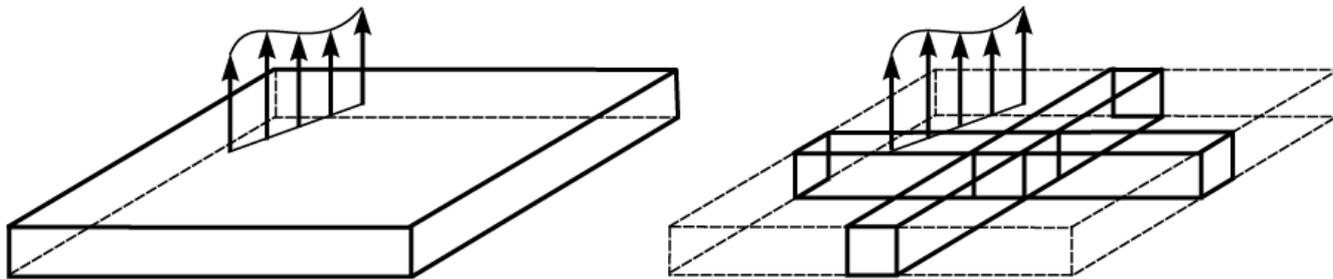


# Teoria de Placa de Kirchhoff

# Comportamento

O modelo estudado é caracterizado geometricamente como uma placa delgada e com um carregamento atuando transversalmente à superfície média dessa placa.

A flexão de uma placa que resiste à carga transversal pode ser interpretada de forma simplificada por meio de barras que se dispõem ortogonalmente uma à outra.

