\text{com : } \begin{cases} \bar{\rho} = Du_e \\ u_e = \frac{p_0}{k} \\ D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \\ \bar{\theta} = \text{arctg}\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right) \end{cases}$$



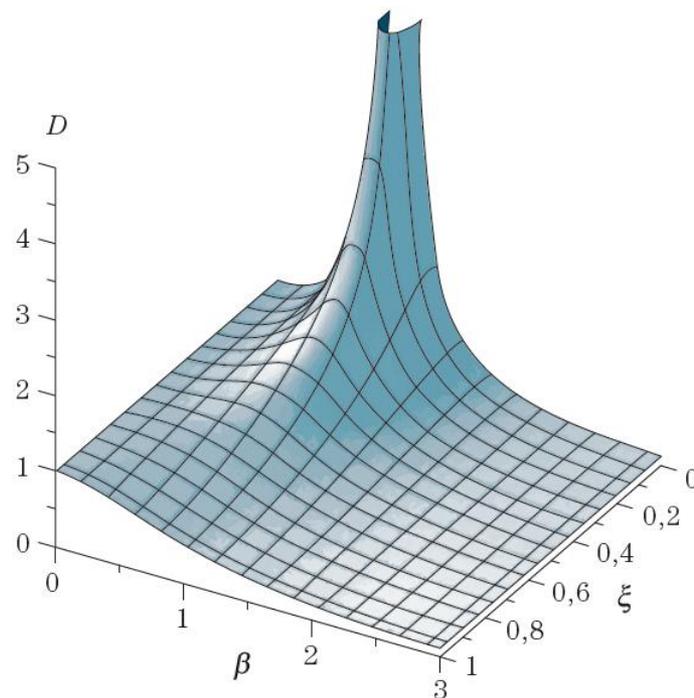
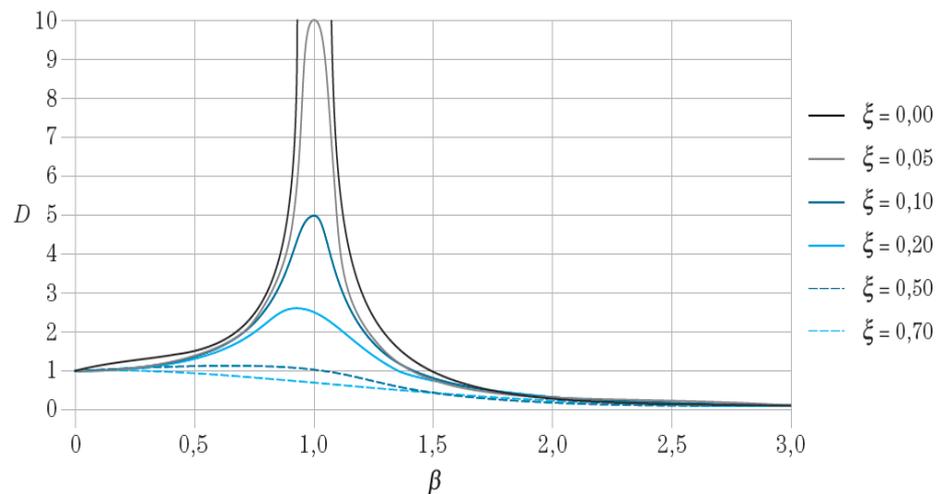
# Dinâmica das Estruturas

## Vibrações Forçadas Harmônicas – Regime Permanente



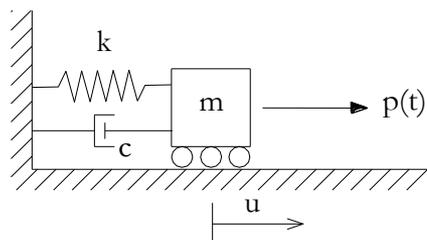
$$D = \frac{\bar{\rho}}{p_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$u_p(t) = \bar{\rho} \text{sen}(\bar{\omega}t - \bar{\theta})$$



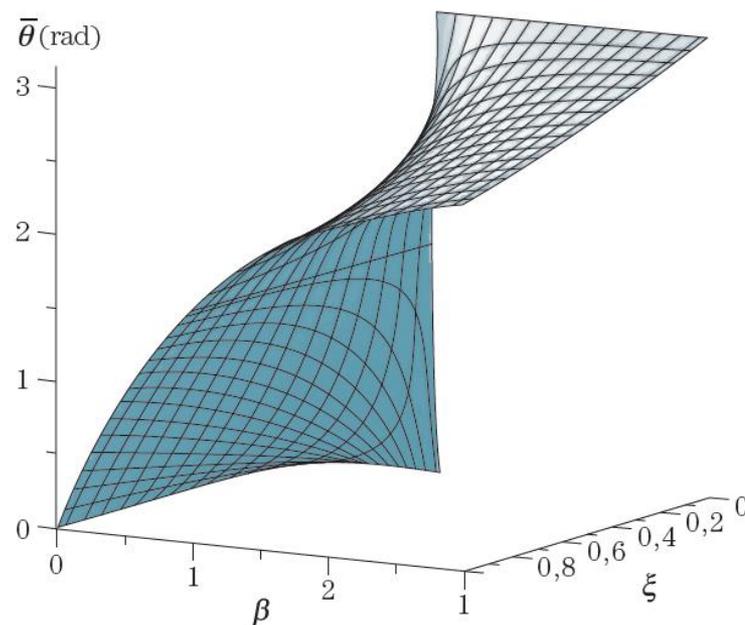
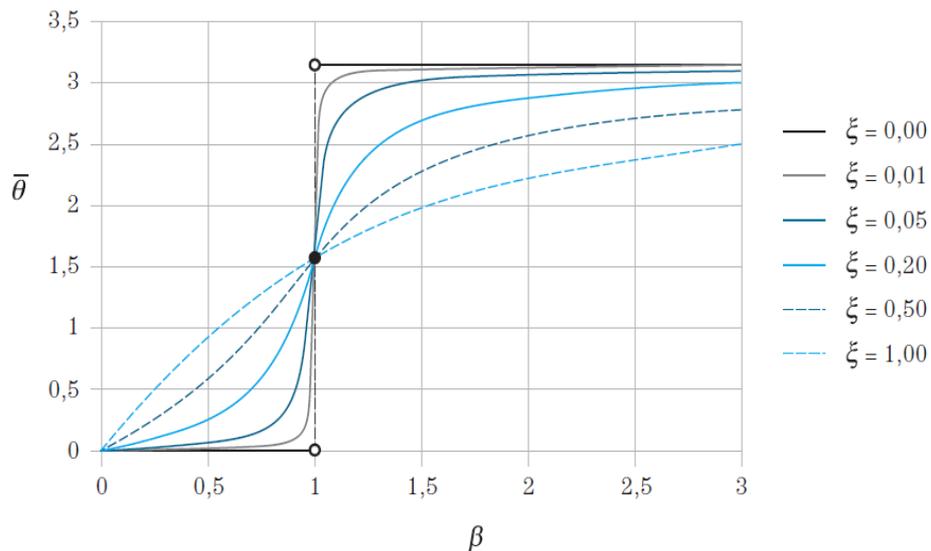
# Dinâmica das Estruturas

## Vibrações Forçadas Harmônicas – Regime Permanente



$$D = \frac{\bar{\rho}}{p_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$u_p(t) = \bar{\rho} \text{sen}(\bar{\omega}t - \bar{\theta})$$



# Dinâmica das Estruturas

## Vibrações Forçadas Harmônicas

Estudo do controle de vibrações para uma estrutura

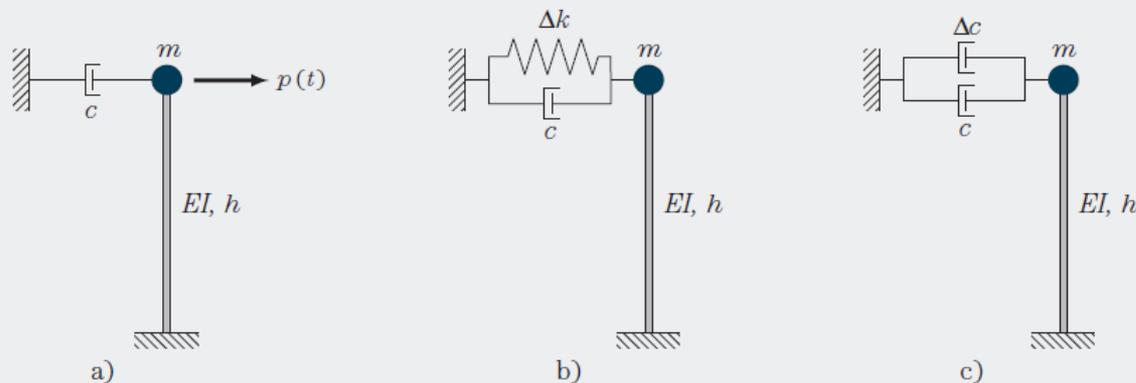


Figura 6.7

Pedem-se:

- a frequência do carregamento e a taxa de amortecimento estrutural;
- a rigidez  $\Delta k$  da mola (elemento de controle passivo) que deve ser colocada em paralelo (Figura 6.7b) para reduzir, nas mesmas condições de carregamento, a amplificação dinâmica à metade;
- a constante  $\Delta c$  do amortecedor (elemento de controle passivo) que deve ser colocado em paralelo (Figura 6.7c) para reduzir, nas mesmas condições de carregamento, a amplificação dinâmica à metade.

$$m = 10^6 \text{ kg}$$

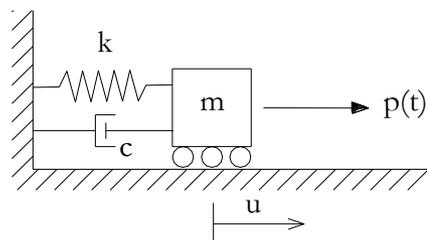
$$h = 15 \text{ m}$$

$$EI = 6,75 \times 10^{10} \text{ Nm}^2$$

$$k = \frac{3EI}{h^3} = 60 \times 10^6 \text{ N/m}$$

# Dinâmica das Estruturas

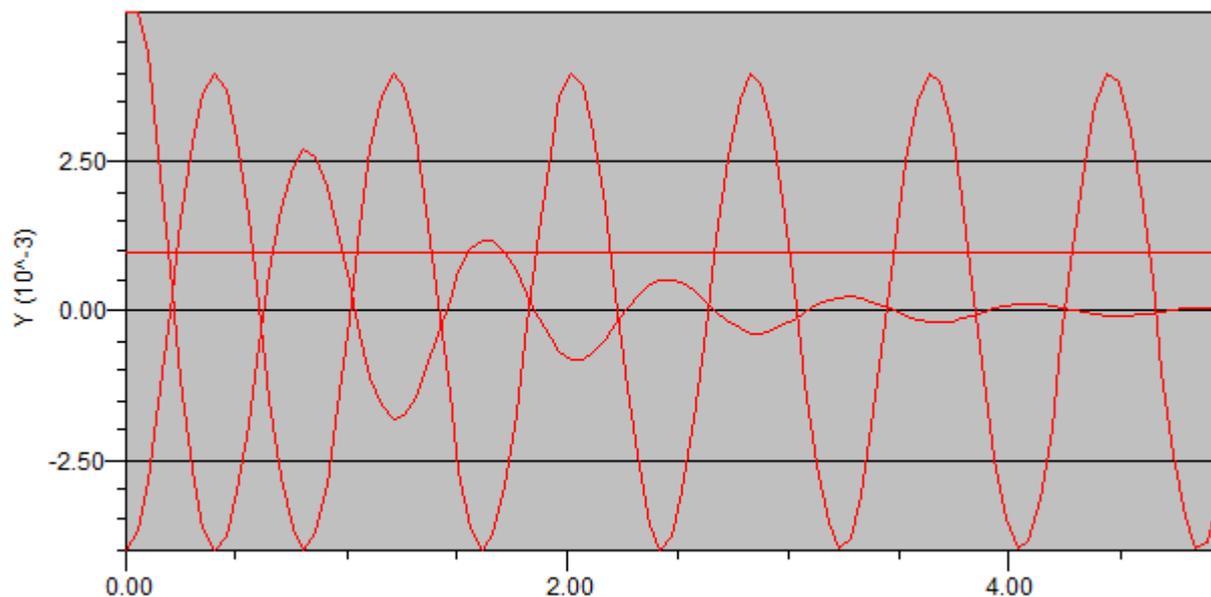
## Vibrações Forçadas Harmônicas – Caso a



$$m = 10^6 \text{ kg} \quad k = 60 * 10^6 \text{ N/m}$$

$$\xi = 12.5\% \quad \omega = 7.746 \text{ rd/s} \quad \beta = 1$$

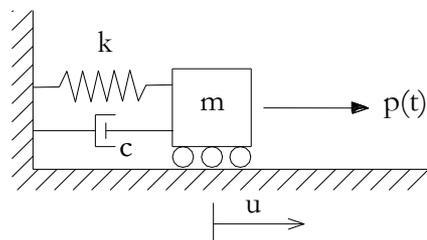
$$[p_0 = 60000 \text{ N}, u_0 = 0.002 \text{ m}, v_0 = 0,0]$$



