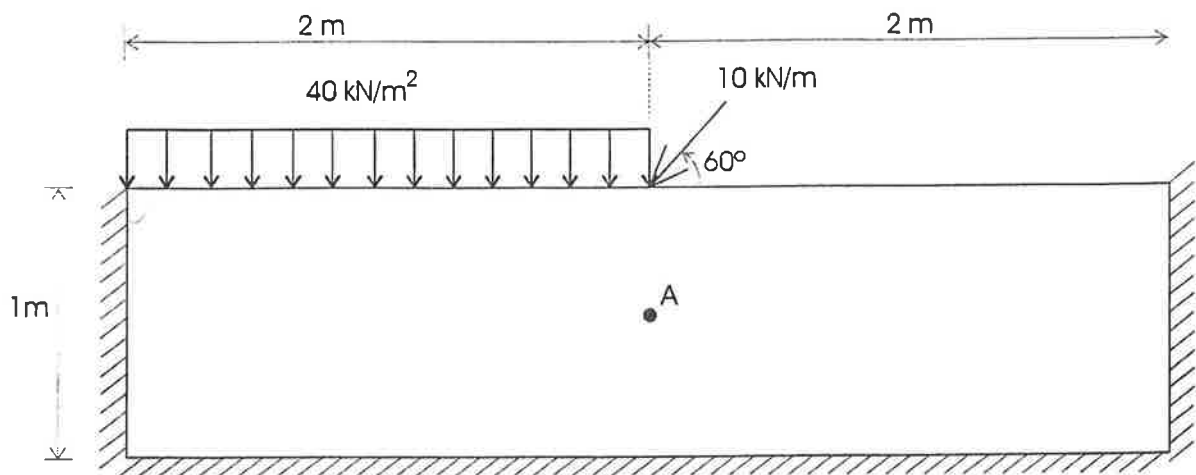
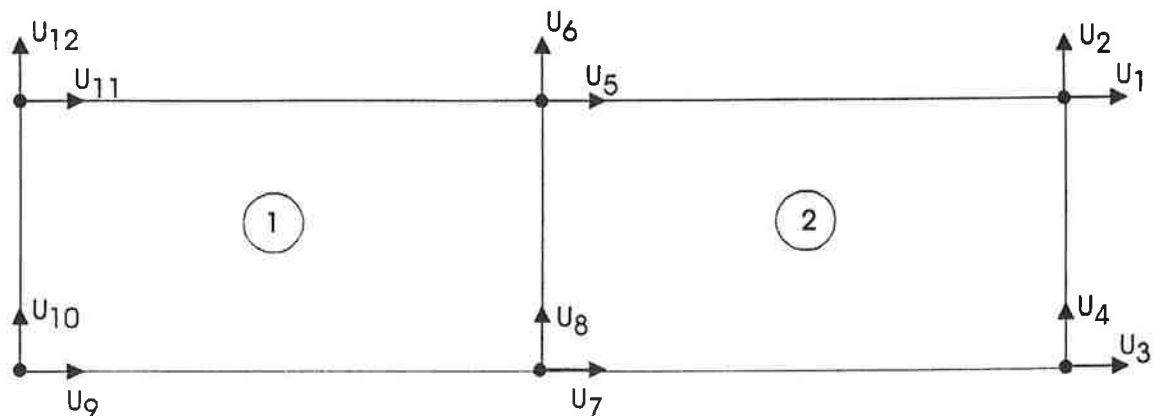


2ª. Questão: (5,0) Considere a chapa esquematizada na figura abaixo:



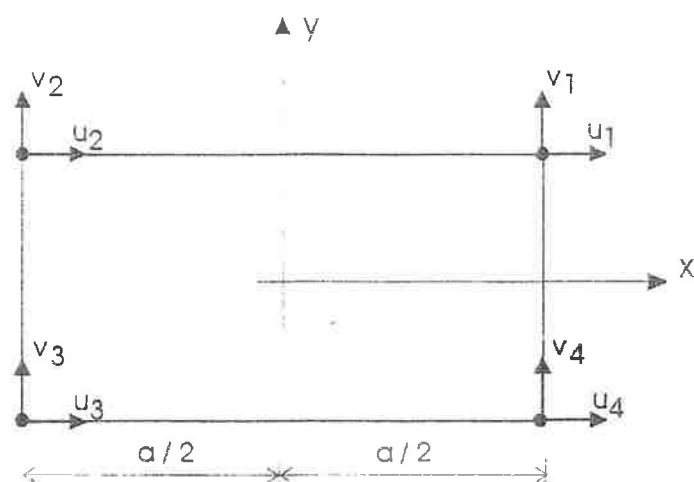
Considere ainda a seguinte discretização por elementos finitos:



- Determinar os deslocamentos nodais.
- Determinar as expressões que fornecem os deslocamentos e as deformações para um ponto genérico do elemento 1.
- Determinar os deslocamentos para o ponto A, que está localizado no centro geométrico da chapa. Determinar a tensão σ_{xx} para o ponto A considerando-o como um ponto do elemento 1.

