PEF2602
Estruturas na Arquitetura I I – Sistemas Reticulados

Tensões na Flexão

(Aula 9 – 24/10/2016)

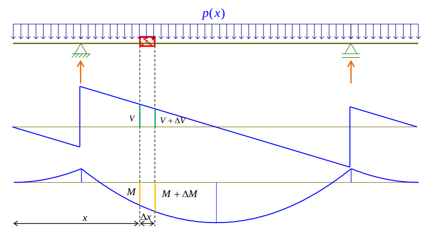
Professores
Ruy Marcelo O. Pauletti & Leila Meneghetti Valverdes
2º Semestre 2016

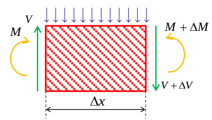
TENSÕES NA FLEXÃO

EQUILÍBRIO

ESFORÇOS SOLICITANTES

TENSÕES

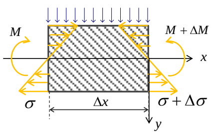




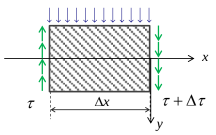
$$V(x) = -\int p(x)dx$$

$$M(x) = \int V(x)dx$$

Tensões Normais
σ



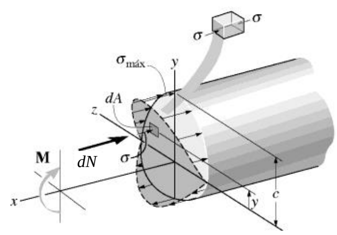
Tensões de Cisalhamento
τ



Nota: O momento resultante das tensões σ deve equilibrar o momento resultante das tensões τ

$$dM = Vdx$$

$$V = \frac{dM}{dx}$$

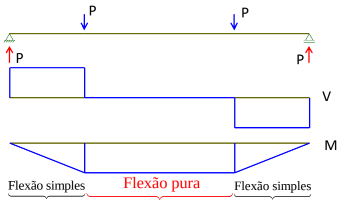


$$dN = \sigma dA$$

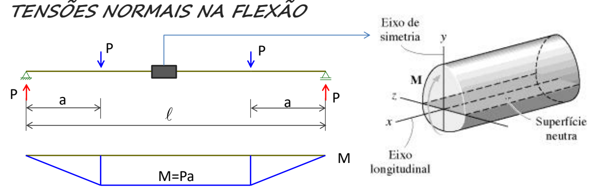
$$dM = dN \cdot y = \sigma \cdot ydA \longrightarrow M = \int_A dM = \int_A \sigma \cdot ydA$$

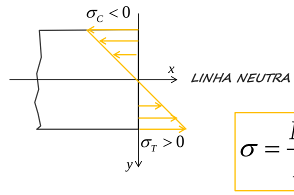
FLEXÃO SIMPLES: $N = \int_A \sigma dA = 0$

FLEXÃO PURA: $N = 0 \; ; \; V = 0 \Leftrightarrow M = cte$

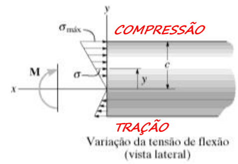


TENSÕES NORMAIS NA FLEXÃO



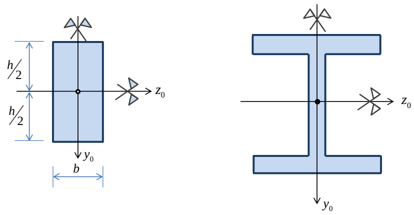


$$\boxed{\sigma = \frac{My}{I_{z0}}}$$

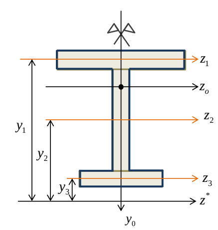


Na flexão normal simples, a linha neutra passa pelo baricentro da seção!