0.00 < X < 5.0; -4.04e-3 < Y < 5.00e-3

# Dinâmica das Estruturas

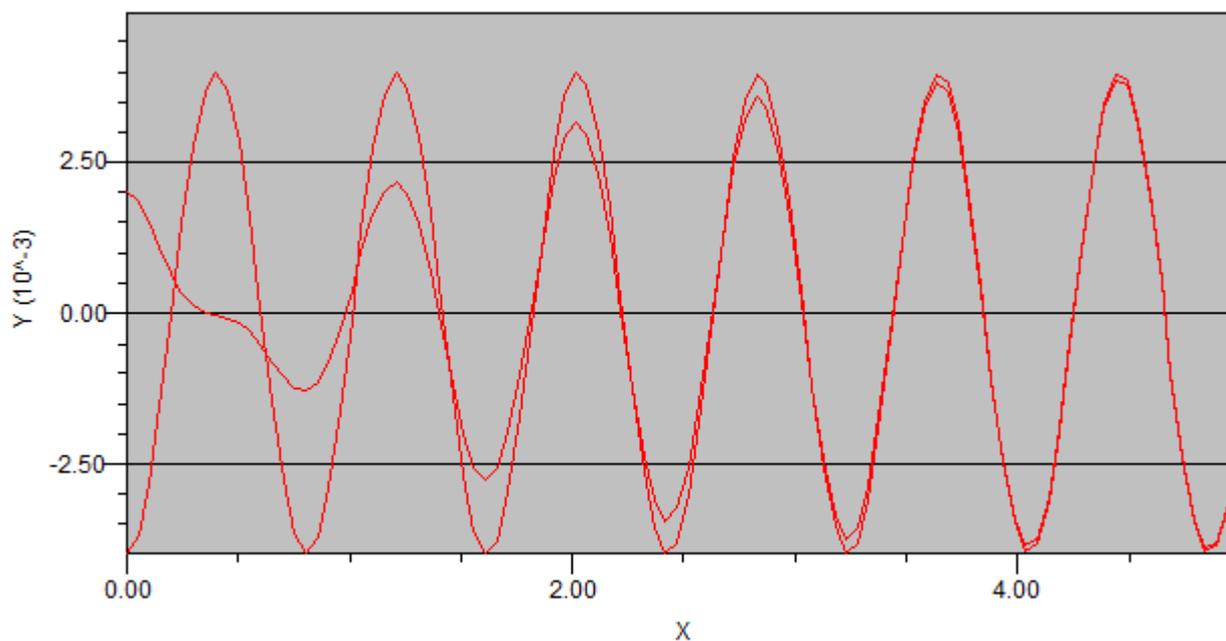
## Vibrações Forçadas Harmônicas – Caso a



$$m = 10^6 \text{ kg} \quad k = 60 * 10^6 \text{ N/m}$$

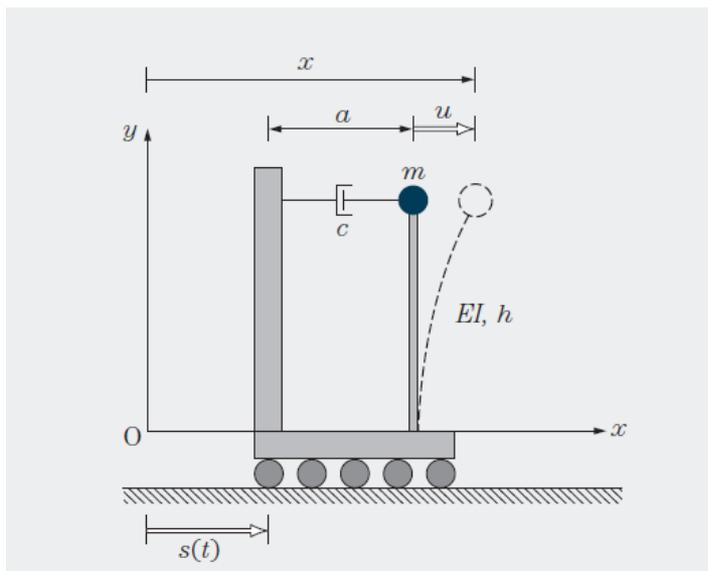
$$\xi = 12.5\% \quad \omega = 7.746 \text{ rd/s} \quad \beta = 1$$

$$[p_0 = 60000 \text{ N}, u_0 = 0.002 \text{ m}, v_0 = 0, 0]$$



# Dinâmica das Estruturas

## VFH - E4 - Excitação de Suporte



$$s(t) = ms_0 \text{sen}(\bar{\omega}t)$$

$$u^t = x - a = s + u$$

$$\dot{u}^t = \dot{s} + \dot{u}$$

$$\ddot{u}^t = \ddot{s} + \ddot{u}$$

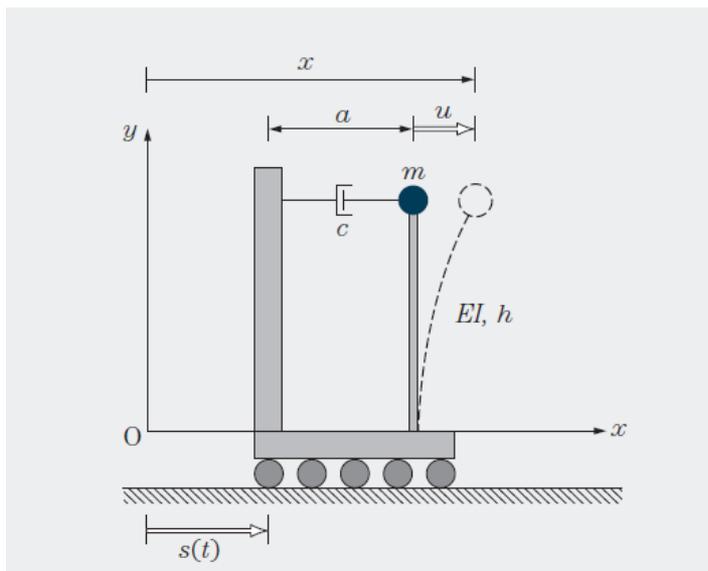
$$m(\ddot{u} + \ddot{s}) + c\dot{u} + ku = 0$$

ou

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{s} = m\bar{\omega}^2 s_0 \text{sen}(\bar{\omega}t)$$

# Dinâmica das Estruturas

## VFH - E4 - Excitação de Suporte



$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \text{sen}(\bar{\omega}t)$$

com

$$p_0 = m\bar{\omega}^2 s_0$$

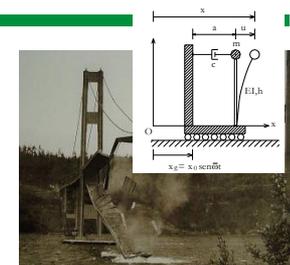
$$s(t) = ms_0 \text{sen}(\bar{\omega}t)$$

$$m = 1 \times 10^6 \text{ kg} , h = 15\text{m} , c = 1,9365 \times 10^6 \text{ Ns/m} , s_0 = 0,01\text{m}$$

$$E = 3 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2} , I = 2,25 \text{ m}^4$$

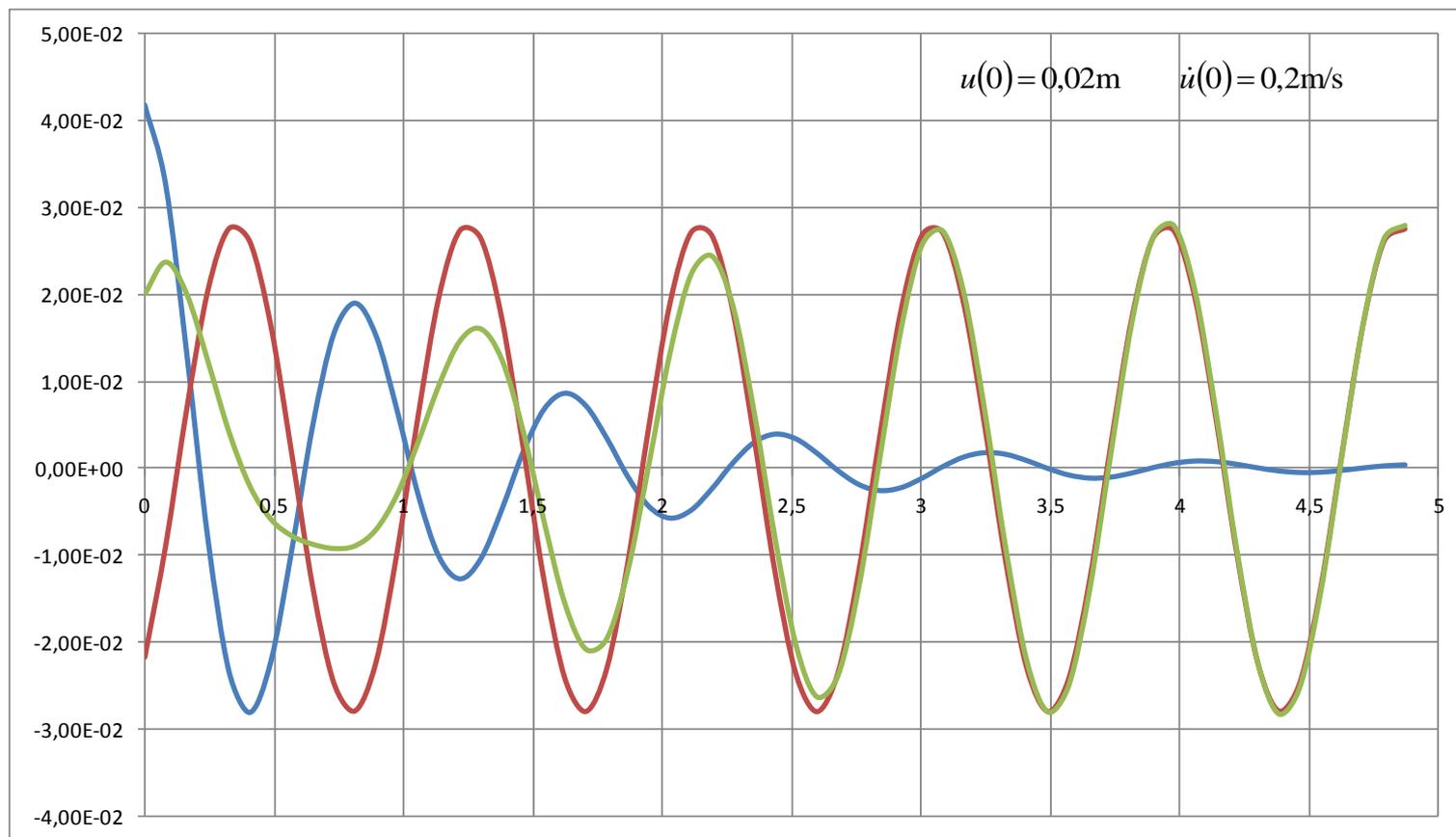
# Dinâmica das Estruturas

## VFH - E4 - Excitação de Suporte



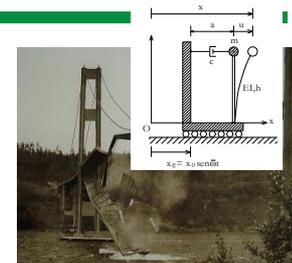
$$\bar{\omega} = 7 \text{ rad/s} , \quad \beta = 0,9037 , \quad p_0 = 4,9 \times 10^5 \text{ N} , \quad u_e = 8,17 \times 10^{-3} \text{ m} ,$$

$$D = 3,437 , \quad \bar{\rho} = 2,81 \times 10^{-2} \text{ m} , \quad F_{max} = 1,68 \times 10^6 \text{ N} , \quad M_{max} = 2,53 \times 10^7 \text{ Nm}$$



