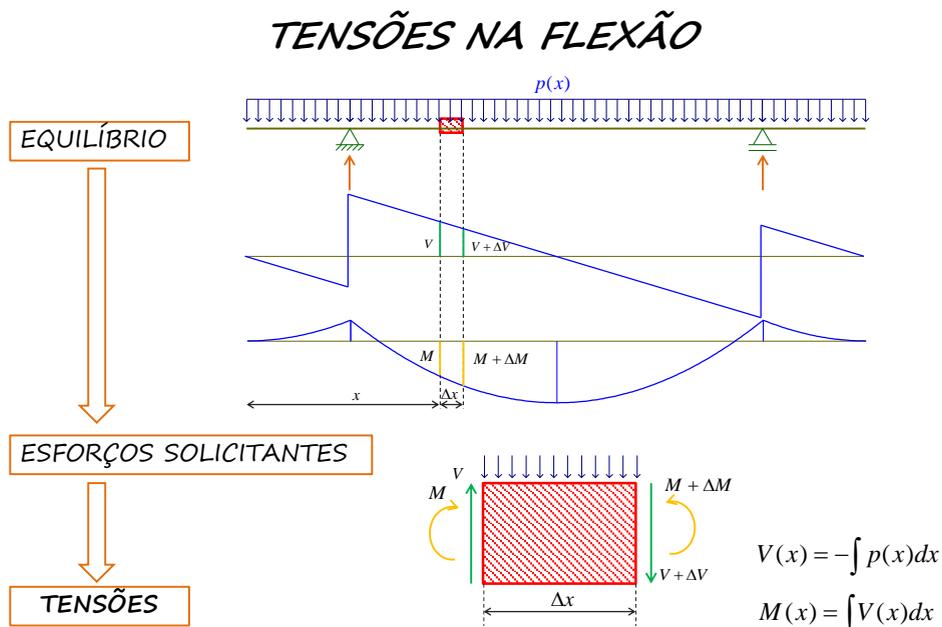


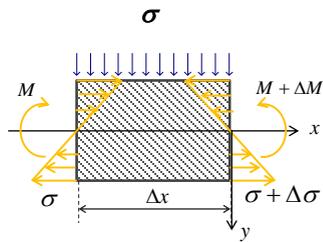
## Tensões na Flexão

(Aula 9 - 24/10/2016)

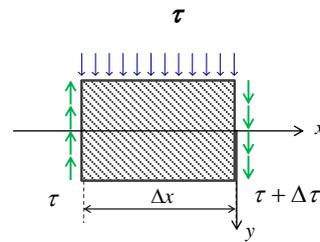
Professores  
Ruy Marcelo O. Pauletti & Leila Meneghetti Valverdes  
2º Semestre 2016



### Tensões Normais



### Tensões de Cisalhamento



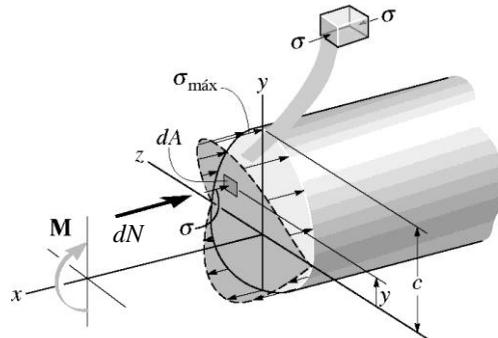
*Nota: O momento resultante das tensões  $\sigma$  deve equilibrar o momento resultante das tensões  $\tau$*

$$dM = Vdx$$

$$V = \frac{dM}{dx}$$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



$$dN = \sigma dA$$

$$dM = dN \cdot y = \sigma \cdot y dA \quad \rightarrow \quad M = \int_A dM = \int_A \sigma \cdot y dA$$

