

MAP2310 - Métodos Numéricos em Equações Diferenciais I

1º Semestre de 2012 - Prof. Nelson Kuhl

2ª Lista de Exercícios

Exercício 1 Usando a estimativa do erro para a fórmula do trapézio, mostre que o método de Heun tem ordem de consistência 2.

Exercício 2 Que condições devem satisfazer os parâmetros a , c_1 e c_2 do método Runge-Kutta de dois estágios

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_j, \eta_j) \\k_2 &= f(t_j + ah, \eta_j + ahk_1) \\ \eta_{j+1} &= \eta_j + h(c_1k_1 + c_2k_2)\end{aligned}$$

para garantir que ele tenha ordem 2? Verifique que os parâmetros dos métodos do ponto médio e de Heun satisfazem estas condições.

Exercício 3 Verifique que

$$\left(\frac{\cos(t + \theta_0)}{t + 1/r_0}, \frac{\sin(t + \theta_0)}{t + 1/r_0} \right)$$

é a solução do sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} &= x - y\sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

satisfazendo $x(0) = r_0 \cos(\theta_0)$ e $y(0) = r_0 \sin(\theta_0)$.

Exercício 4 Determine a solução geral do sistema $\dot{X} = AX$ onde a matriz A é dada por

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

No item a), obtenha a solução que satisfaz $x(0) = 1$ e $y(0) = 4$.

Exercício 5 Esboce os retratos de fase dos sistemas do exercício anterior.

Exercício 6 O deslocamento x em relação à posição de equilíbrio de um sistema massa-mola amortecido satisfaz a EDO de segunda ordem

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

onde $m > 0$ é a massa do objeto, $k > 0$ a constante da mola e $b \geq 0$ a constante de amortecimento. A equação acima pode ser transformada no seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}y\end{aligned}$$

- a) Para quais valores de k e b este sistema tem autovalores complexos? Autovalores repetidos? Autovalores reais distintos?
- b) Ache a solução geral do sistema em cada caso.
- c) Descreva o movimento da massa quando ela é liberada da posição $x = 1$ com velocidade nula em cada caso do item a).

Exercício 7 Ache os pontos de equilíbrio e escreva a matriz Jacobiana do campo vetorial nestes pontos para

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 - 1 - y \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{x} = 10x(1 - y) \\ \dot{y} = y(x - 1) \end{cases}$$

O que você pode afirmar sobre os equilíbrios?