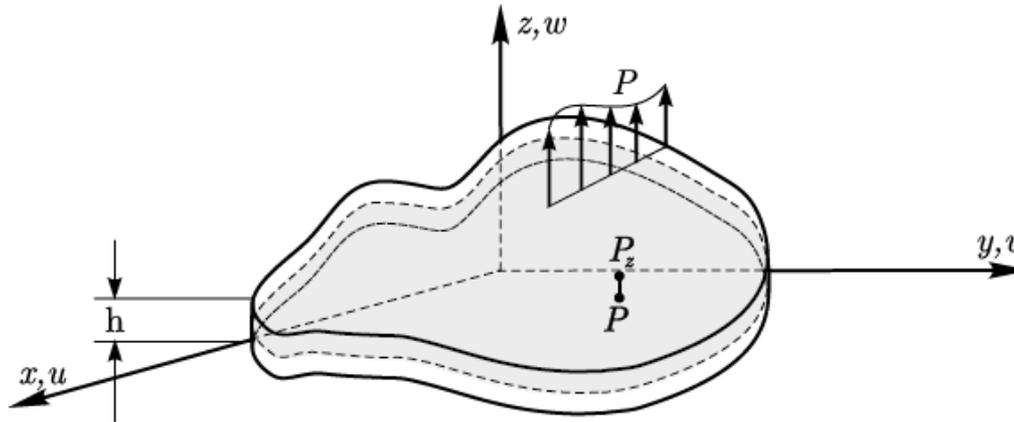


# Modelo de Placa de Kirchhoff

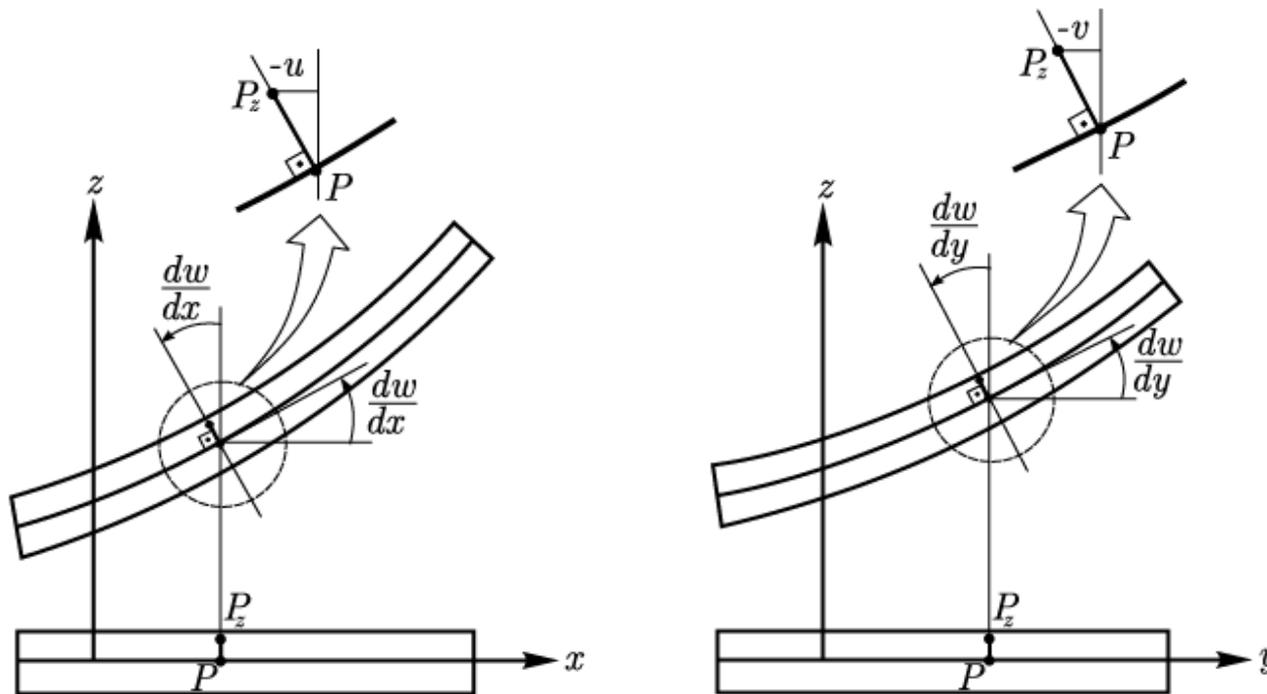
## Cinemática:

- Fibras retilíneas inicialmente ortogonais à superfície média da placa permanecem retilíneas e ortogonais à superfície média após a deformação;
- Os deslocamentos na direção transversal não variam ao longo da espessura da placa.

Considere a placa genérica da figura seguinte onde  $P$  é um ponto da superfície média de coordenadas  $(x,y,0)$ , e  $P_z$  é um ponto que se encontra numa fibra retilínea que é ortogonal à superfície média e passa por  $P$ , de coordenadas  $(x,y,z)$ . Considere um carregamento  $p(x,y)$  atuando transversalmente à placa. A espessura  $h$  é pequena quando comparada a uma dimensão característica no plano da placa.



Nas figuras abaixo, tem-se as representações das configurações deformadas e indeformadas da placa nos planos  $xz$  e  $yz$ , respectivamente:



Considerando essas definições e deslocamentos infinitesimais, tem-se:

$$w = w(x, y)$$

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

Usando as relações de compatibilidade:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

sendo as outras componentes nulas.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

## Equação constitutiva:

- A teoria assume que a placa é composta por uma “pilha” de lâminas;
- Cada lâmina está sujeita ao estado plano de tensão.

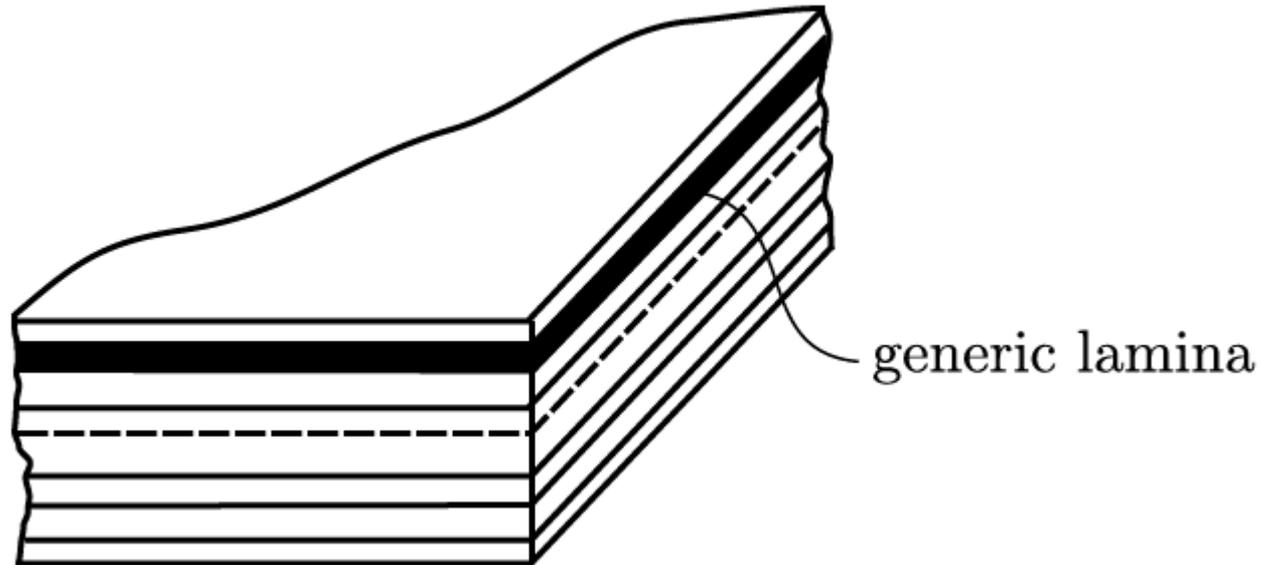
Portanto:

