ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecatrônica
Sistemas Dinâmicos II para Mecatrônica
Profa. Larissa Driemeier

Lista II de Exercícios

Transformada de Fourier

1. Considere os sinais abaixo. Calcule a Transformada de Fourier (TF), construa os diagramas de módulo e fase em função da frequência. Considere frequência positiva e negativa.

   a. $u(t)$

   b. $e^{-at}u(t)$, a real e positivo

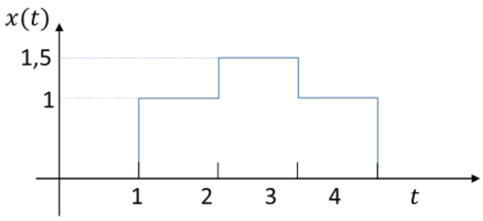
      OBS.: O que acontece quando $a \to 0$?

   c. $e^{-a|t|}u(t)$, a real e positivo

   d. $\delta(t-8)$

   e. $e^{(-1+2j)t}u(t)$

2. Use as propriedades da linearidade e translação para resolver o exercício abaixo.



3. Calcule a Transformada de Fourier de um pulso triangular.

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{\tau} & \text{se } |t| < \tau \\ 0 & \text{se } |t| > \tau \end{cases}$$

4. Da solução do exercício 1, sabemos que, se

$$x(t) = e^{-2|t|}$$

então

$$X(\omega) = \frac{4}{4+\omega^2}$$

Então, usando as propriedades de linearidade e dualidade, obtenha a Transformada de Fourier dos sinais:

   a. $y(t) = \frac{1}{4+t^2}$
   b. $z(t) = \frac{1}{4+t^2}\cos 2t$

5. Obtenha a transformada de Fourier,
   a. De um impulso unitário $\delta(t)$;
   b. Da função degrau $u(t)$, a partir da definição $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)$
   c. A partir do item b, derive a resposta e recupere a solução do item a.

6. Considere o sinal $x(t)$, que consiste em um único impulso retangular de altura unitária, simétrico em relação à origem e de largura total T_1.
   a. Esboce $x(t)$.
   b. Esboce $y(t)$, que é uma repetição periódica de $x(t)$ com período $T_0 = 3T_1/2$.
   c. Calcule a transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$. Esboce o módulo $|X(\omega)|$ para $|\omega| \leq 6\pi/T_1$.
   d. Calcule os coeficientes a_k da série de Fourier de $y(t)$. Esboce a_k para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.
   e. Usando suas respostas para c,d, verifique se, para este exemplo,

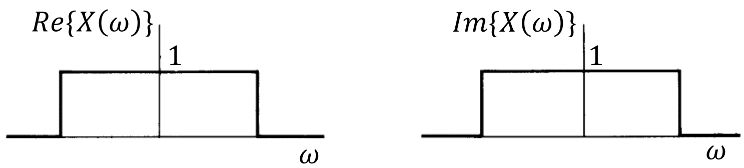
$$a_k = \frac{1}{T_0} X(\omega)\bigg|_{\omega = 2\pi k/T_0}$$

7. Considerando a equação de análise de Fourier ou a equação de síntese, mostre a validade em geral de cada uma das seguintes afirmações sobre $x(t)$ e seu conjugado $x^*(t)$:
   a. Se $x(t)$ é valor real, então $X(\omega) = X^*(-\omega)$.
   b. Se $x(t) = x^*(-t)$, então $X(\omega)$ é real.

   Usando as declarações dos itens a, b, mostre a validade de cada uma das seguintes afirmações:

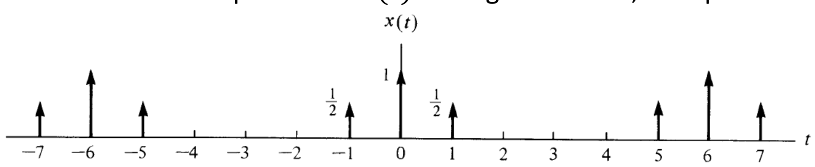
   c. Se $x(t)$ é real e par, então $X(\omega)$ é real e par.
   d. Se $x(t)$ é real e ímpar, então $X(\omega)$ é imaginário e ímpar.