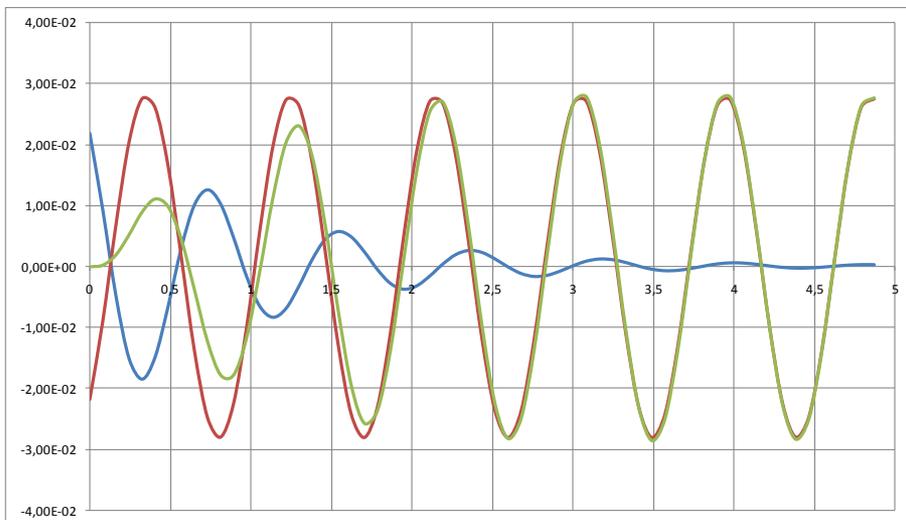
# Dinâmica das Estruturas

## VFH - E4 - Excitação de Suporte

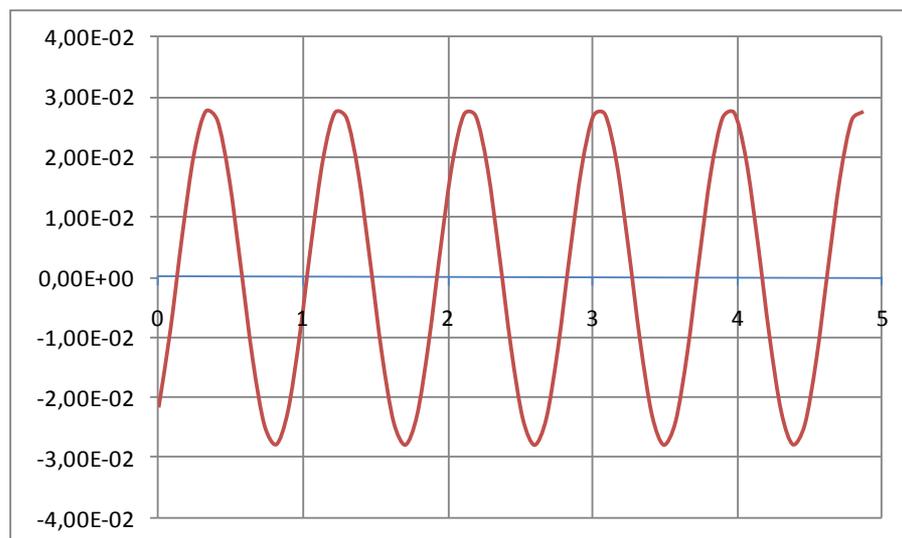


$$\bar{\omega} = 7 \text{ rad/s} , \quad \beta = 0,9037 , \quad p_0 = 4,9 \times 10^5 \text{ N} , \quad u_e = 8,17 \times 10^{-3} \text{ m} ,$$

$$D = 3,437 , \quad \bar{\rho} = 2,81 \times 10^{-2} \text{ m} , \quad F_{max} = 1,68 \times 10^6 \text{ N} , \quad M_{max} = 2,53 \times 10^7 \text{ Nm}$$