EIXO BARICÊNTRICO "centro de massa" "centro geométrico"

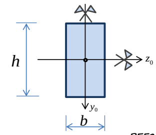


O baricentro fica sobre um eixo de simetria



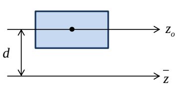
$$y_o = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

Momento de inércia de um retângulo em relação aos eixos que passam pelo eixo baricêntrico



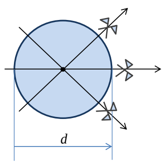
$$I_{zo} = \frac{bh^3}{12}$$

Mudança de eixos – Teorema de Steiner (ou dos eixos paralelos)

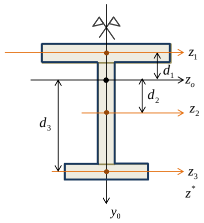


$$I_{\bar{z}} = I_{zo} + Ad^2$$

$$I_{zo} < I_{\bar{z}} \quad \forall \ d \quad \therefore \quad I_{zo} \text{ é mínimo}$$

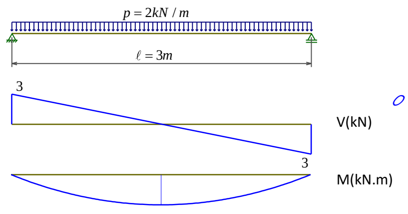


$$I_{zo} = \frac{\pi d^4}{64}$$

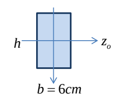


$$I_{zo} = \sum I_{zi} + A_i d_i^2$$

Exemplo: Encontrar a altura h da viga, sabendo que a tensão de ruptura do material é $\sigma_r = 3\text{kN}/\text{cm}^2$ com um coeficiente de segurança, $s = 3$



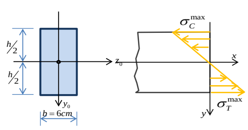
$$M_{\max} = \frac{pl^2}{8} = \frac{2 \times 3^2}{8} = 2,25kN.m$$



O momento de inércia vale:

$$I_{zo} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{zo} = \frac{6 \times h^3}{12} = \frac{h^3}{6}$$



$$\sigma_T^{\max} = \sigma_C^{\max} = \frac{M \times \left(h/2\right)}{I_{zo}}$$

$$\sigma_T^{\max} \le \bar{\sigma} = \frac{\sigma_r}{s}$$

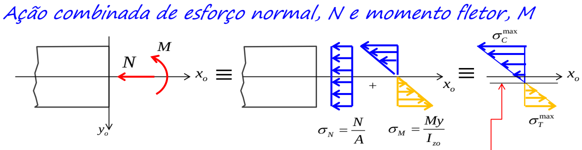
$$\frac{M_{\max} \times \left(h/2\right)}{I_{zo}} \le \bar{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{\max} \times \left(h/2\right)}{\left(h^3/2\right)} \le \bar{\sigma}$$

$$h \ge \sqrt{\frac{M_{\max}}{\bar{\sigma}}} = \sqrt{\frac{225}{1} \frac{kN.cm}{kN/cm^2}} = 15cm$$

Padrão comercial: 6cm x 16cm

FLEXÃO COMPOSTA

Ação combinada de esforço normal, N e momento fletor, M



Linha Neutra não passa pelo eixo baricêntrico

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M$$

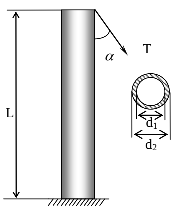
$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A} + \frac{My}{I_{zo}}}$$

$$\sigma_C^{\max} \ne \sigma_T^{\max}$$

Exemplo:

Um poste de alumínio é fixado na base e puxado no topo por um cabo com uma força de tração T, conforme a figura, fazendo um ângulo α=30° com a vertical. O poste tem comprimento L=2,0m e uma seção transversal circular vazada, de diâmetro externo d_2=250mm e interno d_1=200mm.

Determine a força transversal admissível no cabo, se a tensão admissível no poste for de 80MPa.



$$80MPa = 8kN/cm^2$$

$$\sin 30^0 = 0,5$$

$$\cos 30^0 = 0,86603$$

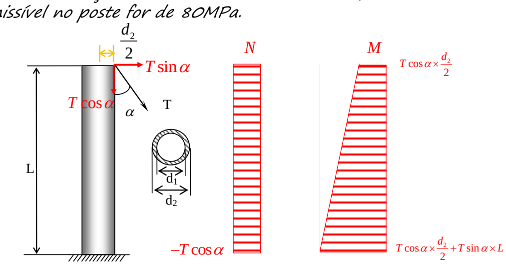
$$A = \frac{\pi \times (d_2^2 - d_1^2)}{4} = 176,71\ \text{cm}^2$$

$$I = \frac{\pi \times (d_2^4 - d_1^4)}{64} = 11320,78\ \text{cm}^4$$

Exemplo:

Um poste de alumínio é fixado na base e puxado no topo por um cabo com uma força de tração T, conforme a figura, fazendo um ângulo α=30° com a vertical. O poste tem comprimento L=2,0m e uma seção transversal circular vazada, de diâmetro externo d_2=250mm e interno d_1=200mm.