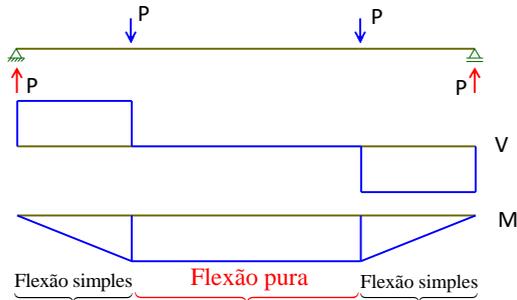


PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



**FLEXÃO SIMPLES:** 
$$N = \int_A \sigma dA = 0$$

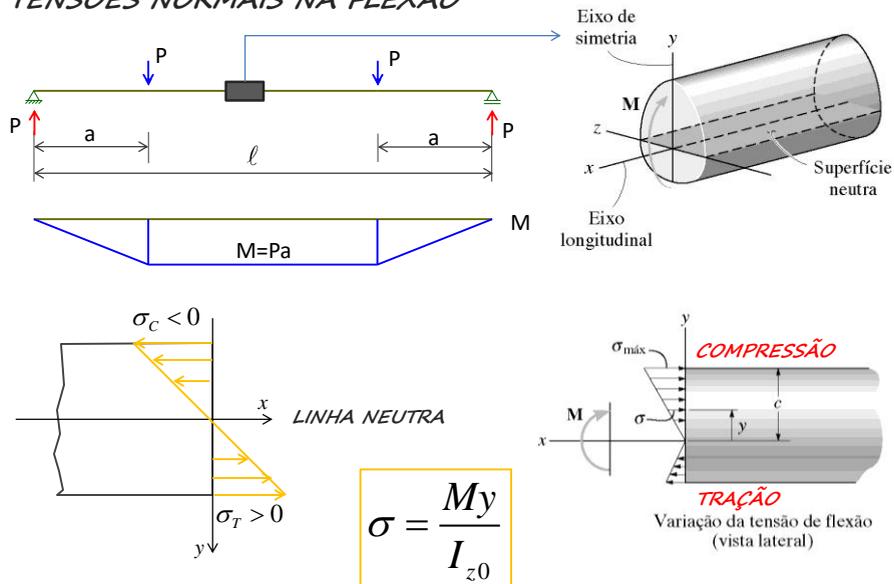
**FLEXÃO PURA:** 
$$N = 0 ; V = 0 \Leftrightarrow M = cte$$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



### TENSÕES NORMAIS NA FLEXÃO



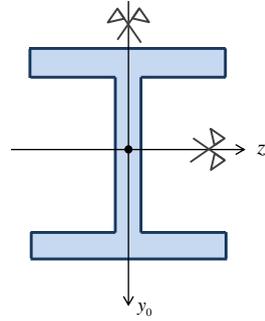
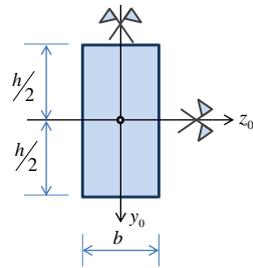
PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



Na flexão normal simples, a linha neutra passa pelo baricentro da seção!

EIXO BARICÊNTRICO

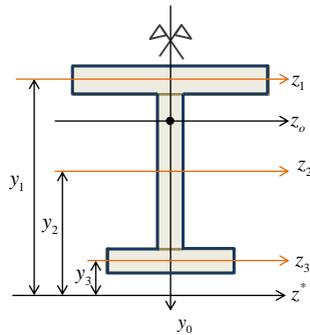
“centro de massa”  
“centro geométrico”



O baricentro fica sobre um eixo de simetria

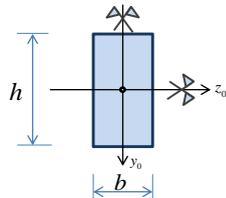


PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



$$y_o = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

Momento de inércia de um retângulo em relação aos eixos que passam pelo eixo baricêntrico



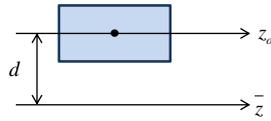
$$I_{z_0} = \frac{bh^3}{12}$$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

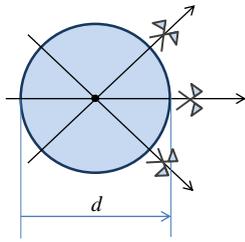


Mudança de eixos – Teorema de Steiner (ou dos eixos paralelos)

