Modelo por Equações de Fase da Máquina Síncrona com Enrolamento de Campo

Prof. Dr. José Roberto B. de A. Monteiro

25 de setembro de 2009

Para o desenvolvimento do modelo da máquina síncrona, as seguintes hipóteses são consideradas:

- não há saturação do ferro;
- não-linearidade da permeabilidade magnética do ferro é desprezível;
- máquina trifásica simétrica.

As características tratadas na modelagem são:

1. Campo gerado por enrolamento no rotor;
2. pólos salientes;
   - variação das auto-indutâncias com a posição rotórica (estator);
   - variação das indutâncias mútuas com a posição rotórica (estator–estator,estator–rotor);
3. enrolamentos de amortecimento no rotor.

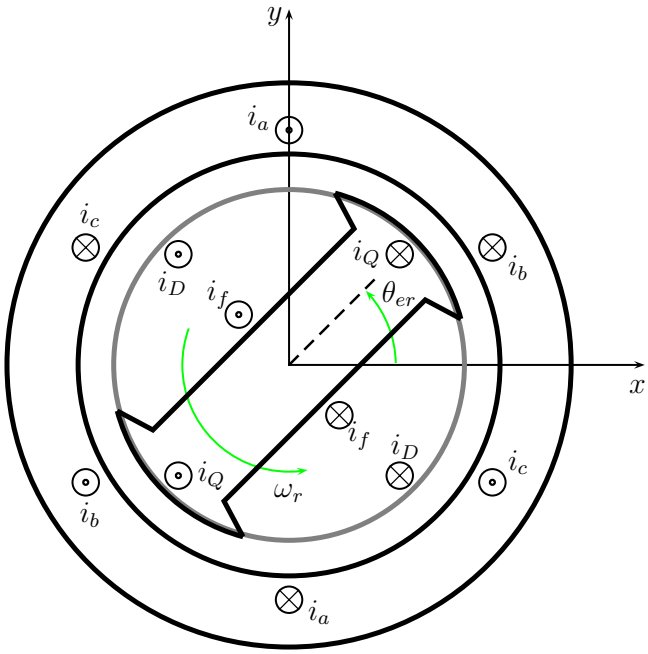

Figura 1: Modelo físico simplificado.