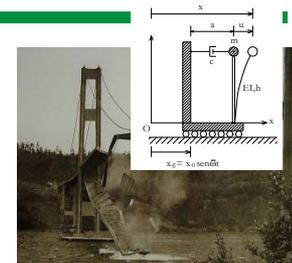


$$u(0) = 0 \quad \dot{u}(0) = 0$$



# Dinâmica das Estruturas

## VFH - E4 - Excitação de Suporte

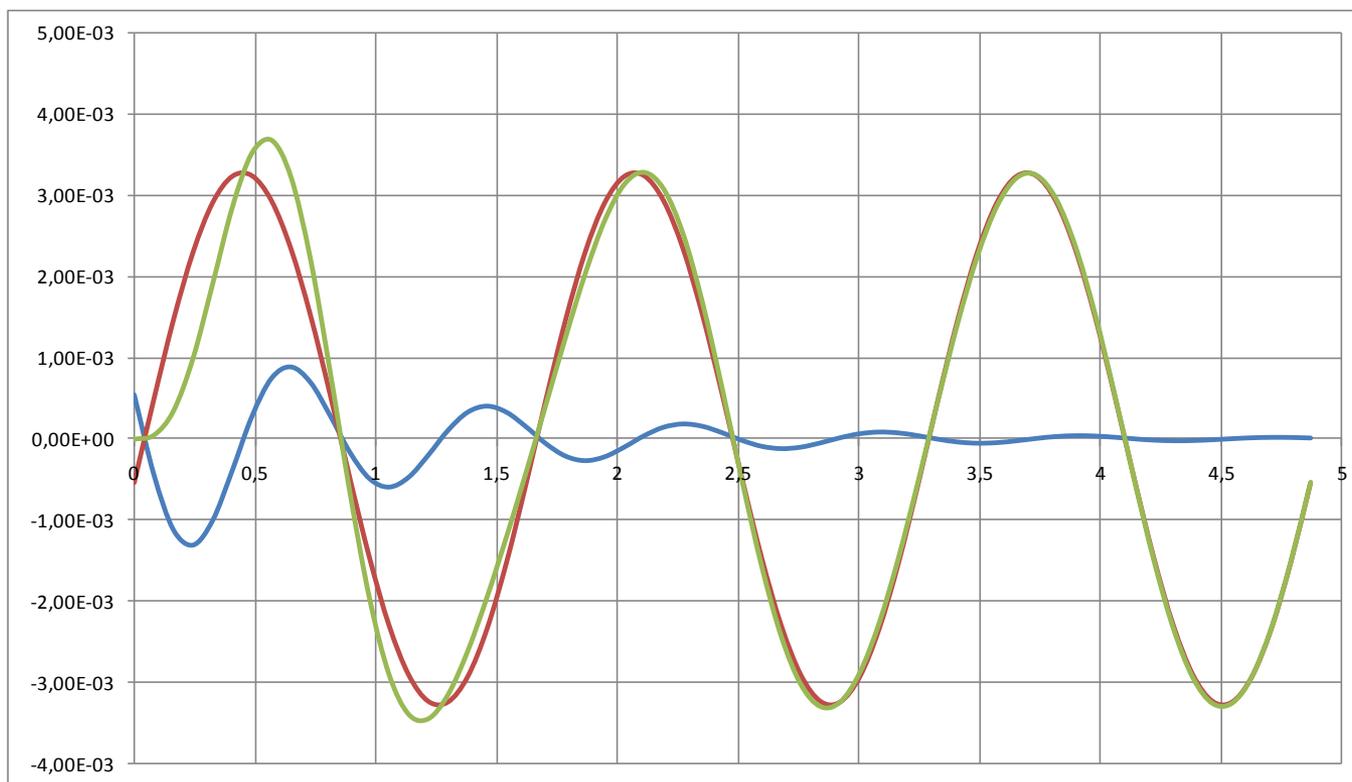


$$\beta = 0.5$$

$$u_{max} = 0,0033m$$

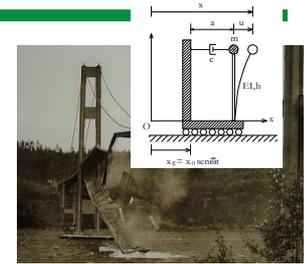
$$u(0) = 0$$

$$\dot{u}(0) = 0$$



# Dinâmica das Estruturas

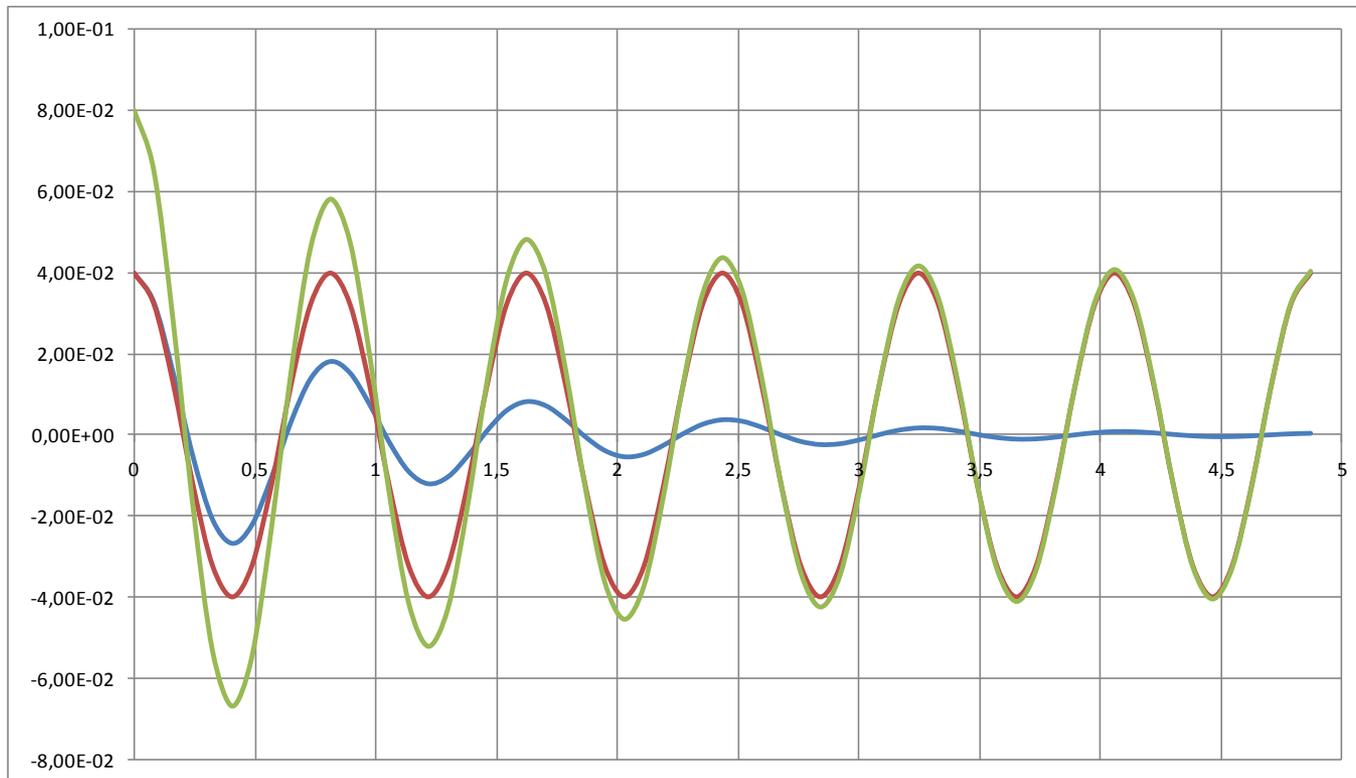
## VFH - E4 - Excitação de Suporte



$$\beta = 1.0$$

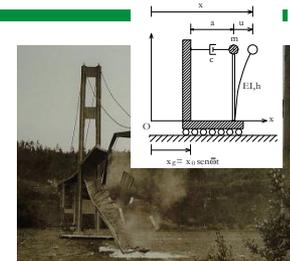
$$u_{\max} = 0,04\text{m}$$

$$u(0) = 0,08\text{m} \quad \dot{u}(0) = 0$$



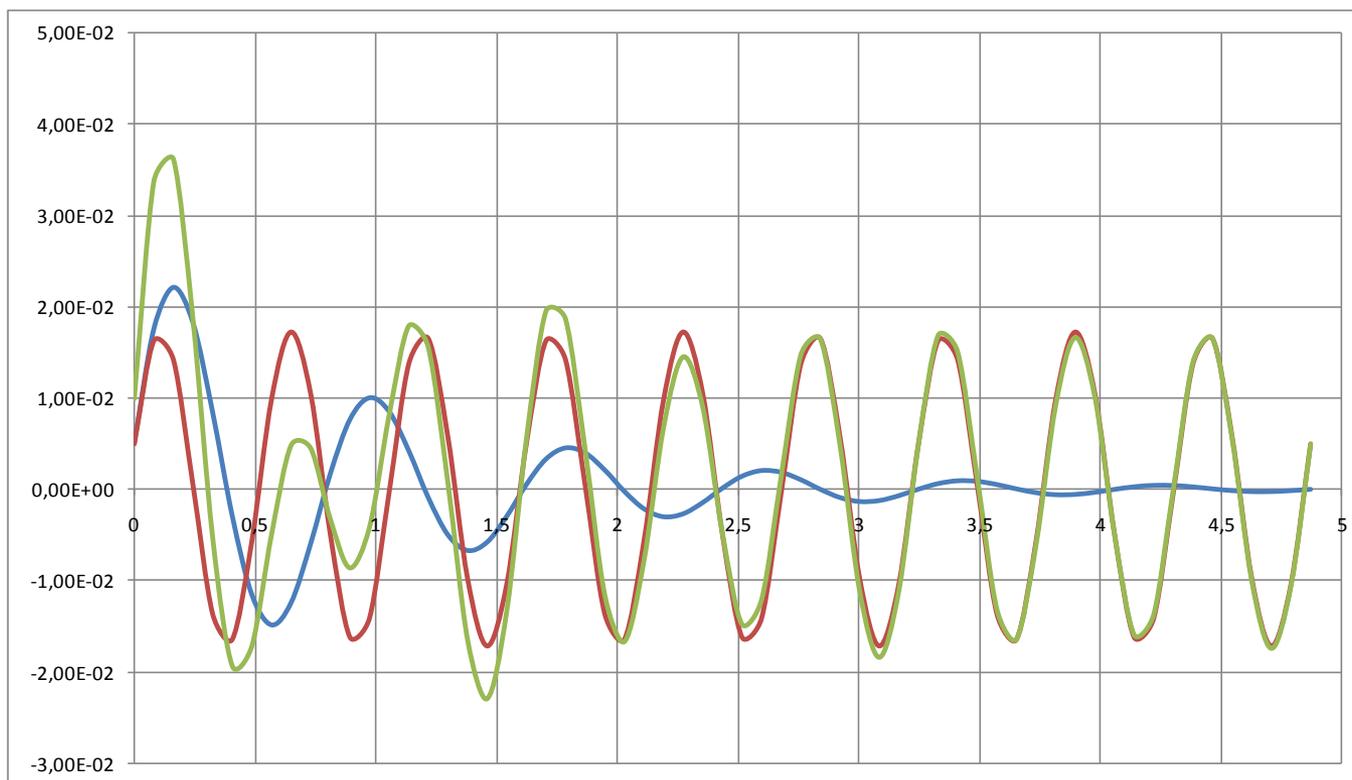
# Dinâmica das Estruturas

## VFH - E4 - Excitação de Suporte



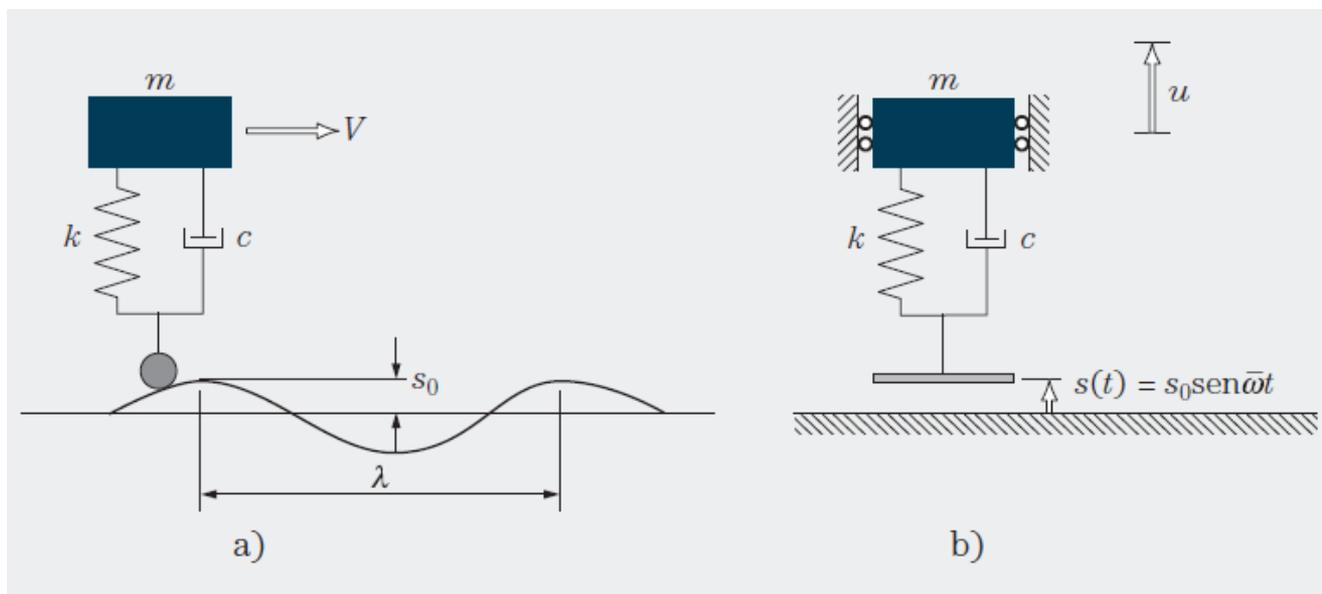
$$\beta = 1.5$$

$$u_{\max} = 0,017\text{m}$$



# Dinâmica das Estruturas

## Vibração Forçada Harmônica – Transmissibilidade

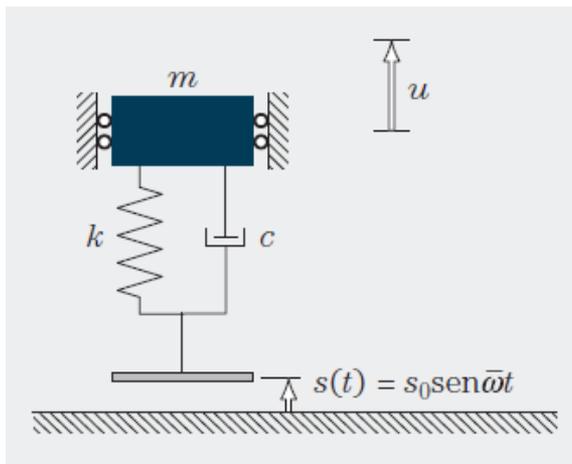


$$u_T(t) = u(t) + s(t)$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = ms_0\bar{\omega}^2 \text{sen}(\bar{\omega}t)$$

# Dinâmica das Estruturas

## Vibração Forçada Harmônica – Transmissibilidade



$$u(t) = \bar{\rho} \text{sen}(\bar{\omega}t - \bar{\theta})$$

$$u_T(t) = u(t) + s(t)$$

$$\bar{\rho} = D \frac{m \bar{\omega}^2 s_0}{k} = D \beta^2 s_0$$

$$\bar{\theta} = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right)$$

$$u_T(t) = \underbrace{\bar{\rho} \text{sen}(\bar{\omega}t - \bar{\theta})}_{\text{regime permanente}} + \underbrace{s_0 \sin(\bar{\omega}t)}_{\text{perfil da estrada}}$$

$$u_T(t) = u_{T \max} \sin(\bar{\omega}t - \hat{\theta})$$

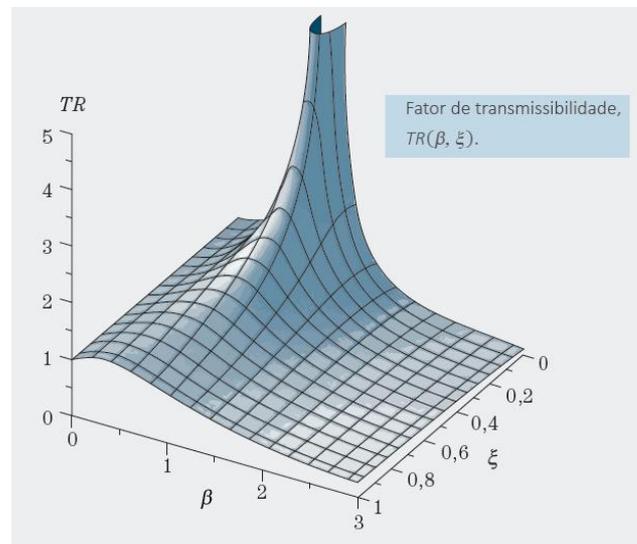
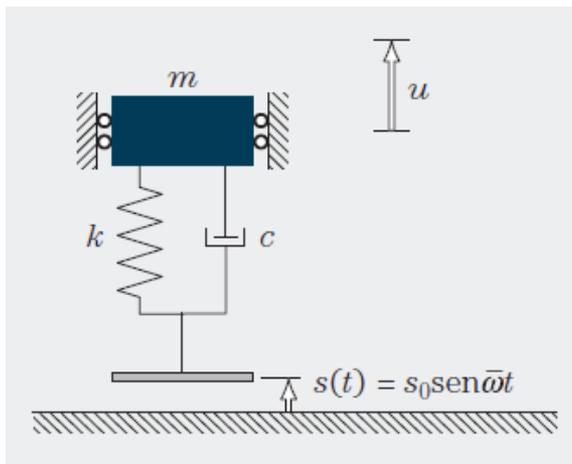
$$u_{T \max} = TR s_0$$

$$TR = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$

$$\hat{\theta} = \arctan\left(\frac{-D\beta^2 \sin \bar{\theta}}{1 + D\beta^2 \cos \bar{\theta}}\right)$$

# Dinâmica das Estruturas

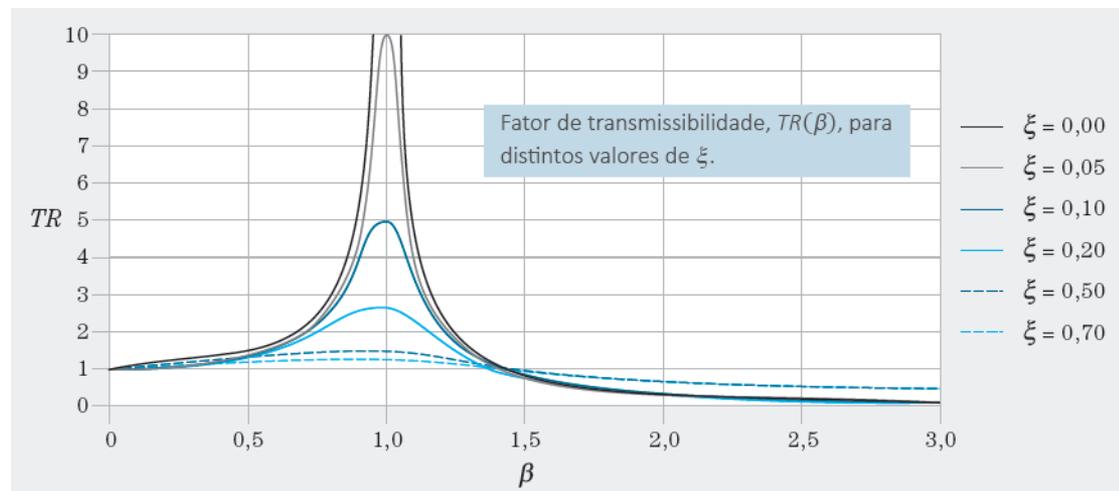
## Vibração Forçada Harmônica – Transmissibilidade