8. A Figura mostra as partes reais e imaginárias da transformada de Fourier de um sinal $x(t)$.



   a. Esboce os gráficos de magnitude e fase.
   b. Aprendemos, no exercício anterior que, em geral, se $x(t)$ é real, então $X(\omega) = X^*(-\omega)$. Determine se $x(t)$ é real.

9. Considere o sinal periódico $x(t)$ da figura abaixo, composto de funções impulso.



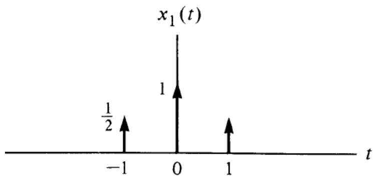
   a. Qual o período fundamental T_0?

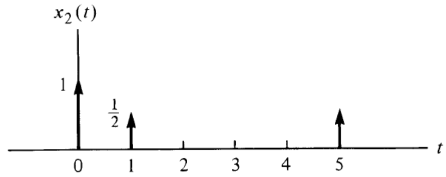
b. Encontre a série de Fourier para $x(t)$.
c. Encontre a transformada de Fourier dos sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da figura a seguir.
d. Verifique se o sinal $x(t)$ pode ser expresso como uma repetição periódica dos sinais dos sinais $x_1(t)$ ou $x_2(t)$, i.é,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(t)(t - kT_1)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(t)(t - kT_2)$$

Determine T_1 e T_2 e mostre graficamente que as equações acima são válidas.
e. Verifique que a série de Fourier de $x(t)$ é composta de amostras escalonadas das transformadas de Fourier $X_1(\omega)$ e $X_2(\omega)$.





f. Qual seria a transformada de Fourier do sinal periódico $x(t)$? Qual a diferença entre a resposta da Transformada de Fourier e da Série de Fourier para um sinal periódico?

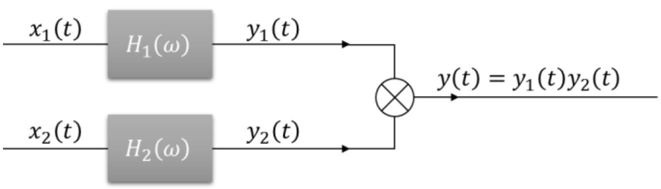
10. Determine a resposta do sistema linear e invariante no tempo com resposta impulsiva:

$$h(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

ao sinal de entrada:

$$x(t) = e^{-bt}u(t), \quad b > 0$$

11. Os sinais $x_1(t) = 10^4 \operatorname{rect}(10^4 t)$ e $x_2(t) = \delta(t)$ são aplicados às entradas dos filtros passa-baixa ideais $H_1(\omega) = \operatorname{rect}(\omega/40000\pi)$ e $H_2(\omega) = \operatorname{rect}(\omega/40000\pi)$, conforme figura abaixo. As saídas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são multiplicadas para obter o sinal $y(t) = y_1(t)y_2(t)$.



Pergunta-se:

a. Trace $X_1(\omega)$ e $X_2(\omega)$.
b. Trace $H_1(\omega)$ e $H_2(\omega)$.
c. Trace $Y_1(\omega)$ e $Y_2(\omega)$.

12. Considere um SLIT descrito pela seguinte equação diferencial,

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 4\frac{dx(t)}{dt} - x(t)$$

Mostre que a Transformada de Fourier $Y(\omega)$ pode ser escrita como $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ e encontre $H(\omega)$.

Referências

Os exercícios aqui apresentados foram extraídos e adaptados das seguintes fontes:

[1] Bombois, X. *Signal analyses* http://www.dcsc.tudelft.nl/~xbombois/SR3exercises.pdf

[2] Cuff, P. *Signal analyses* https://www.princeton.edu/~cuff/ele301/files/lecture8_2.pdf

[3] Lathi, B.P. *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª edição, Bookman, 2007.

[4] Oppenheim, A.V. *Signals and Systems*, http://ocw.mit.edu