$$\tau_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\tau_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

# Placa idealizada como uma “pilha” de lâminas



Podem-se definir resultantes, por unidade de comprimento, da superfície média da placa. A resultante de momento  $M_x$  associada à componente  $\tau_{xx}$ :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xx} (-z) dz$$

$$M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Definindo  $D$ :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Tem-se:

$$M_x = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

A resultante de momento  $M_y$ , por unidade de comprimento, associada à componente  $\tau_{yy}$ :

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yy} (-z) dz$$

$$M_y = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

O momento torsor por unidade de comprimento,  $M_{yx}$ , é dado por:

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} (-z) dz = D(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

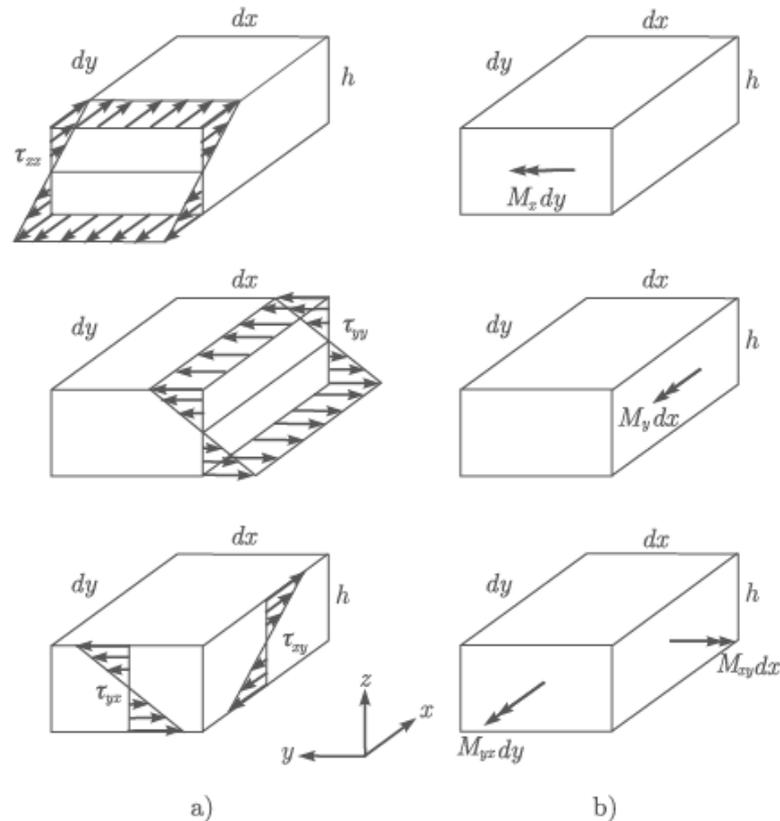
O momento torsor por unidade de comprimento,  $M_{xy}$ , é dado por:

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -D(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

Como as tensões de cisalhamento são iguais, tem-se  $M_{yx} = -M_{xy}$ .