$$u_T(t) = u(t) + s(t)$$

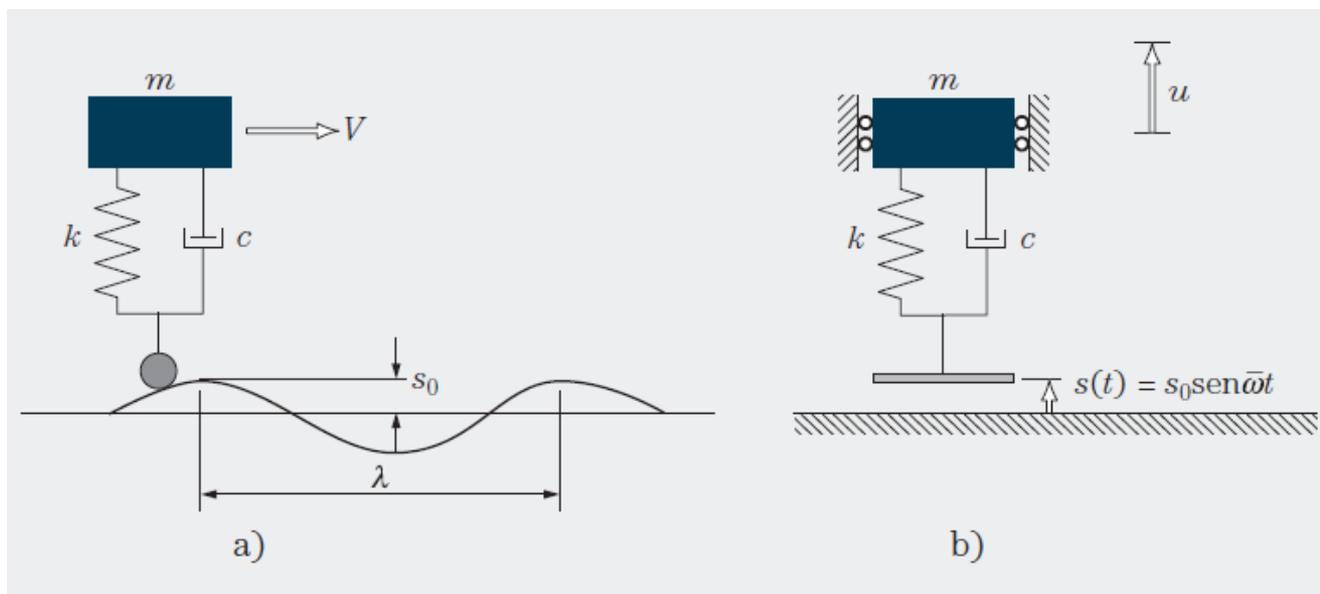
$$u_{T \max} = TR s_0$$

$$TR = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$



# Dinâmica das Estruturas

## Vibração Forçada Harmônica – Transmissibilidade



$$V = 72 \text{ km/h}$$

$$\lambda = 12 \text{ m}$$

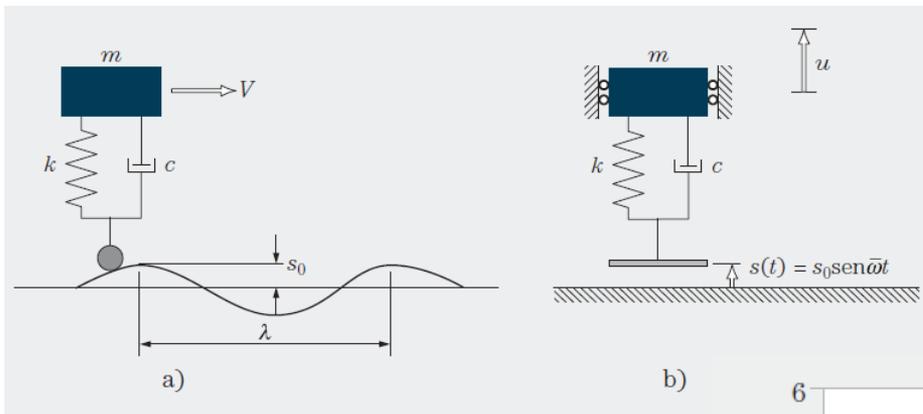
$$s_0 = 0,03 \text{ m}$$

$$k = 1,4865 \times 10^5 \text{ N/m}$$

Determinar  $c$  tal que  $u_{T_{\max}} = 5 \text{ cm}$

# Dinâmica das Estruturas

## Vibração Forçada Harmônica – Transmissibilidade



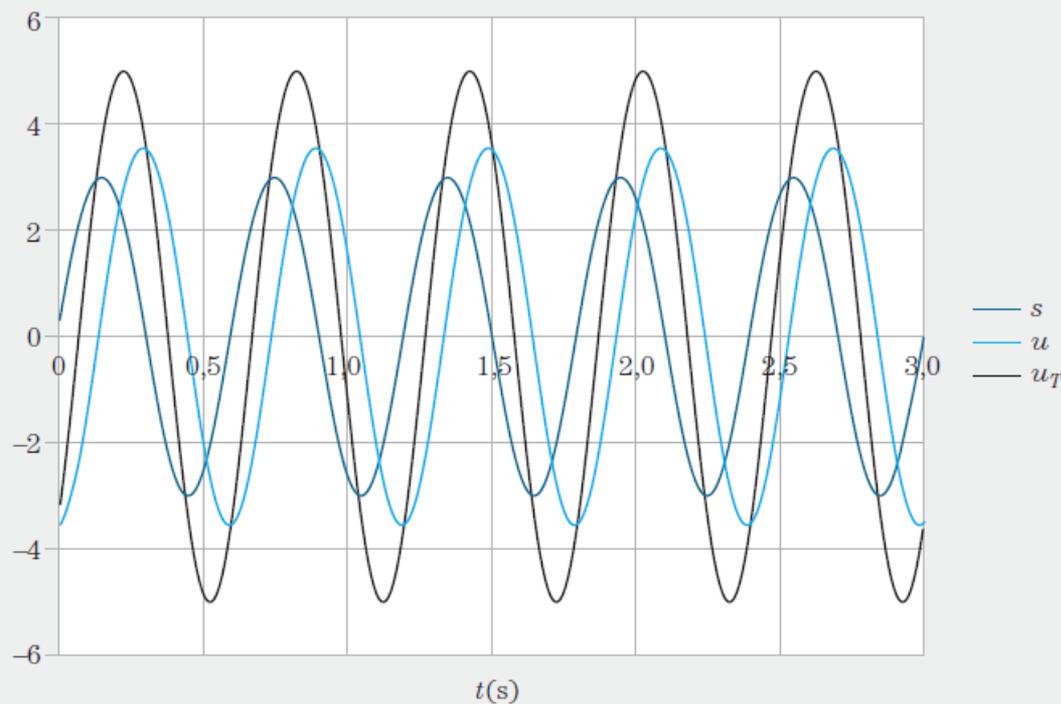
$$\left. \begin{aligned} \bar{T} = 0,6s &\rightarrow \bar{\omega} = 10,472 \text{ rad/s} \\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} &= 11,130 \text{ rad/s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta = 0,941$$

$$\xi = 0,391$$

$$c = 10450 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

$$D = 1,342$$

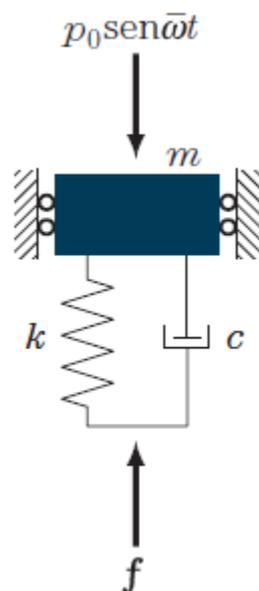
$$\bar{\rho} = 3,56 \text{ cm}$$



# Dinâmica das Estruturas

## Vibração Forçada Harmônica – Transmissibilidade

Sistema de isolamento de uma fundação submetida a carregamento harmônico



$$f_{\text{mola}} = ku = Dp_0 \text{sen}(\bar{\omega}t - \bar{\theta})$$

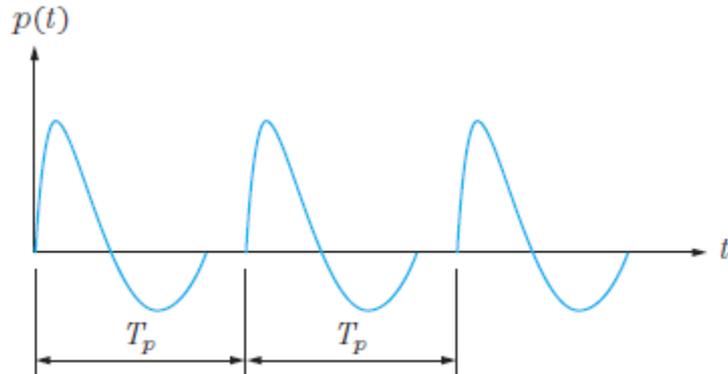
$$f_{\text{amort}} = c\dot{u} = 2\xi\beta Dp_0 \text{cos}(\bar{\omega}t - \bar{\theta}),$$

a máxima força transmitida para as fundações, considerando que há uma defasagem de  $\frac{\pi}{2}$  radianos entre a força elástica e a força de amortecimento, é:

$$f_{\text{max}} = \sqrt{(ku_{\text{max}})^2 + (c\dot{u}_{\text{max}})^2} = \sqrt{(Dp_0)^2 + (2\xi\beta Dp_0)^2} = p_0 D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} = TR p_0.$$

# Dinâmica das Estruturas

## Carregamentos Periódicos



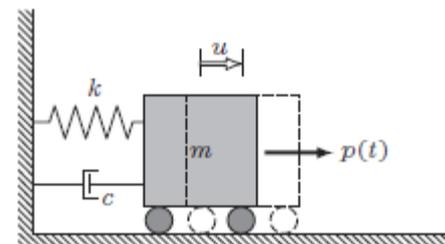
Um carregamento periódico geral pode ser representado por meio de série de Fourier

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \bar{\omega}_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \bar{\omega}_n t,$$

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) dt$$

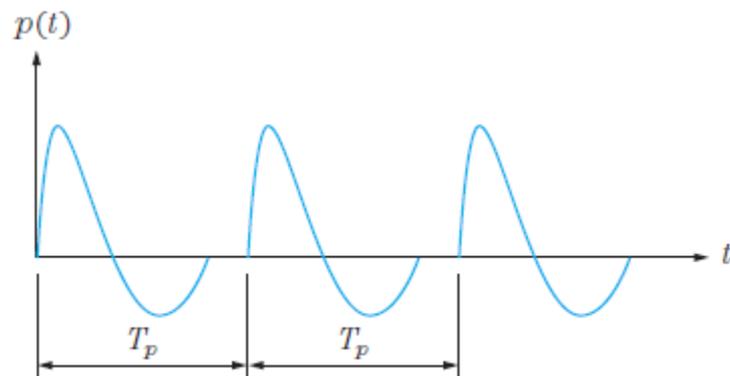
$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cos \bar{\omega}_n t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \text{sen} \bar{\omega}_n t dt$$



# Dinâmica das Estruturas

## Carregamentos Periódicos



$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \bar{\omega}_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \bar{\omega}_n t,$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \bar{\omega}_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \bar{\omega}_n t$$

Para regime permanente

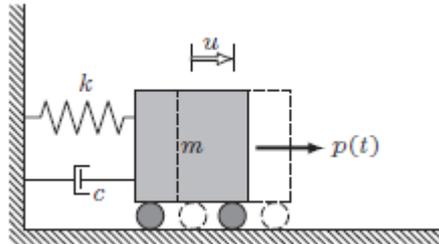
$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} D_n^2 [(1 - \beta_n^2) b_n + (2\xi\beta_n) a_n] \sin \bar{\omega}_n t + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} D_n^2 [(1 - \beta_n^2) a_n - (2\xi\beta_n) b_n] \cos \bar{\omega}_n t$$

$$\beta_n = \frac{\bar{\omega}_n}{\omega} = n \left( \frac{T}{T_p} \right)$$

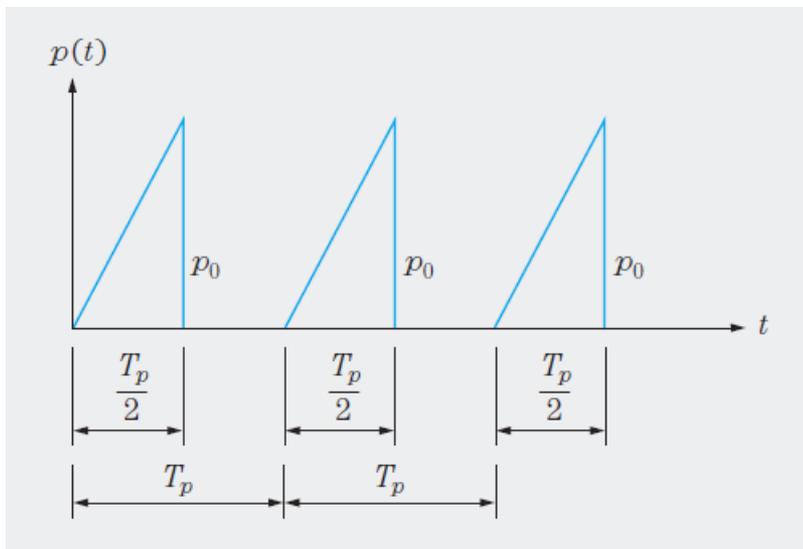
$$D_n = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}}$$

# Dinâmica das Estruturas

## Exemplo: Carregamento Periódico



$$\xi = 0,05$$



$$T = \frac{3}{4} T_p$$



$$\beta_n = \frac{3n}{4}$$

Determinar a resposta dinâmica do oscilador, em regime estacionário, até o quarto harmônico

# Dinâmica das Estruturas

## Exemplo: Carregamento Periódico



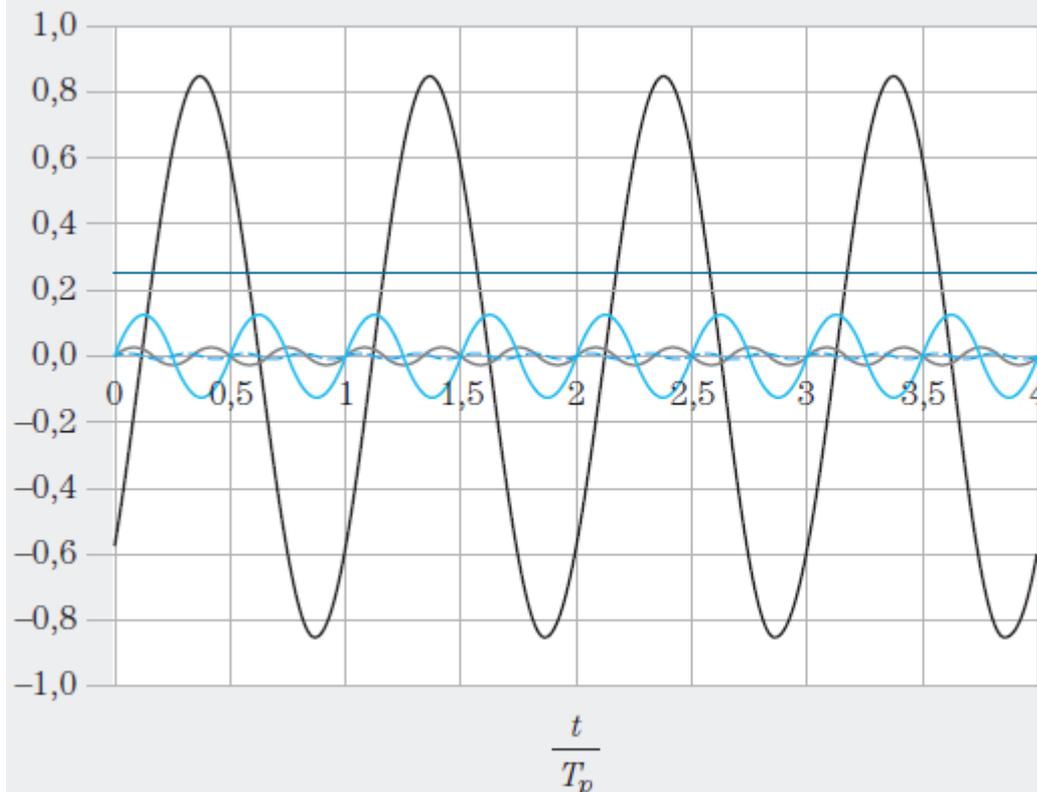
$$r(t) = \frac{u(t)}{\frac{p_0}{k}} = 0,2500 + 0,8501 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{T_p} t - 0,7367 \right) + 0,1264 \operatorname{sen} \left( \frac{4\pi}{T_p} t - 6,1638 \right) + 0,0267 \operatorname{sen} \left( \frac{6\pi}{T_p} t - 3,2954 \right) + 0,0099 \operatorname{sen} \left( \frac{8\pi}{T_p} t - 6,2457 \right).$$