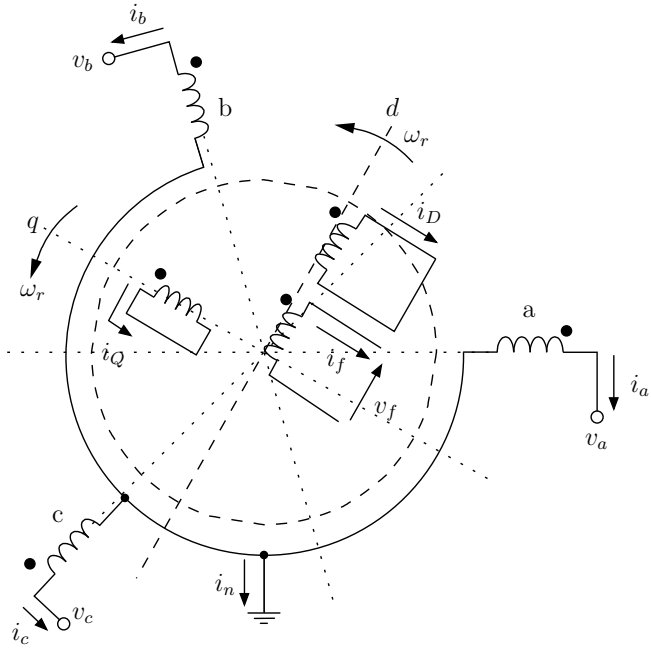

Figura 2: Referências como Gerador

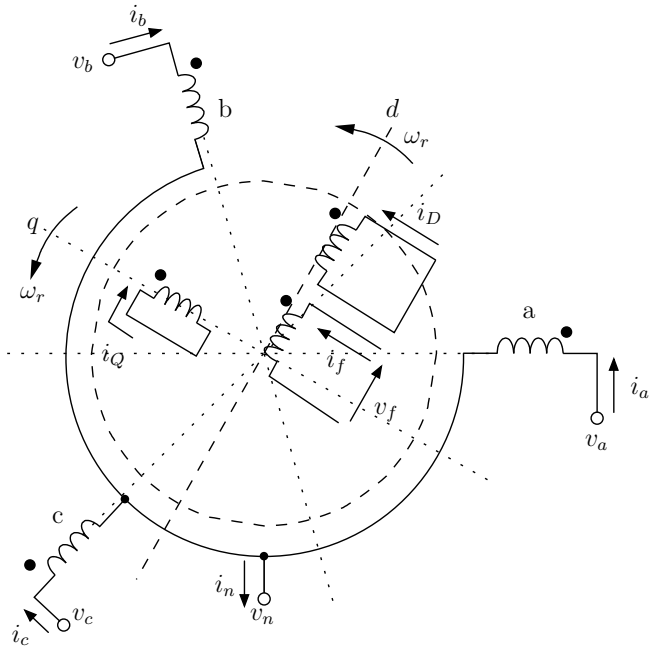

Figura 3: Referências como Motor

Equações das Fases (Gerador)

$$
\begin{aligned}
i_a + R_s + v_a &= -\frac{d\Phi_a}{dt} \\
i_b + R_s + v_b &= -\frac{d\Phi_b}{dt} \\
i_c + R_s + v_c &= -\frac{d\Phi_c}{dt} \\
i_D + R_D &= -\frac{d\Phi_D}{dt} \\
i_Q + R_Q &= -\frac{d\Phi_Q}{dt} \\
i_f + R_f - v_f &= -\frac{d\phi_f}{dt}
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_a &= L_{aa}i_a + L_{ab}i_b + L_{ac}i_c + L_{af}i_f + L_{aD}i_D + L_{aQ}i_Q \\
\Phi_b &= L_{ba}i_a + L_{bb}i_b + L_{bc}i_c + L_{bf}i_f + L_{bD}i_D + L_{bQ}i_Q \\
\Phi_c &= L_{ca}i_a + L_{cb}i_b + L_{cc}i_c + L_{cf}i_f + L_{cD}i_D + L_{cQ}i_Q \\
\Phi_f &= L_{fa}i_a + L_{fb}i_b + L_{fc}i_c + L_{ff}i_f + L_{fD}i_D + 0 \\
\Phi_D &= L_{Da}i_a + L_{Db}i_b + L_{Dc}i_c + L_{Df}i_f + L_{DD}i_D + 0 \\
\Phi_Q &= L_{Qa}i_a + L_{Qb}i_b + L_{Qc}i_c + 0 + 0 + L_{QQ}i_Q
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
\begin{bmatrix} \Phi_a \\ \Phi_b \\ \Phi_c \\ \Phi_f \\ \Phi_D \\ \Phi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{af} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bf} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cf} & L_{cD} & L_{cQ} \\ L_{fa} & L_{fb} & L_{fc} & L_{ff} & L_{fD} & 0 \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{Df} & L_{DD} & 0 \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & 0 & 0 & L_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \tag{3}
$$

Onde:

L_{xx}: auto-indutância de uma fase "x";

L_{xy}: Indutância mútua entre as fases "x" e "y";

Pode-se definir:

- um vetor de fluxos de estator: Φ_S
- um vetor de fluxos de rotor: Φ_R
- um vetor de correntes de estator: i_S
- um vetor de correntes de rotor: i_R
- a matriz de auto-indutâncias de estator: L_{SS}
- a matriz de auto-indutâncias de rotor: L_{RR}
- a matriz de acoplamento estator–rotor e rotor–estator: L_{SR} e $L_{RS} \Rightarrow (L_{SR})^t = L_{RS}$