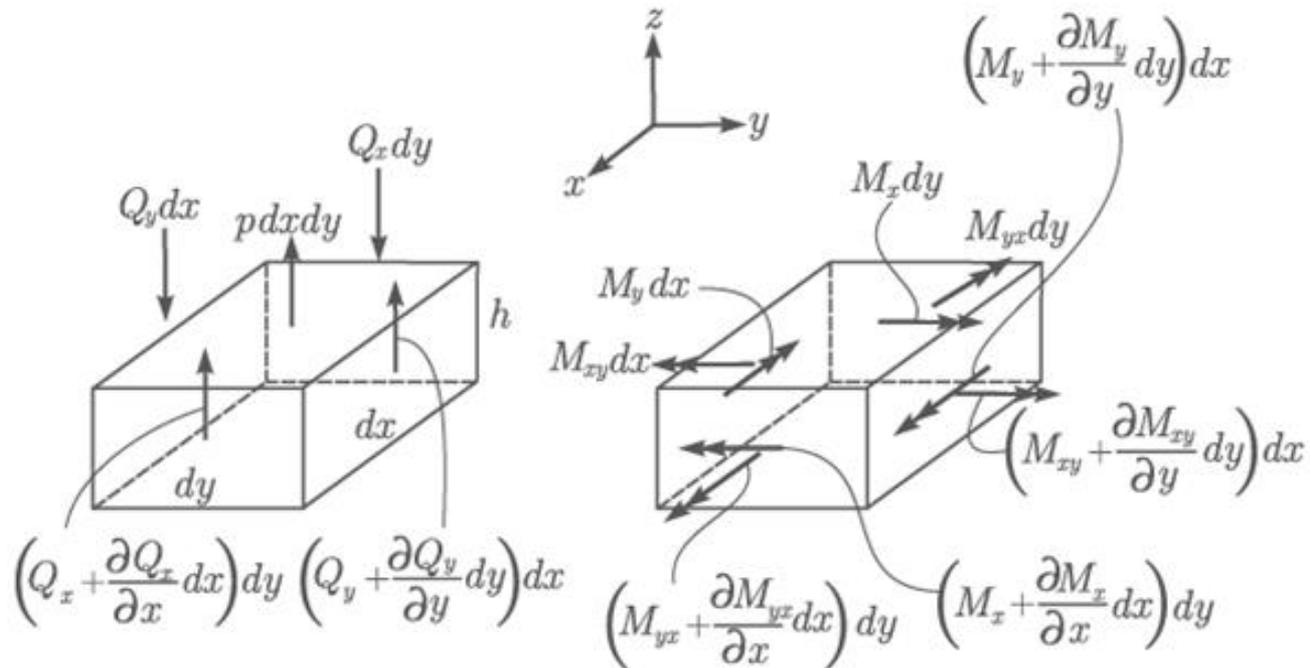
## Resultantes das tensões:

Nas figuras abaixo, observam-se as distribuições de tensões e suas resultantes quando  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  e  $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$  são todos positivos:



## Equilíbrio:

Na figura abaixo, observa-se os esforços nas seções de um elemento da chapa de arestas infinitesimais no plano  $xy$  e a resultante do carregamento externo atuante neste elemento.



Com o equilíbrio de forças na direção  $z$ , obtém-se:

$$-Q_x dy + \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx + \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + p dx dy = 0$$

Simplificando-se:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -p \quad (1)$$

Desprezando-se termos infinitesimais de maior ordem, o equilíbrio de momento em torno do eixo  $x$  resulta em:

$$(Q_y dx)dy - M_y dx + \left( M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - M_{yx} dy + \left( M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx \right) dy = 0$$

Simplificando-se:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = -Q_y \quad (2)$$

De modo análogo para o eixo  $y$ , resulta em:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -Q_x \quad (3)$$

## Formulação diferencial:

Derivando a equação (2) em relação a  $y$  e a equação (3) em relação a  $x$ , somando-as e usando a equação (1) chega-se a :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = p$$

Substituindo-se as expressões que relacionam os momentos aos deslocamentos transversais chega-se a:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

que é conhecida como a equação de Lagrange para as placas.

Substituindo as expressões que fornecem os momentos em função dos deslocamentos transversais nas equações (2) e (3), obtêm-se os esforços cortantes em termos dos deslocamentos:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