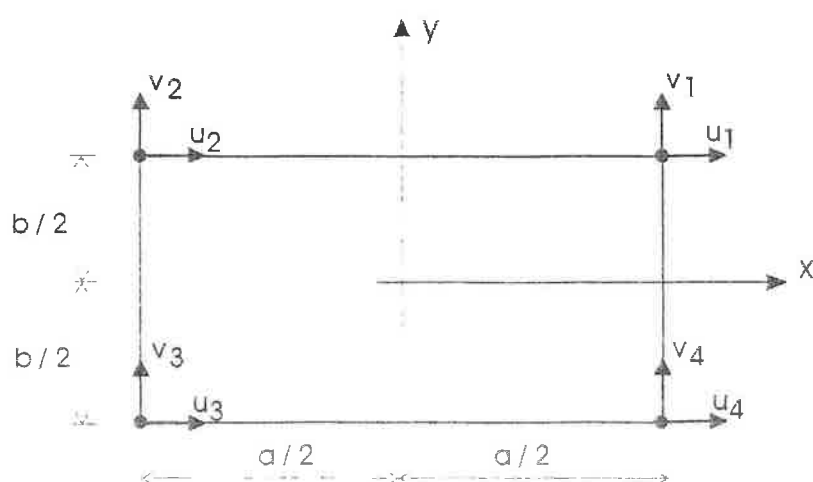
Dados:

Matriz de Rigidez do elemento 1 por unidade de espessura da chapa referida ao sistema local:



$$[k] = \begin{bmatrix} 8791209 & 3571429 & -1098901 & -274725 & -4395604 & -3571429 & -3296703 & 274725 \\ 3571429 & 15934066 & 274725 & 6043956 & -3571429 & -7967033 & -274725 & -14010989 \\ -1098901 & 274725 & 8791209 & -3571429 & -3296703 & -274725 & -4395604 & 3571429 \\ -274725 & 6043956 & -3571429 & 15934066 & 274725 & -14010989 & 3571429 & -7967033 \\ -4395604 & -3571429 & -3296703 & 274725 & 8791209 & 3571429 & -1098901 & -274725 \\ -3571429 & -7967033 & -274725 & -14010989 & 3571429 & 15934066 & 274725 & 6043956 \\ -3296703 & -274725 & -4395604 & 3571429 & -1098901 & 274725 & 8791209 & -3571429 \\ 274725 & -14010989 & 3571429 & -7967033 & -274725 & 6043956 & -3571429 & 15934066 \end{bmatrix} \begin{matrix} u1 \\ v1 \\ u2 \\ v2 \\ u3 \\ v3 \\ u4 \\ v4 \end{matrix}$$

Funções de interpolação h_i



$$h_1(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2x}{a} \right) \left(1 + \frac{2y}{b} \right)$$

$$h_2(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2x}{a} \right) \left(1 + \frac{2y}{b} \right)$$

$$h_3(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2x}{a} \right) \left(1 - \frac{2y}{b} \right)$$

$$h_4(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2x}{a} \right) \left(1 - \frac{2y}{b} \right)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$\nu = 0.3$$

A carga concentrada está dada por unidade de espessura da chapa.

Resolução da 2ª Questão da prova - PEF-129

Sistema de equações

$$\begin{bmatrix} K_{55} & K_{56} \\ K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$$

$$K_{55} = k_{11}^{(1)} + k_{33}^{(2)} = 8791209 + 8791209 = 17582418$$

$$K_{56} = k_{12}^{(1)} + k_{34}^{(2)} = K_{65} = 3571429 + (-3571429) = 0$$

$$K_{66} = k_{22}^{(1)} + k_{44}^{(2)} = 15934066 + 15934066 = 31868132$$

$$R_6 = - (40 \times 2) / 3 - 10 \frac{\sqrt{3}}{2} = -40 - 8,66 = -48,66$$

$$R_5 = -5$$

$$\begin{bmatrix} 17582418 & 0 \\ 0 & 31868132 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ -48,66 \end{Bmatrix}$$

$$U_6 = - \frac{48,66}{31868132} = -1,52693 \times 10^{-6}$$

$$U_5 = - \frac{5}{17582418} = -2,84375 \times 10^{-7}$$

Deslocamentos

$$u = \sum_{i=1}^4 h_i u_i = h_1 u_1 = h_1 U_5$$

$$h_1(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2x}{2}\right) \left(1 + \frac{2y}{1}\right) = \frac{1}{4} (1+x)(1+2y)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{4} (1+x)(1+2y) U_5 = -7,1 \times 10^{-8} (1+x)(1+2y)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{4} (1+x)(1+2y) U_6 = -3,8 \times 10^{-7} (1+x)(1+2y)$$

Deformações

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial h_1}{\partial x} U_5 \quad \frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{1}{4} (1+2y), \quad \frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{1}{2} (1+x)$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{4} (1+2y) U_5 = -7,1 \times 10^{-8} (1+2y)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{2} (1+x) U_6 = -7,6 \times 10^{-7} (1+x)$$

$$\gamma_{xy} = -1,42 \times 10^{-7} (1+x) - 3,8 \times 10^{-7} (1+2y)$$

Para o ponto A

$$u_A = -1,42 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$v_A = -7,6 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy})$$

$$\epsilon_{xx}|_A = -7,11 \times 10^{-8}$$

$$\epsilon_{yy}|_A = -1,58 \times 10^{-6}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{2,1 \times 10^7}{0,91} (-7,11 \times 10^{-8} - 1,58 \times 10^{-6} \times 0,3)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{2,1 \times 10^7 \times (-5,45 \times 10^{-7})}{0,91} = -12,57 \text{ kN/m}^2$$