Pode-se escrever a equação dos fluxos da máquina de forma simplificada:

$$\begin{bmatrix} \Phi_S \\ \Phi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{SS} & L_{SR} \\ L_{RS} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} \tag{4}$$

A equação (3) pode ser reescrita de forma mais compacta:

$$\begin{bmatrix} v_S \\ v_R \end{bmatrix} + [R] \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} = -\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_S \\ \Phi_R \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} v_S \\ v_R \end{bmatrix} + [R] \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} = -\frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} L_{SS} & L_{SR} \\ L_{RS} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} \right) \tag{6}$$

Onde:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_S & 0 \\ 0 & R_R \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$[R_S] = \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & R_b & 0 \\ 0 & 0 & R_c \end{bmatrix} \quad , \quad [R_R] = \begin{bmatrix} R_f & 0 & 0 \\ 0 & R_D & 0 \\ 0 & 0 & R_Q \end{bmatrix} \tag{8}$$

Onde:

R_a, R_b e R_c: resistências das fases a, b e c, respectivamente;

R_f, R_D e R_Q: resistências dos circuitos de rotor ($_f$: campo; $_D$: enrolamento de amortecimento direto; e $_Q$: enrolamento de amortecimento em quadratura).

$$L_{SS} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} L_{aa} &= L_{sl} + L_0 + L_2 \cos 2\theta_{er} \\ L_{bb} &= L_{sl} + L_0 + L_2 \cos (2\theta_{er} + \gamma) \\ L_{cc} &= L_{sl} + L_0 + L_2 \cos (2\theta_{er} - \gamma) \\ L_{ab} = L_{ba} &= -\frac{L_0}{2} + L_2 \cos (2\theta_{er} - \gamma) \\ L_{ac} = L_{ca} &= -\frac{L_0}{2} + L_2 \cos (2\theta_{er} + \gamma) \\ \gamma &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned} \tag{10}$$

Onde:

L_{sl}: indutância de dispersão de uma fase do estator;

L_0: indutãncia de magnetização de uma fase do estator;

L_2: amplitude da variação de uma indutância de estator devido à variação da relutância com a posição do rotor;

Definindo:

$$T_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \gamma) & \cos(\theta + \gamma) \\ \cos(\theta - \gamma) & \cos(\theta + \gamma) & \cos\theta \\ \cos(\theta + \gamma) & \cos\theta & \cos(\theta - \gamma) \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$L_{SS} = \begin{bmatrix} L_{sl} + L_0 & -\frac{L_0}{2} & -\frac{L_0}{2} \\ -\frac{L_0}{2} & L_{sl} + L_0 & -\frac{L_0}{2} \\ -\frac{L_0}{2} & -\frac{L_0}{2} & L_{sl} + L_0 \end{bmatrix} + L_2 \cdot T_3(2\theta_{er}) \tag{12}$$

$$T_1(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \cos(\theta - \gamma) \\ \cos(\theta + \gamma) \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$L_{SR} = L_{RS}^T = \begin{bmatrix} L_{af} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{bf} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{cf} & L_{cD} & L_{cQ} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Onde:

$$\begin{aligned} L_{af} &= M_f \cos\theta_{er} \\ L_{bf} &= M_f \cos(\theta_{er} - \gamma) \\ L_{cf} &= M_f \cos(\theta_{er} + \gamma) \\ L_{aD} &= M_D \cos\theta_{er} \\ L_{bD} &= M_D \cos(\theta_{er} - \gamma) \\ L_{cD} &= M_D \cos(\theta_{er} + \gamma) \\ L_{aQ} &= M_Q \cos\theta_{er} \\ L_{bQ} &= M_Q \cos(\theta_{er} - \gamma) \\ L_{cQ} &= M_Q \cos(\theta_{er} + \gamma) \end{aligned} \tag{15}$$

Onde:

M_f, M_D e M_Q: indutância mútua entre as fases de estator e o enrolamento de campo, enrolamento de amortecimento de eixo direto e enrolamento de amortecimento de eixo de quadratura, respectivamente.