$n$	$\xi$	$\beta_n$	$D_n$	$\left(\frac{1}{p_0}\right)a_n$	$\left(\frac{1}{p_0}\right)b_n$	$\left(\frac{k}{p_0}\right)c_n$	$\bar{\theta}_n$
1	0,05	0,7500	2,2529	-0,2026	0,3183	0,8501	0,7367
2	0,05	1,5000	0,7943	0,0000	-0,1592	0,1264	6,1638
3	0,05	2,2500	0,2458	-0,0225	0,1061	0,0267	3,2954
4	0,05	3,0000	0,1249	0,0000	-0,0796	0,0099	6,2457

# Dinâmica das Estruturas

## Exemplo: Carregamento Periódico

$$r(t) = \frac{u(t)}{\frac{p_0}{k}} = 0,2500 + 0,8501 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T_p}t - 0,7367\right) + 0,1264 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{T_p}t - 6,1638\right) + 0,0267 \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{T_p}t - 3,2954\right) + 0,0099 \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{T_p}t - 6,2457\right).$$

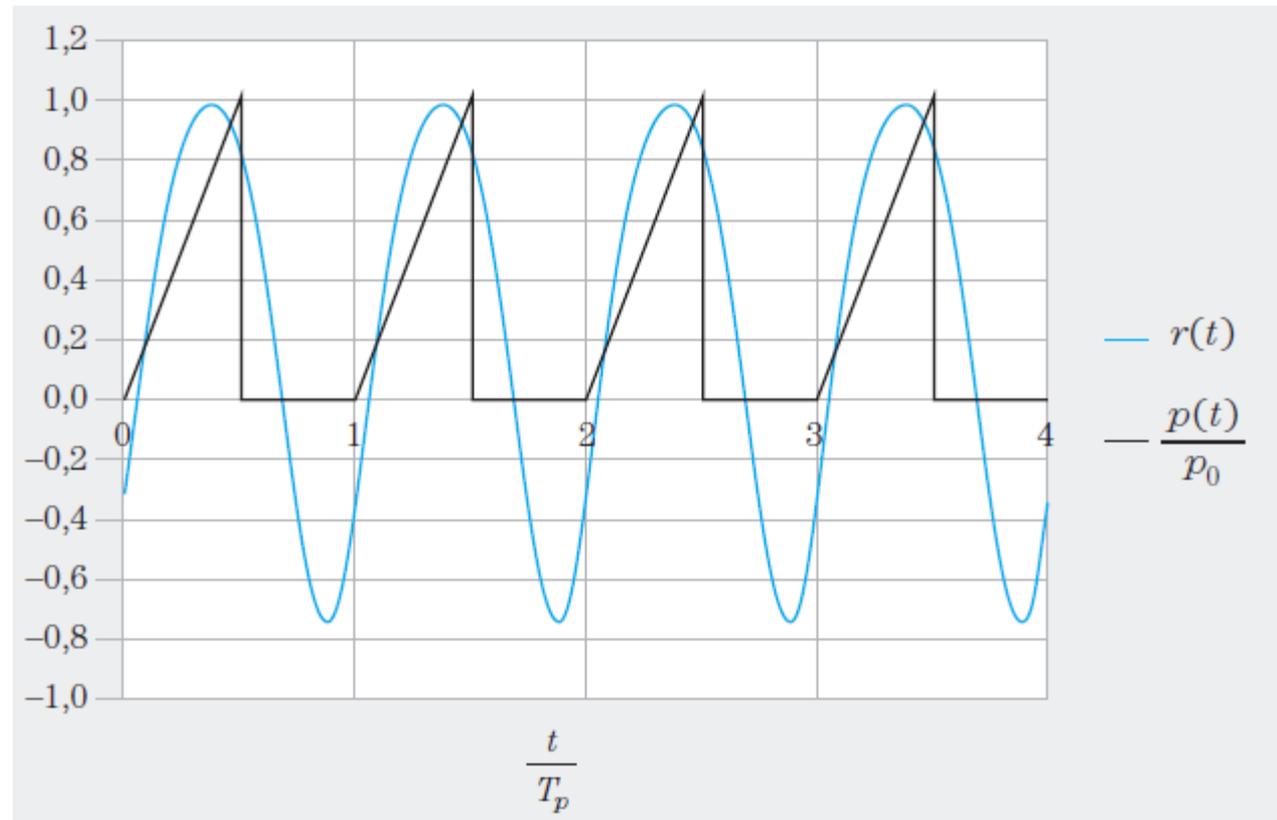


# Dinâmica das Estruturas

## Exemplo: Carregamento Periódico



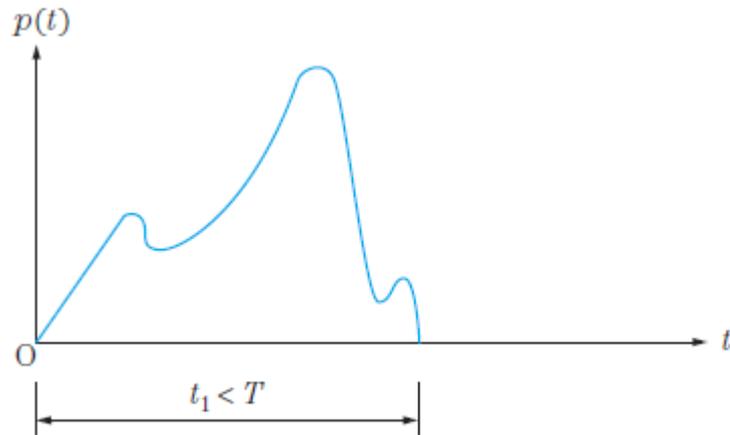
$$r(t) = \frac{u(t)}{\frac{p_0}{k}} = 0,2500 + 0,8501 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T_p}t - 0,7367\right) + 0,1264 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{T_p}t - 6,1638\right) + 0,0267 \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{T_p}t - 3,2954\right) + 0,0099 \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{T_p}t - 6,2457\right).$$



# Dinâmica das Estruturas

## Carregamento Impulsivos

$$t_1 < T$$



$$0 \leq t \leq t_1$$

Fase 1 : Vibrações Forçadas

$$t \geq t_1$$

Fase 2 : Vibrações Livres com  
condições iniciais

$$\begin{cases} u(t_1) = u_1 \\ \dot{u}(t_1) = \dot{u}_1 \end{cases}$$

## Dinâmica das Estruturas

### Carregamento Impulsivo: Pulso Retangular



$$p(t) = p_0 \quad \text{para} \quad t \leq t_1$$

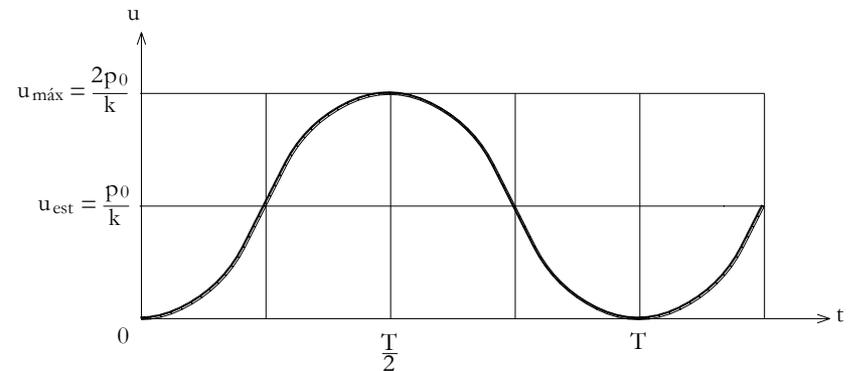
$$p(t) = 0 \quad \text{para} \quad t > t_1$$

- **Fase 1** ( $0 \leq t \leq t_1$ ):

A equação de movimento do sistema não amortecido é  $m\ddot{u} + ku = p_0$ . Para o sistema partindo do repouso ( $u_0 = 0$  e  $\dot{u}_0 = 0$ ), a solução é:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t) = u_e (1 - \cos \omega t),$$

onde  $u_e = \frac{p_0}{k}$ .



## Dinâmica das Estruturas

### Carregamento Impulsivo



Fase 2 : Vibrações Livres

$$P(t) = 0 \quad \text{para} \quad t > t_1$$

$$m\ddot{u} + ku = 0$$

$$\text{c. i. : } \begin{cases} u(t_1) = u_1 \\ \dot{u}(t_1) = \dot{u}_1 \end{cases}$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega(t-t_1)} \rho \mathbf{cos}(\omega_D(t-t_1) - \theta)$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\text{com : } \begin{cases} \rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{u}_1 + \xi\omega u_1}{\omega_D}\right)^2 + (u_1)^2} \\ \theta = \arctg\left(\frac{\dot{u}_1 + \xi\omega u_1}{\omega_D u_1}\right) \end{cases}$$

## Dinâmica das Estruturas

### Carregamento Impulsivo: Pulso Retangular



$$p(t) = p_0 \quad \text{para } t \leq t_1$$

$$p(t) = 0 \quad \text{para } t > t_1$$

- **Fase 2** ( $t > t_1$ ):

Definem-se  $\bar{t} = t - t_1 > 0$  e  $\bar{u}(\bar{t}) = u(t)$ . Escreve-se a equação de movimento como  $m\ddot{\bar{u}} + k\bar{u} = 0$ , com condições iniciais  $\bar{u}(0) = u(t_1)$  e  $\dot{\bar{u}}(0) = \dot{u}(t_1)$ .

$$\bar{u}(\bar{t}) = \bar{\rho} \cos(\omega\bar{t} - \bar{\theta})$$

$$\bar{\rho} = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\omega t_1}{2} \right) u_e = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t_1}{T} \right) u_e$$

$$D = \frac{\bar{\rho}}{u_e} = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t_1}{T} \right)$$

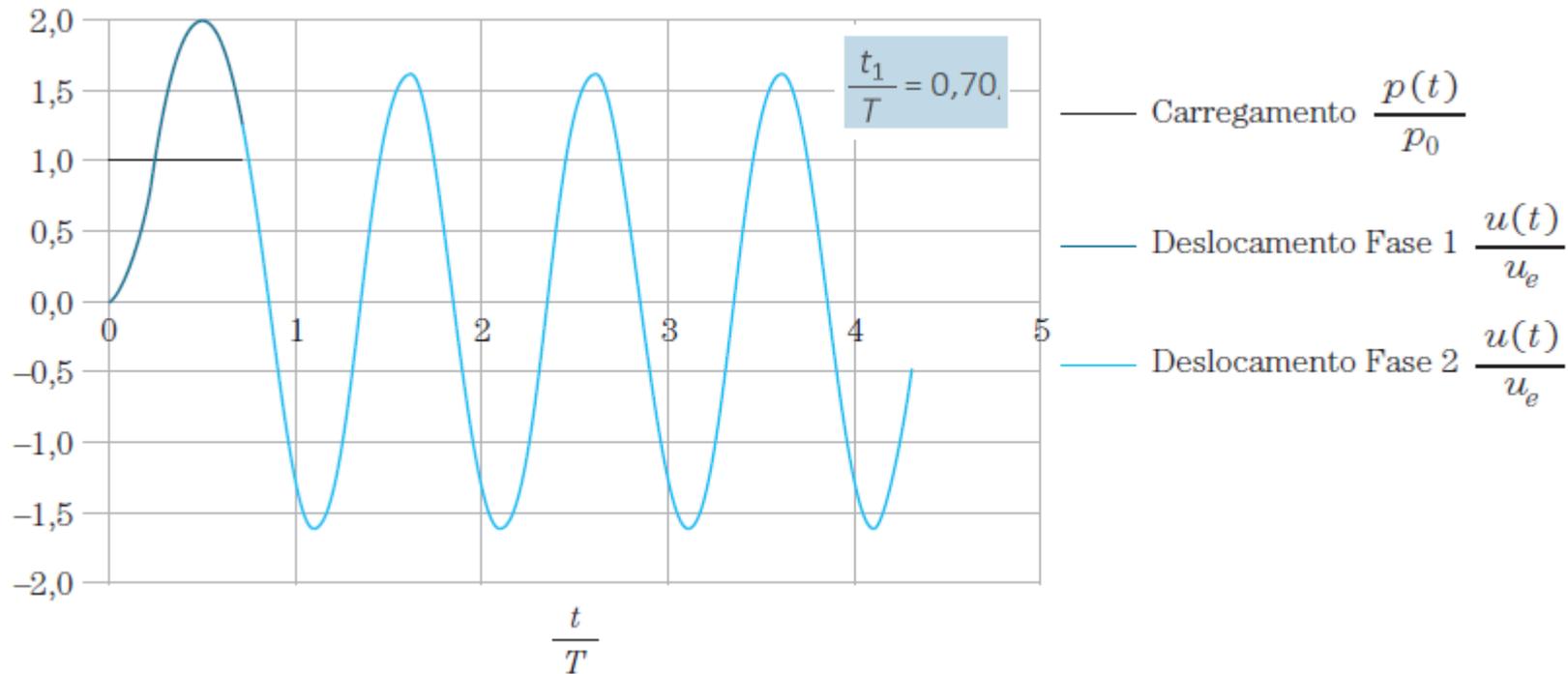
$$\bar{\theta} = \arctan \left( \frac{\operatorname{sen} \omega t_1}{1 - \cos \omega t_1} \right).$$