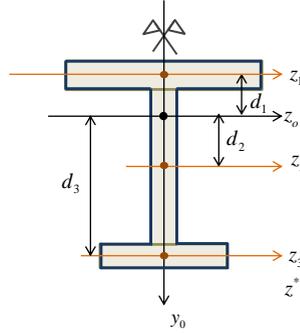


$$I_z = I_{z_0} + Ad^2$$

$$I_{z_0} < I_z \quad \forall d \quad \therefore I_{z_0} \text{ é mínimo}$$



$$I_{z_0} = \frac{\pi d^4}{64}$$



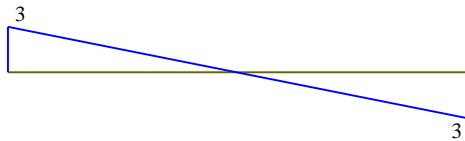
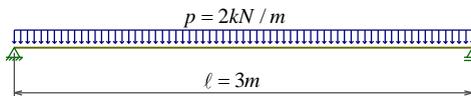
$$I_{z_0} = \sum I_{z_i} + A_i d_i^2$$



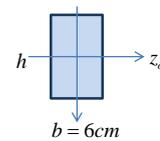
PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



Exemplo: Encontrar a altura  $h$  da viga, sabendo que a tensão de ruptura do material é  $\sigma_r = 3\text{kN/cm}^2$  com um coeficiente de segurança,  $s = 3$



$$M_{\max} = \frac{pl^2}{8} = \frac{2 \times 3^2}{8} = 2,25\text{kN.m}$$



O momento de inércia vale:

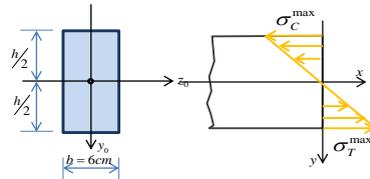
$$I_{z_0} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{z_0} = \frac{6 \times h^3}{12} = \frac{h^3}{2}$$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados





$$\sigma_T^{\max} = \sigma_C^{\max} = \frac{M \times (h/2)}{I_{z_0}}$$

$$\sigma_T^{\max} \leq \bar{\sigma} = \frac{\sigma_r}{s}$$

$$\frac{M_{\max} \times (h/2)}{I_{z_0}} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{M_{\max} \times (h/2)}{(h^3/2)} \leq \bar{\sigma}$$

$$h \geq \sqrt{\frac{M_{\max}}{\bar{\sigma}}} = \sqrt{\frac{225 \text{ kN.cm}}{1 \text{ kN/cm}^2}} = 15 \text{ cm}$$

Padrão comercial: 6cm x 16cm

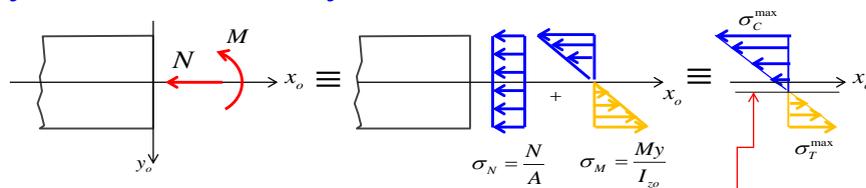


PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



### FLEXÃO COMPOSTA

Ação combinada de esforço normal, N e momento fletor, M



$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{My}{I_{z_0}}$$

$$\sigma_C^{\max} \neq \sigma_T^{\max}$$

Linha Neutra  
não passa pelo  
eixo baricêntrico



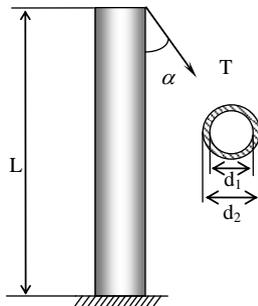
PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



**Exemplo:**

Um poste de alumínio é fixado na base e puxado no topo por um cabo com uma força de tração  $T$ , conforme a figura, fazendo um ângulo  $\alpha=30^\circ$  com a vertical. O poste tem comprimento  $L=2,0\text{m}$  e uma seção transversal circular vazada, de diâmetro externo  $d_2=250\text{mm}$  e interno  $d_1=200\text{mm}$ .