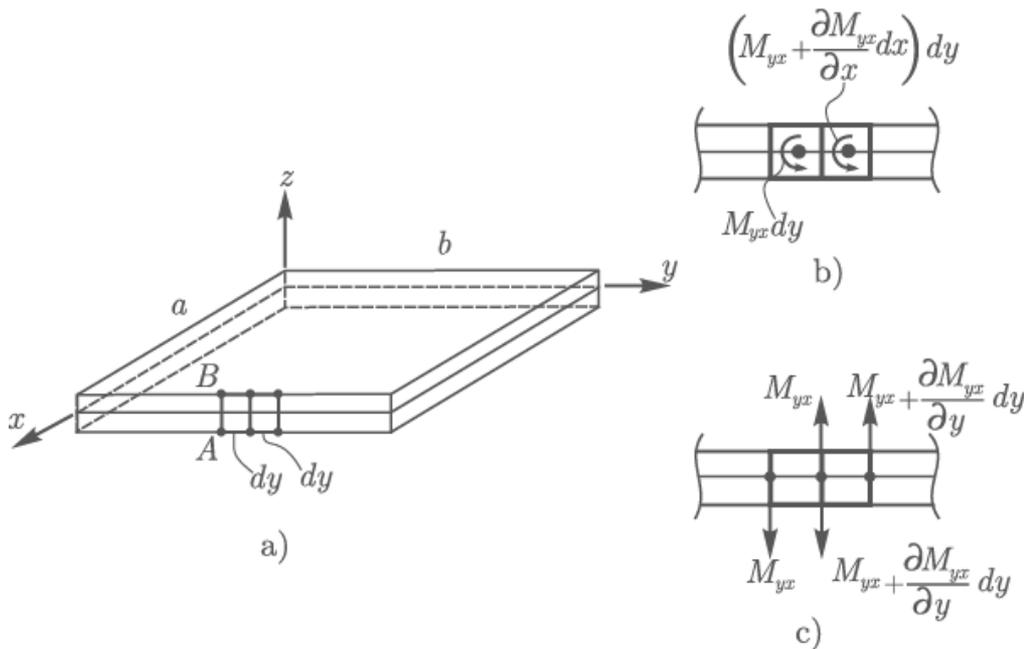
e

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

## Condições de contorno:

Considerando-se uma aresta paralela ao eixo  $y$ , dada por  $x = a$ .

- A condição de borda engastada corresponde a se impor que os deslocamentos transversais e as rotações das fibras em torno do eixo  $y$ , tais como **AB** que é mostrada na figura **a)** abaixo, são nulos.



$$w|_{x=a} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0$$

- Considerando a condição simplesmente apoiada, o deslocamento transversal deve ser restringido. Adicionalmente não há vínculos cinemáticos que restrinjam as rotações de fibras em torno do eixo  $y$ , tais como  $\mathbf{AB}$ , e não há tensões normais  $\tau_{xx}$  atuando na seção de extremidade da placa dada por  $x = a$ . Desta forma, em  $x = a$ , tem-se:

$$w|_{x=a} = 0$$

$$M_x|_{x=a} = 0$$

Essa última condição pode ser escrita através dos deslocamentos na forma:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{x=a} = 0$$

E como  $w|_{x=a} = 0$ , tem-se que o segundo termo da equação acima é nulo, resultando:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0$$

- A última condição a se considerar é a condição de borda livre. Uma vez que não existem restrições cinemáticas nesse caso, não existem tensões que atuem sobre a seção da extremidade da placa definida por  $x = a$ . As componentes de tensão que poderiam agir são  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$ . Essas componentes estão associadas com  $M_x$ ,  $M_{yx}$  e  $Q_x$ . Mostra-se que as condições de contorno nesse caso são:

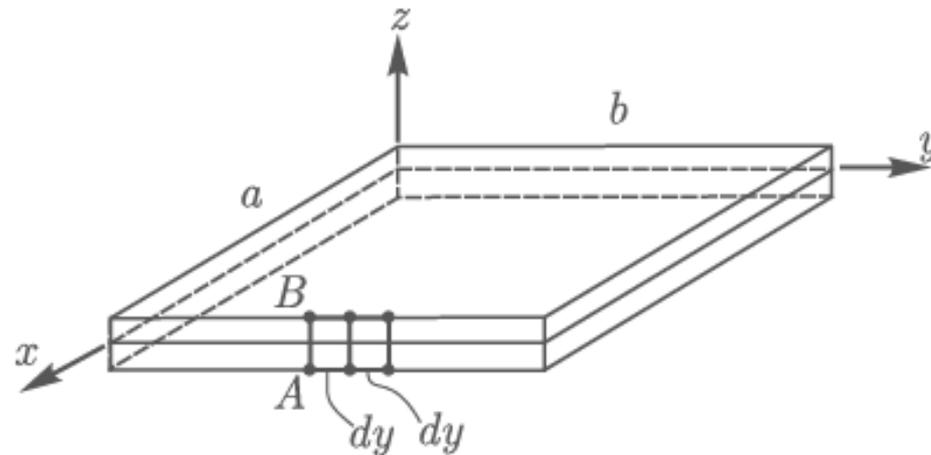
$$M_x \Big|_{x=a} = 0$$

$$V_x = \left( Q_x - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) \Big|_{x=a} = 0$$

Esta última pode ser interpretada nas figuras **b)** e **c)** do slide anterior.