## Dinâmica das Estruturas

### Carregamento Impulsivo: Pulso Retangular

$$p(t) = p_0 \text{ para } t \leq t_1$$

$$p(t) = 0 \text{ para } t > t_1$$

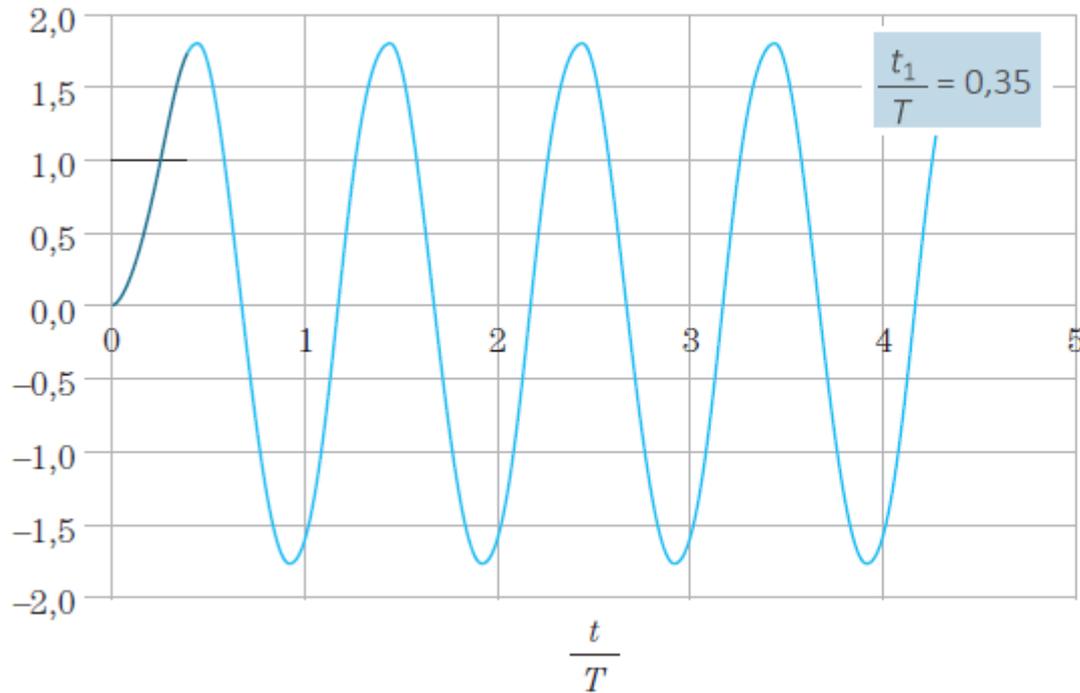


## Dinâmica das Estruturas

### Carregamento Impulsivo: Pulso Retangular

$$p(t) = p_0 \text{ para } t \leq t_1$$

$$p(t) = 0 \text{ para } t > t_1$$



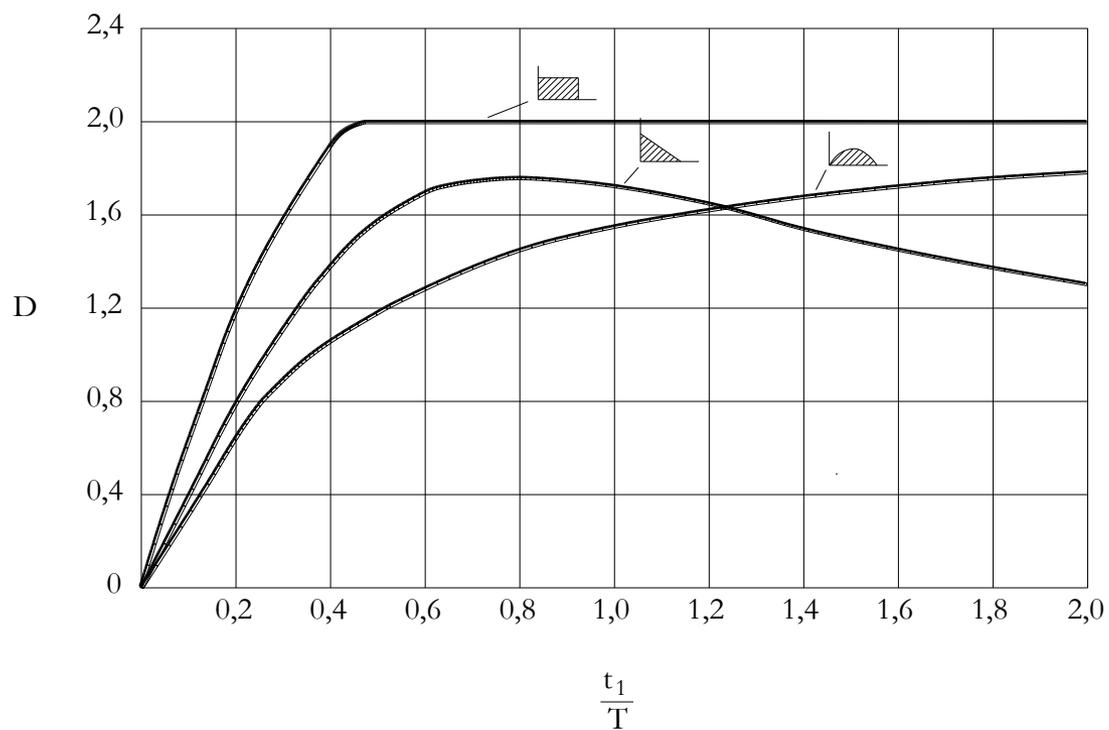
— Carregamento  $\frac{p(t)}{p_0}$

— Deslocamento Fase 1  $\frac{u(t)}{u_e}$

— Deslocamento Fase 2  $\frac{u(t)}{u_e}$

# Dinâmica das Estruturas

## Carregamentos Impulsivos



## Dinâmica das Estruturas

### Carregamento Impulsivo de Curtíssima Duração

$$\frac{t_1}{T} \leq 0.25$$



$$0 \leq t \leq t_1$$

Fase 1 :

$$m\ddot{u} = p(t)$$

$$\text{c. i. : } \begin{cases} u(0) = 0 \\ \dot{u}(0) = 0 \end{cases}$$

$$t \geq t_1$$

Fase 2 : Vibrações Livres com condições iniciais

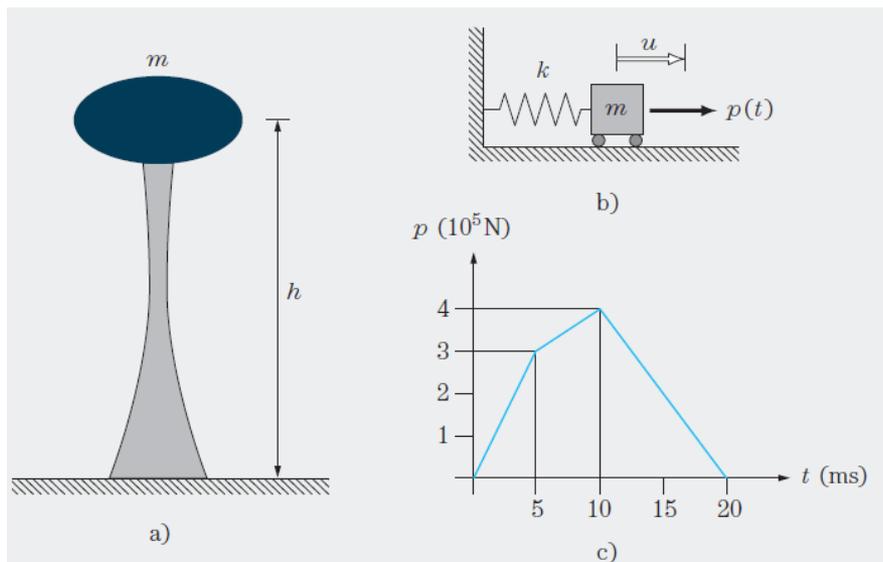
$$\begin{cases} u(t_1) = 0 \\ \dot{u}(t_1) = \dot{u}_1 = \frac{I}{m} \end{cases}$$

$$u(t) = \frac{I}{m\omega_D} e^{-\xi\omega(t-t_1)} \sin(\omega_D(t-t_1))$$

$$u_{m\acute{a}x} = u\left(t_1 + \frac{\pi}{2\omega_D}\right) \approx \frac{I}{m\omega_D} e^{-\frac{\xi\pi}{2}}$$

# Dinâmica das Estruturas

## Exemplo 6: Carregamento Impulsivo de Curtíssima Duração



$$\text{Dados : } \begin{cases} m = 7 * 10^5 \text{ kg} \\ k = 7 * 10^7 \text{ N/m} \\ h = 45\text{m} \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ rd/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.6283 \text{ s}$$

$$\frac{t_1}{T} = 0.0318 \text{ s} < 0.25 \text{ s}$$

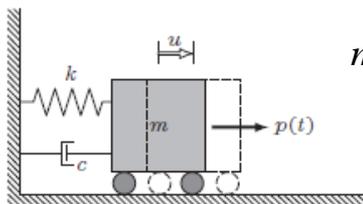
$$u_{\text{máx}} = \frac{I}{m\omega} = 0.000643 \text{ m}$$

$$F_{\text{máx}} = ku_{\text{máx}} = 45 \text{ N}$$

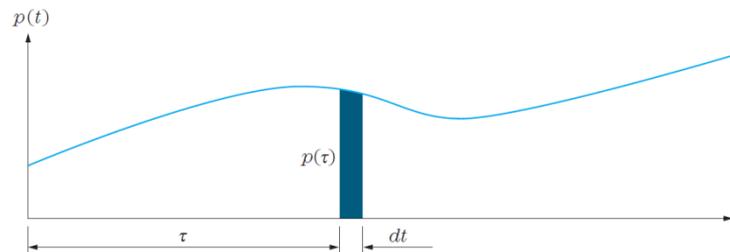
$$M_{\text{máx}} = F_{\text{máx}} h = 2025 \text{ kNm}$$

# Dinâmica das Estruturas

## Carregamentos Dinâmicos Gerais



$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$



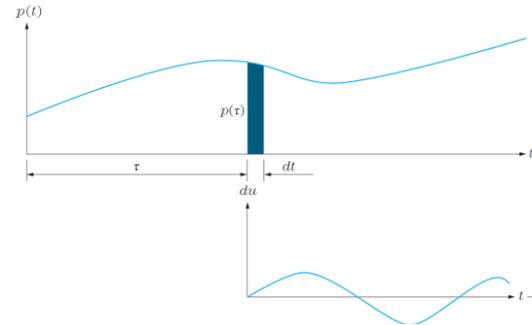
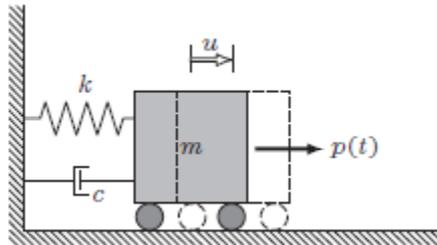
Análise no domínio do tempo	Integração numérica	somatório simples aproximação por funções constantes
		trapezoidal aproximação por funções constantes
		Simpson aproximação por funções quadráticas
	Solução numérica da equação diferencial do movimento	Método de Runge-Kutta de 4a. Ordem
		Método de Euler-Gauss
		Método de Newmark
		Método de Wilson- $\Theta$
Análise no domínio da frequência	Transformada de Fourier	FFT- Transformada Rápida de Fourier

# Dinâmica das Estruturas

## Carregamentos Dinâmicos Gerais



Análise no domínio do tempo Integral de Duhamel



$$du(t) = \frac{p(\tau)d\tau}{m\omega_D} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen}\omega_D(t-\tau), \quad t > \tau.$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left[ \left( \frac{\dot{u}_0 + u_0\xi\omega}{\omega_D} \right) \text{sen}\omega_D t + u_0 \text{cos}\omega_D t \right] + \int_0^t \frac{p(\tau)}{m\omega_D} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen}\omega_D(t-\tau) d\tau.$$

$$u(t) = A(t)\text{sen}\omega_D t - B(t)\text{cos}\omega_D t,$$

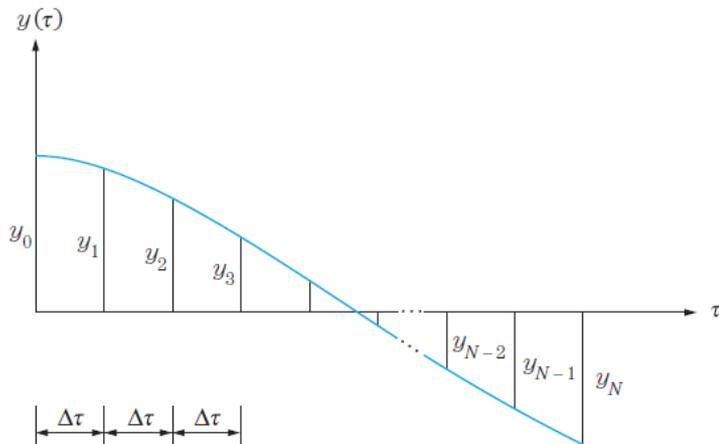
$$A(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{cos}\omega_D \tau d\tau,$$

$$B(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen}\omega_D \tau d\tau,$$