Determine a força transversal admissível no cabo, se a tensão admissível no poste for de 80MPa.



Flexão composta: $\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y$

Na extremidade livre: $N = -T\cos\alpha \quad ; \quad M = T\cos\alpha \times \frac{d_2}{2}$

$$\sigma_{\min}^c = -\frac{T\cos\alpha}{A} - \frac{(T\cos\alpha \times \frac{d_2}{2}) \times \frac{d_2}{2}}{I} \geq -8kN/cm^2$$

$$-\frac{T \times 0,86603}{176,71} - \frac{(T \times 0,86603 \times 12,5) \times 12,5}{11320,78} = -1,6854 \times 10^{-2} T \geq -8$$

$$1,6854 \times 10^{-2} T \leq 8$$

$$T \leq 476,66kN$$

Na base (extremidade engastada): $N = -T\cos\alpha \quad ; \quad M = T\cos\alpha \times \frac{d_2}{2} + T\sin\alpha \times L$

$$\sigma_{\min}^c = -\frac{T\cos\alpha}{A} - \frac{(T\cos\alpha \times \frac{d_2}{2} + T\sin\alpha \times L) \times \frac{d_2}{2}}{I} \geq -8$$

$$\sigma_{\min}^c = -\frac{T \times 0,86603}{176,71} - \frac{(T \times 0,86603 \times 12,5 + T \times 0,5 \times 200) \times 12,5}{11320,78} \geq -8$$

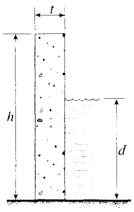
$$-0,12727T \geq -8$$

$$0,12727T \leq 8$$

$$\Rightarrow T \leq 62,86\text{kN} \qquad \boxed{\Rightarrow T_{\max} = 62,86\text{kN}}$$

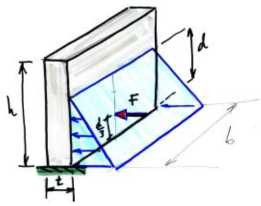
Exemplo:
Uma pequena barragem é constituída de uma parede de concreto-massa, de peso específico γ_c=23kN/m³. que se apoia sobre uma fundação segura. A altura da parede vale h=2m e a sua espessura é t=0,3m.

(a) determine as tensões de compressão e tração máximas na base da parede, quando a água atinge o topo (d=h).
(b) determine a profundidade máxima permissível d_{max} da água, para que não ocorram tensões de tração no concreto.



Exemplo:
Uma pequena barragem é constituída de uma parede de concreto-massa, de peso específico γ_c=23kN/m3. que se apoia sobre uma fundação segura. A altura da parede vale h=2m e a sua espessura é t=0,3m.

(a) determine as tensões de compressão e tração máximas na base da parede, quando a água atinge o topo (d=h).
(b) determine a profundidade máxima permissível d_{max} da água, para que não ocorram tensões de tração no concreto.



Peso da barragem: $W_{barragem} = (b \times t \times h) \times \gamma_c$

Pressão hidrostática, para uma coluna d´água de altura d:

$$p = d \times \gamma_w \qquad (\gamma_w = 10 kN/m^3)$$

Força linearmente distribuída, variando linearmente desde zero na superfície até uma valor:

$$q = (d \times \gamma_w) \times b \qquad \textit{(em kN/m)}$$

Resultante da força horizontal aplicada pela água à barragem

$$F = q \times \frac{d}{2} = \frac{1}{2}(d^2 \times \gamma_w) \times b$$

Momento fletor na base da barragem, devido à F:

$$M = F \times \frac{d}{3} = \frac{1}{6}(d^3 \times \gamma_w) \times b$$

Tensões na base da barragem:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y$$