E:

$$L_{SR} = T_1(\theta_{er}) \cdot \begin{bmatrix} M_f & M_D & -M_Q \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$L_{RS} = \begin{bmatrix} M_f \\ M_D \\ -M_Q \end{bmatrix} \cdot T_1(\theta_{er})^T \tag{17}$$

$$L_{RR} = \begin{bmatrix} L_{fl} + L_{fm} & M_{fD} & 0 \\ M_{fD} & L_{Dl} + L_{Dm} & 0 \\ 0 & 0 & L_{Ql} + L_{Qm} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Onde:

L_{fl}, L_{Dl} e L_{Ql}: indutâncias de dispersão do enrolamentos de campo, enrolamento de amortecimento de eixo direto e enrolamento de amortecimento de eixo de quadratura, respectivamente;

L_{fm}, L_{Dm} e L_{Qm}: indutâncias de magnetização do enrolamentos de campo, enrolamento de amortecimento de eixo direto e enrolamento de amortecimento de eixo de quadratura, respectivamente;

M_{fD}: indutância mútua entre o enrolamento de e o enrolamento de amortecimento de eixo direto.

A equação elétrica fica:

$$\begin{bmatrix} v_S \\ v_R \end{bmatrix} + [R] \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_{SS} & L_{SR} \\ L_{RS} & L_{RR} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} - \omega_{er} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_{er}} \begin{bmatrix} L_{SS} & L_{SR} \\ L_{RS} & L_{RR} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} \tag{19}$$

O torque eletromagnético, em oposição ao movimento, é dado por:

$$T_{el} = -n_{pp} \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix}^T \left(\frac{\partial}{\partial \theta_{er}} \begin{bmatrix} L_{SS} & L_{SR} \\ L_{RS} & L_{RR} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} \tag{20}$$

Resolvendo a derivada parcial de (19) e (20):

$$\frac{\partial}{\partial \theta_{er}} L_{SS} = 2L_2 \dot{T}_3(2\theta_{er}) \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_{er}} L_{SR} = \dot{T}_1(\theta_{er}) \begin{bmatrix} M_f & M_D & -M_Q \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_{er}} L_{RS} = \begin{bmatrix} M_f \\ M_D \\ -M_Q \end{bmatrix} \dot{T}_1(\theta_{er})^T \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_{er}} L_{RR} = 0 \tag{24}$$

$$\dot{T}_3(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_{er}} T_3(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\sin(\theta-\gamma) & -\sin(\theta+\gamma) \\ -\sin(\theta-\gamma) & -\sin(\theta+\gamma) & -\sin\theta \\ -\sin(\theta+\gamma) & -\sin\theta & -\sin(\theta-\gamma) \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\dot{T}_1(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_{er}} T_1(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ -\sin(\theta-\gamma) \\ -\sin(\theta+\gamma) \end{bmatrix} \tag{26}$$

A equação elétrica final:

$$\begin{bmatrix} v_S \\ v_R \end{bmatrix} + [R] \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_{SS} & L_{SR} \\ L_{RS} & L_{RR} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix}$$

$$-\omega_{er} \begin{bmatrix} 2L_2 \dot{T}_3(2\theta_{er}) & \dot{T}_1(\theta_{er}) \begin{bmatrix} M_f & M_D & -M_Q \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_f \\ M_D \\ -M_Q \end{bmatrix} \dot{T}_1(\theta_{er})^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} \tag{27}$$

E a equação do torque eletromagnético:

$$T_{el} = -n_{pp} \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2L_2 \dot{T}_3(2\theta_{er}) & \dot{T}_1(\theta_{er}) \begin{bmatrix} M_f & M_D & -M_Q \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_f \\ M_D \\ -M_Q \end{bmatrix} \dot{T}_1(\theta_{er})^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} \tag{28}$$