Complementos de Mecânica Clássica

Exercício-Trabalho 4: Entregar até 24-11-16

2o Semestre/2016 – Noturno

1) A massa m de um pêndulo está presa por um fio ideal de comprimento l a um ponto de sustentação. Esse ponto oscila para a direita e para a esquerda ao longo de um eixo horizontal, de acordo com a equação $x = a \cos \omega t$. Suponha que o pêndulo só se movimente no plano vertical que contém o eixo x. Considere que a posição do pêndulo seja descrita por um ângulo θ que o fio faz com uma linha vertical.
a) Escreva a Lagrangeana e obtenha as equações de Lagrange.
b) Mostre que, para valores pequenos de θ, a equação de movimento se reduz à equação de movimento de um oscilador harmônico forçado e determine o movimento para o estado estacionário correspondente. De que forma a amplitude das oscilações do estado estacionário depende de m, l, a e ω?

2) Uma partícula de massa m, sob a ação da gravidade, está confinada a se mover no interior de um cone invertido, de ângulo α e com o seu eixo na vertical. Utilizando coordenadas esféricas, determine:
a) A Lagrangeana do sistema e as equações de Lagrange do movimento da partícula.
b) Os momentos generalizados e a Hamiltoniana do sistema. Nesse caso a Hamiltoniana do sistema é a energia? Justifique sua resposta.
c) A equação de movimento para a coordenada r em função do tempo.
d) A partir da energia do sistema, estude a estabilidade do movimento em torno da órbita circular e obtenha o ponto de mínimo r_0. Mostre que $\dot{\varphi}^2 = \dfrac{g \cos \alpha}{r_0 \operatorname{sen}^2 \alpha}$ é a velocidade angular da partícula na órbita circular.
e) Mostre que a partícula executa pequenas oscilações em torno do ponto de mínimo r_0 com $\omega^2 = \dfrac{3g \cos \alpha}{r_0}$. As órbitas em torno do ponto de mínimo serão fechadas? Justifique sua resposta.