# Dinâmica das Estruturas

## Carregamentos Dinâmicos Gerais

### Integração numérica



- Somatório simples (aproximação por funções constantes)

$$\int_0^t y(\tau) d\tau = \Delta\tau(y_0 + y_1 + \dots + y_{N-1})$$

- Trapezoidal (aproximação por funções lineares)

$$\int_0^t y(\tau) d\tau = \frac{\Delta\tau}{2}(y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{N-1} + y_N)$$

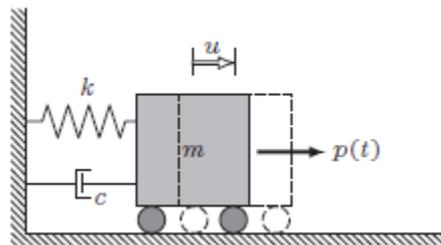
- Simpson (aproximação por funções quadráticas)

$$\int_0^t y(\tau) d\tau = \frac{\Delta\tau}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 4y_{N-1} + y_N)$$

# Dinâmica das Estruturas

## Carregamentos Dinâmicos Gerais

### Análise no domínio do tempo Integral de Duhamel



$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \text{sen}(\bar{\omega}t)$$

$$m = 1200\text{kg} \quad c = 10450 \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \quad k = 148650 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad p_0 = 3948\text{N} \quad \bar{\omega} = 10,472 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

ui					
ti (s)	Ai	Bi	Simpson	exata	erro
1,46	0,005942	0,041554	0,034375	0,034409	-0,10%
1,48	0,003958	0,039246	0,035552	0,035593	-0,11%
1,50	0,003067	0,036264	0,035177	0,035221	-0,12%
ui					
ti (s)	Ai	Bi	Simpson	exata	erro
1,46	0,00594	0,04155	0,03438	0,03441	-0,09%
1,48	0,00396	0,03925	0,03550	0,03559	-0,25%
1,50	0,00307	0,03626	0,03518	0,03522	-0,11%
ui					
ti (s)	Ai	Bi	Simpson	exata	erro
1,46	0,0059	0,0416	0,0344	0,0344	0,00%
1,48	0,0040	0,0392	0,0356	0,0356	0,00%
1,50	0,0031	0,0363	0,0352	0,0352	0,00%

# Dinâmica das Estruturas

## Carregamentos Dinâmicos Gerais

### Análise no domínio do tempo

Solução numérica da equação diferencial do movimento – Método de Euler-Gauss



### Hipóteses:

- Tempo discretizado em intervalos de duração  $\Delta t$  constante
- Considera-se um intervalo de tempo  $\Delta t$  entre os instantes

$$t_i = i\Delta t \text{ e } t_{i+1} = (i+1)\Delta t$$

- Admite-se que são conhecidos  $u_i$   $\dot{u}_i$   $\ddot{u}_i$  no instante  $t_i$
- Deseja-se determinar  $u_{i+1}$   $\dot{u}_{i+1}$   $\ddot{u}_{i+1}$  em um certo

instante  $t_{i+1}$

- Admite-se nesse intervalo que a aceleração seja constante

e igual à média  $\frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}}{2}$

# Dinâmica das Estruturas

## Carregamentos Dinâmicos Gerais

### Análise no domínio do tempo

Solução numérica da equação diferencial do movimento – Método de Euler-Gauss



$$t_i \leq t \leq t_{i+1} \Rightarrow a = \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} \quad \text{Movimento uniformemente acelerado}$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \Rightarrow \begin{cases} \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} \Delta t \\ u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} \Delta t^2 \end{cases}$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{4}{\Delta t^2} (u_{i+1} - u_i) - \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_i \Delta t - \ddot{u}_i$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_{i+1}$$

# Dinâmica das Estruturas

## Carregamentos Dinâmicos Gerais

### Análise no domínio do tempo

Solução numérica da equação diferencial do movimento – Método de Euler-Gauss



$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = p_{i+1} \quad \text{com}$$
$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{4}{\Delta t^2}(u_{i+1} - u_i) - \frac{4}{\Delta t}\dot{u}_i\Delta t - \ddot{u}_i$$
$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_{i+1}$$

$$\hat{k}u_{i+1} = \hat{R}_{i+1}$$

$$\hat{k} = k + \frac{4}{\Delta t^2}m + \frac{2}{\Delta t}c$$

$$\hat{R}_{i+1} = p_{i+1} + m\left(\frac{4}{\Delta t^2}u_i + \frac{4}{\Delta t}\dot{u}_i + \ddot{u}_i\right) + c\left(\frac{2}{\Delta t}u_i + \dot{u}_i\right)$$

# Dinâmica das Estruturas

## Carregamentos Dinâmicos Gerais

### Análise no domínio do tempo

Solução numérica da equação diferencial do movimento – Método de Euler-Gauss



Método de Euler- Gauss é incondicionalmente estável

$$\text{Recomenda-se: } \Delta t = \frac{T^*}{20} \quad T^* = \min(T, \bar{T})$$

$$t_0 \Rightarrow \begin{cases} u_0 \\ \dot{u}_0 \\ \ddot{u}_0 = \frac{p_0}{m} - \frac{k}{m}u_0 - \frac{c}{m}\dot{u}_0 \end{cases}$$

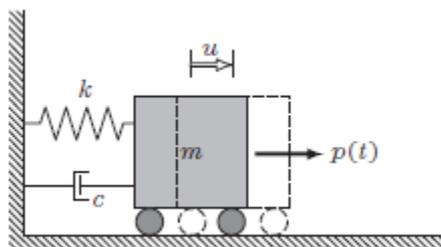
$$\hat{k}u_{i+1} = \hat{R}_{i+1}$$
$$\hat{k} = k + \frac{4}{\Delta t^2}m + \frac{2}{\Delta t}c$$
$$\hat{R}_{i+1} = p_{i+1} + m\left(\frac{4}{\Delta t^2}u_i + \frac{4}{\Delta t}\dot{u}_i + \ddot{u}_i\right) + c\left(\frac{2}{\Delta t}u_i + \dot{u}_i\right)$$

# Dinâmica das Estruturas

## Carregamentos Dinâmicos Gerais

### Análise no domínio do tempo

Solução numérica da equação diferencial do movimento – Método de Euler-Gauss



$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \text{sen}(\bar{\omega}t)$$

$$m = 1200\text{kg} \quad c = 10450 \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \quad k = 148650 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad p_0 = 3948\text{N} \quad \bar{\omega} = 10,472 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Tabela 9.3 – Resultados obtidos pelo método de Euler-Gauss com  $\Delta t = 0,03 \text{ s}$

$t(\text{s})$	$u(\text{m})$	$\dot{u}(\text{ms}^{-1})$	$\ddot{u}(\text{ms}^{-2})$	$\hat{k}(\text{Nm}^{-1})$	$\hat{R}(\text{N})$
0	0	0	0	6178650	1220
0,03	0,000197	0,013164	0,877575	6178650	6808
0,06	0,001102	0,047131	1,386894	6178650	19536
0,09	0,003162	0,090201	1,484492	6178650	39977
0,12	0,006470	0,130354	1,192323	6178650	66613
0,15	0,010781	0,157042	0,586914	6178650	96237
0,18	0,015576	0,162599	-0,216442	6178650	124571
0,21	0,020162	0,143120	-1,082188	6178650	146991
0,24	0,023790	0,098785	-1,873455	6178650	159264
0,27	0,025777	0,033643	-2,469391	6178650	158204
0,30	0,025605	-0,045086	-2,779199	6178650	142157

$$T = 0,56\text{s}$$

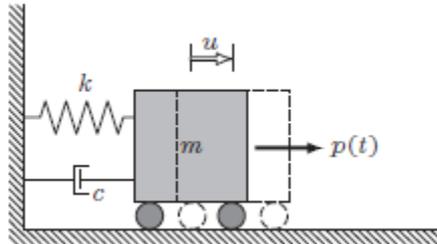
$$\bar{T} = 0,60\text{s}$$

# Dinâmica das Estruturas

## Carregamentos Dinâmicos Gerais

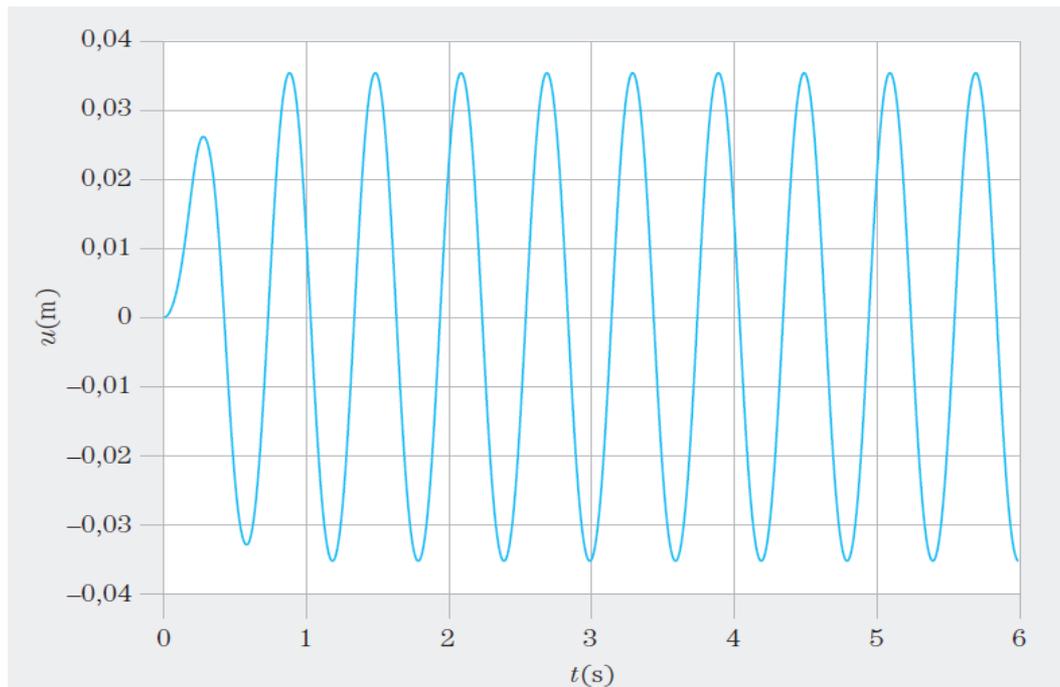
### Análise no domínio do tempo

Solução numérica da equação diferencial do movimento – Método de Euler-Gauss



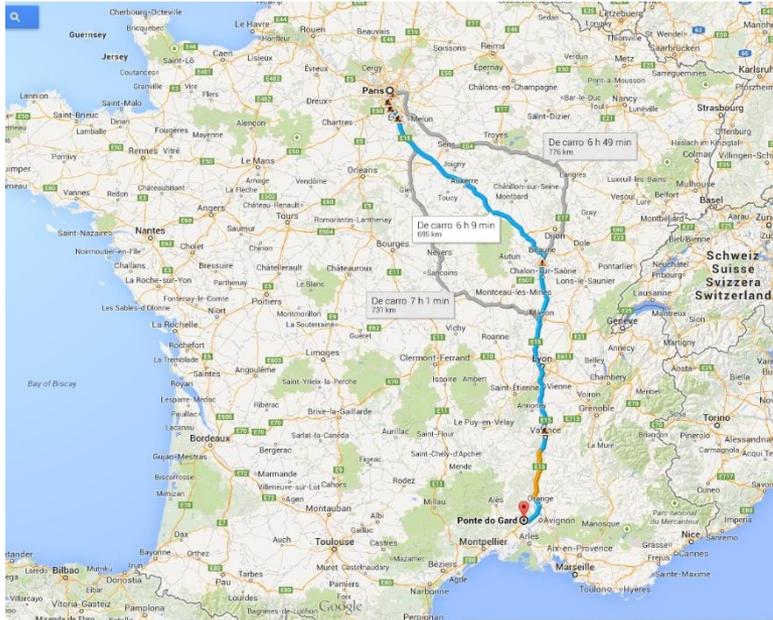
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \text{sen}(\bar{\omega}t)$$

$$m = 1200\text{kg} \quad c = 10450 \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \quad k = 148650 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad p_0 = 3948\text{N} \quad \bar{\omega} = 10,472 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



# Dinâmica das Estruturas

## Pont du Gard, Remoulins, França



## Ponte do Gard

Aqueduto na França

A ponte do Gard é uma porção de um aqueduto romano situado no sul da França, perto de Remoulins, Uzès e Nîmes. [Wikipédia](#)

**Endereço:** 400 Route du Pont du Gard, 30210 Vers-Pont-du-Gard, França

**Comprimento total:** 274 m

**Altura:** 49 m

**Inauguração:** 60 d.C.

**Localização:** Vers-Pont-du-Gard

**Engenheiro:** Henri Pitot

**Arquiteto:** Henri Pitot