## Exemplo

Encontrar a solução para uma placa retangular, quando a placa é simplesmente apoiada nas suas quatro bordas e atua sobre ela uma força  $p = p(x, y)$  transversal. Particularizar a solução para  $p(x, y) = p_0$  constante.



SOLUÇÃO: Tem-se as condições de contorno abaixo:

$$w|_{x=0} = 0, \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0$$

$$w|_{y=0} = 0, \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0$$

$$w|_{x=a} = 0, \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=a} = 0$$

$$w|_{y=b} = 0, \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{y=b} = 0$$

Buscando a solução a partir de uma série de *Fourier*:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

que atende as condições de contorno.

Buscam-se as constantes  $w_{mn}$  para que satisfaçam a equação:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

Para tal, o carregamento precisa ser caracterizado. Pode-se escrever (novamente usando-se a serie de *Fourier*):

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Onde:

$$P_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy$$

Substituindo-se  $w(x, y)$  e  $p(x, y)$  em  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$ ,  
chega-se a:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{m^4}{a^4} + \frac{2m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right) \pi^4 w_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) =$$
$$\frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Como os coeficientes das duas séries têm que ser os mesmos, tem-se:

$$w_{mn} = \frac{P_{mn}}{\pi^4 D \left( \frac{m^4}{a^4} + \frac{2m^2n^2}{a^2b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right)}$$

Quando o carregamento é uniforme e igual a  $p_0$ , tem-se:

$$P_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn}; m, n = 1, 3, 5, \dots$$

$$P_{mn} = 0; m, n = 2, 4, 6, \dots$$

Com todas essas relações, chega-se a:

$$w(x, y) = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

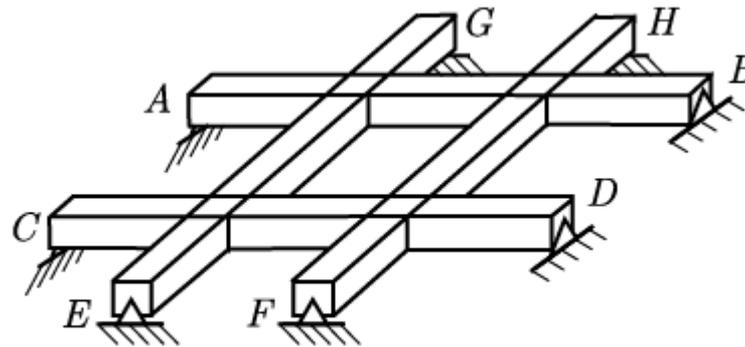
Com  $m$  e  $n$  ímpares. Portanto, tendo-se o campo de deslocamentos, podem-se obter os campos de tensões e os esforços resultantes.

## Voltando ao comportamento da placa

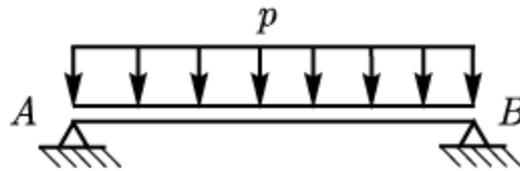
Considere uma placa retangular simplesmente apoiada. Pode-se buscar entendimento sobre o comportamento da placa a partir de barras de seção transversal retangular.

Considerando uma barra com eixo paralelo ao eixo  $x$  global, observa-se que além do momento  $M_x$  e da força  $Q_x$  que estão diretamente associados à flexão dessa barra, o momento de torsão  $M_{xy}$  e a força  $Q_y$  – que atuam sobre as faces laterais – contribuem para o seu equilíbrio.

Este efeito é examinado abaixo num contexto simplificado de grelha.

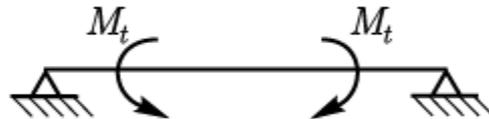


a)

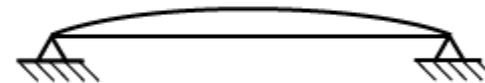


+

+

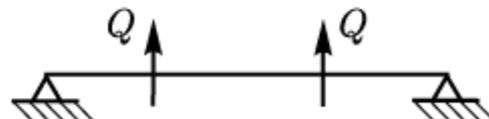


$M_t$ -effect



+

+



$Q$ -effect



b)

c)