Área de momento de inércia da seção transversal da base:

$$A = b \times t \quad ; \quad I = \frac{bt^3}{12}$$

$$\sigma_{\min,\max} = -\frac{W}{A} \mp \frac{M}{I} y_{\max} = -\frac{(b \times t \times h) \times \gamma_c}{bt} \mp \frac{M}{\left(\frac{bt^3}{12}\right)} \times \frac{t}{2}$$

$$\sigma_{\min,\max} = -h \times \gamma_c \mp \frac{\frac{1}{6}(d^3 \times \gamma_w) \times b}{\left(\frac{\mathrm{bt}^3}{12}\right)} \times \frac{t}{2}$$

$$\sigma_{\min,\max} = -h \times \gamma_c \mp \frac{d^3}{t^2} \times \gamma_w$$

$$\sigma_{\min,\max} = -2,0 \times 23 \mp \frac{(2,0)^3}{0,3^2} \times 10 = -46 \mp 888,9 \quad \text{(kN/m2=kPa)}$$

$$\begin{cases} \sigma_{\min} = -46 - 888,89 = -934,9 \text{ kPa} & \text{(compressão máxima!)} \\ \sigma_{\max} = -46 + 888,89 = 842,9 \text{ kPa} & \text{(tração máxima!)} \end{cases}$$

(b) Profundidade máxima para não haver tração:

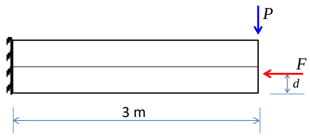
$$\sigma_{\max} = -h \times \gamma_c + \frac{d^3_{\max}}{t^2} \times \gamma_w = 0$$

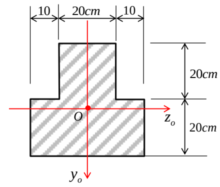
$$\Rightarrow d^3_{\max} = h \times t^2 \times \frac{\gamma_c}{\gamma_w} = 2 \times 0,3^2 \times 2,3 = 0,414$$

$$\boxed{\Rightarrow d_{\max} = \sqrt[3]{0,414} = 0,745 \text{ m}}$$

Exemplo viga protendida:

a) Qual máxima distância d (contada a partir da extremidade inferior da peça) que se pode aplicar uma força de protensão F?
b) Qual o valor máximo de F aplicado na distância d calculada no item anterior?
c) Na situação definida nos itens "a" e "b", qual o valor máximo de P que pode ser aplicado na extremidade livre da viga (de cima para baixo)?
Desconsiderar o peso próprio da peça.



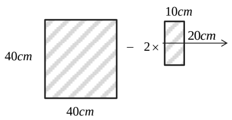


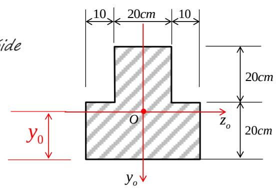
São dados: $\bar{\sigma}_t = 0$

$\bar{\sigma}_c = 4kN/cm^2$

Propriedades da seção

Determinação das coordenadas do centróide





$$y_o = \frac{40 \times 40 \times 20 - 2 \times 10 \times 20 \times 30}{40 \times 40 - 2 \times 10 \times 20}$$

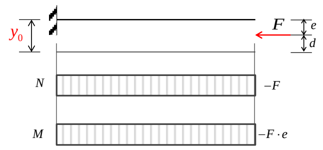
$$\boxed{y_o = \frac{20.000}{1.200} = 16,67cm}$$

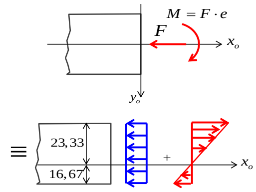
$$\boxed{A = 1.200cm^2}$$

$$I_{zo} = \frac{40 \times 40^3}{12} + (40 \times 40) \times (20 - 16,67)^2 + -2 \times \left[\frac{10 \times 20^3}{12} + (10 \times 20) \times (30 - 16,67)^2\right]$$

$$\boxed{I_{zo} = 146.666,67cm^4}$$

Situação 1: supondo d< y_o = 16,67 cm





Tensão na fibra superior – tração impossível

$$\sigma_{\max} \le 0$$

$$\sigma_N = -\frac{F}{A} \quad \sigma_M = \frac{M}{I_{zo}} y$$

$$-\frac{F}{1200} - \frac{F \times e \times (-23,33)}{146.666,67} \le 0$$

$$23,33 \times e \le \frac{146.666,67}{1200} \qquad \boxed{e \le 5,23cm}$$

O que leva a:

$$\boxed{d \ge 16,67 - 5,23 = 11,44cm}$$

Tensão na fibra inferior – máxima compressão $\sigma_{min} \geq -4kN/cm^2$

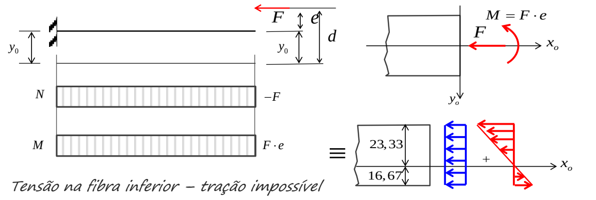
$$-\frac{F}{1200}-\frac{F\times 5,23\times 16,67}{146.666,67}\geq -4$$

Em módulo:

$$F\left(\frac{1}{1200}+\frac{5,23\times 16,67}{146.666,67}\right)\leq 4$$

$$\boxed{F\leq 2801,6kN}$$

Situação 2: supondo d>16,67 cm



Tensão na fibra inferior – tração impossível $\sigma_{max}\leq 0$

$$-\frac{F}{1200}+\frac{F\times e\times 16,67}{146.666,67}\leq 0$$

$$\sigma_N=-\frac{F}{A}\qquad \sigma_M=\frac{My}{I_{zo}}$$

$$16,67\times e\leq\frac{146.666,67}{1200}$$

$$\boxed{e\leq 7,33cm}$$

O que leva a :

$$\boxed{d=16,67+7,23\leq 24cm}$$

Logo $\boxed{11,44cm\leq d\leq 24cm}$

E o máximo d=24 cm!

Tensão na fibra superior – máxima compressão $\sigma_{min}\geq -4kN/cm^2$

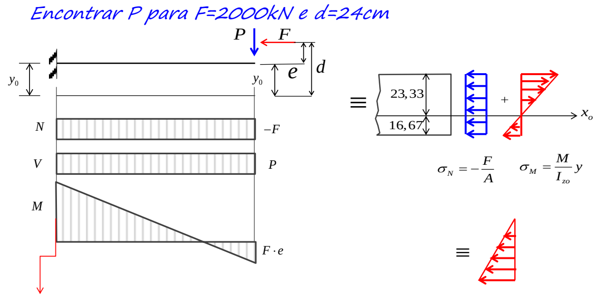
$$-\frac{F}{1200}+\frac{F\times 7,33\times(-23,33)}{146.666,67}\geq -4$$

Em módulo:

$$F\left(\frac{1}{1200}+\frac{7,33(23,33)}{146.666,67}\right)\leq 4$$

$$\boxed{F\leq 2.000,7kN}$$

Encontrar P para F=2000kN e d=24cm



$$M_{max}=-P\cdot\ell+F\cdot e$$

$$\sigma_N+\sigma_M$$

Tensão na fibra superior – tração impossível $\sigma_{\max} \leq 0$

$$-\frac{F}{A}+\frac{F\times e\times y_s}{I_{zo}}-\frac{P\times \ell\times y_s}{I_{zo}}\leq 0$$

(note que y_s <0)

$$-\frac{2000,7}{1200}+\frac{2000,7\times 7,33\times(-23,33)}{146.666,67}-\frac{P\times 300\times(-23,33)}{146.666,67}\leq 0$$

$$-1,6673-2,3328+0,0477P\leq 0$$

$$0,0477P\leq 4,0001$$

$$\boxed{P\leq 83,8kN}$$

Tensão na fibra inferior – máxima compressão $\sigma_{\min} \geq -4$

$$-\frac{F}{A}+\frac{F\times e\times y_i}{I_{zo}}-\frac{P\times \ell\times y_i}{I_{zo}}\geq -4$$

(note que y_i >0)

Em módulo:

$$\frac{2000,7}{1200}-\frac{2000,7\times 7,33\times 16,67}{146.666,67}+\frac{P\times 300\times 16,67}{146.666,67}\leq 4$$

$$1,6673-1,6668+\frac{P}{29,3275}\leq 4$$

$$\boxed{P\leq 117,3kN}$$

Logo: $\boxed{P_{\max}=83,8kN}$