Determine a força transversal admissível no cabo, se a tensão admissível no poste for de  $80\text{MPa}$ .



$$80\text{MPa} = 8\text{kN} / \text{cm}^2$$

$$\sin 30^\circ = 0,5$$

$$\cos 30^\circ = 0,86603$$

$$A = \frac{\pi \times (d_2^2 - d_1^2)}{4} = 176,71 \text{ cm}^2$$

$$I = \frac{\pi \times (d_2^4 - d_1^4)}{64} = 11320,78 \text{ cm}^4$$

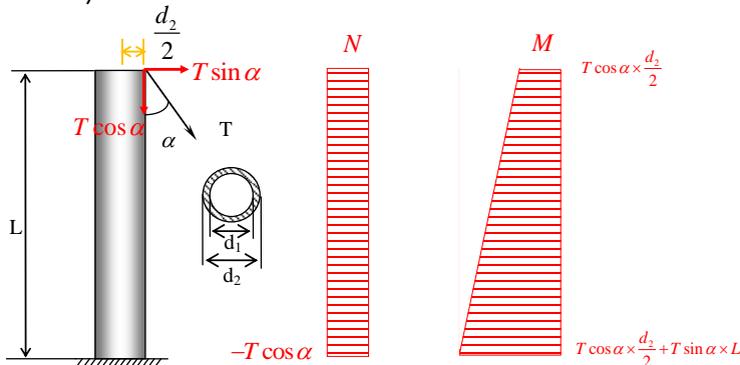


PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

**Exemplo:**

Um poste de alumínio é fixado na base e puxado no topo por um cabo com uma força de tração  $T$ , conforme a figura, fazendo um ângulo  $\alpha=30^\circ$  com a vertical. O poste tem comprimento  $L=2,0\text{m}$  e uma seção transversal circular vazada, de diâmetro externo  $d_2=250\text{mm}$  e interno  $d_1=200\text{mm}$ .

Determine a força transversal admissível no cabo, se a tensão admissível no poste for de  $80\text{MPa}$ .



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



*Flexão composta:*  $\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y$

*Na extremidade livre:*  $N = -T \cos \alpha$  ;  $M = T \cos \alpha \times \frac{d_2}{2}$

$$\sigma_{\min}^c = -\frac{T \cos \alpha}{A} - \frac{(T \cos \alpha \times \frac{d_2}{2}) \times \frac{d_2}{2}}{I} \geq -8 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$-\frac{T \times 0,86603}{176,71} - \frac{(T \times 0,86603 \times 12,5) \times 12,5}{11320,78} = -1,6854 \times 10^{-2} T \geq -8$$

$$1,6854 \times 10^{-2} T \leq 8$$

$$T \leq 476,66 \text{ kN}$$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



*Na base (extremidade engastada):*  $N = -T \cos \alpha$  ;  $M = T \cos \alpha \times \frac{d_2}{2} + T \sin \alpha \times L$

$$\sigma_{\min}^c = -\frac{T \cos \alpha}{A} - \frac{(T \cos \alpha \times \frac{d_2}{2} + T \sin \alpha \times L) \times \frac{d_2}{2}}{I} \geq -8$$

$$\sigma_{\min}^c = -\frac{T \times 0,86603}{176,71} - \frac{(T \times 0,86603 \times 12,5 + T \times 0,5 \times 200) \times 12,5}{11320,78} \geq -8$$

$$-0,12727T \geq -8$$

$$0,12727T \leq 8$$

$$\Rightarrow T \leq 62,86 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow T_{\max} = 62,86 \text{ kN}$$



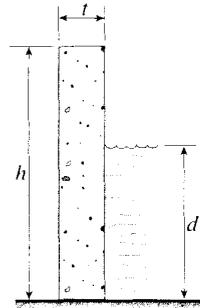
PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



Exemplo:

Uma pequena barragem é constituída de uma parede de concreto-massa, de peso específico  $\gamma_c = 23 \text{ kN/m}^3$ , que se apoia sobre uma fundação segura. A altura da parede vale  $h = 2 \text{ m}$  e a sua espessura é  $t = 0,3 \text{ m}$ .

- (a) determine as tensões de compressão e tração máximas na base da parede, quando a água atinge o topo ( $d = h$ ).
- (b) determine a profundidade máxima permissível  $d_{\text{max}}$  da água, para que não ocorram tensões de tração no concreto.

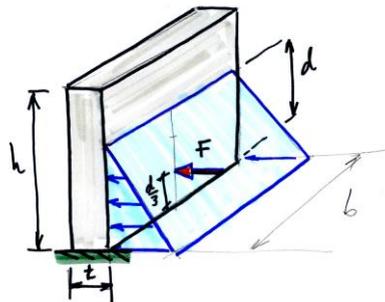


PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

Exemplo:

Uma pequena barragem é constituída de uma parede de concreto-massa, de peso específico  $\gamma_c = 23 \text{ kN/m}^3$ , que se apoia sobre uma fundação segura. A altura da parede vale  $h = 2 \text{ m}$  e a sua espessura é  $t = 0,3 \text{ m}$ .

- (a) determine as tensões de compressão e tração máximas na base da parede, quando a água atinge o topo ( $d = h$ ).
- (b) determine a profundidade máxima permissível  $d_{\text{max}}$  da água, para que não ocorram tensões de tração no concreto.



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



Peso da barragem:  $W_{barragem} = (b \times t \times h) \times \gamma_c$

Pressão hidrostática, para uma coluna d'água de altura  $d$ :

$$p = d \times \gamma_w \quad (\gamma_w = 10 \text{ kN} / \text{m}^3)$$

Força linearmente distribuída, variando linearmente desde zero na superfície até um valor:

$$q = (d \times \gamma_w) \times b \quad (\text{em kN/m})$$

Resultante da força horizontal aplicada pela água à barragem

$$F = q \times \frac{d}{2} = \frac{1}{2} (d^2 \times \gamma_w) \times b$$

Momento fletor na base da barragem, devido à  $F$ :

$$M = F \times \frac{d}{3} = \frac{1}{6} (d^3 \times \gamma_w) \times b$$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



Tensões na base da barragem:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y$$

Área de momento de inércia da seção transversal da base:

$$A = b \times t \quad ; \quad I = \frac{bt^3}{12}$$

$$\sigma_{\min, \max} = -\frac{W}{A} \mp \frac{M}{I} y_{\max} = -\frac{(b \times t \times h) \times \gamma_c}{bt} \mp \frac{M}{\left(\frac{bt^3}{12}\right)} \times \frac{t}{2}$$

$$\sigma_{\min, \max} = -h \times \gamma_c \mp \frac{\frac{1}{6} (d^3 \times \gamma_w) \times b}{\left(\frac{bt^3}{12}\right)} \times \frac{t}{2}$$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



$$\sigma_{\min, \max} = -h \times \gamma_c \mp \frac{d^3}{t^2} \times \gamma_w$$

$$\sigma_{\min, \max} = -2,0 \times 23 \mp \frac{(2,0)^3}{0,3^2} \times 10 = -46 \mp 888,9 \quad (\text{kN/m}^2 = \text{kPa})$$

$$\begin{cases} \sigma_{\min} = -46 - 888,89 = -934,9 \text{ kPa} & (\text{compressão máxima!}) \\ \sigma_{\max} = -46 + 888,89 = 842,9 \text{ kPa} & (\text{tração máxima!}) \end{cases}$$

(b) Profundidade máxima para não haver tração:

$$\sigma_{\max} = -h \times \gamma_c + \frac{d_{\max}^3}{t^2} \times \gamma_w = 0$$

$$\Rightarrow d_{\max}^3 = h \times t^2 \times \frac{\gamma_c}{\gamma_w} = 2 \times 0,3^2 \times 2,3 = 0,414$$

$$\Rightarrow d_{\max} = \sqrt[3]{0,414} = 0,745 \text{ m}$$



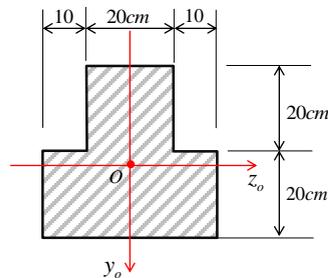
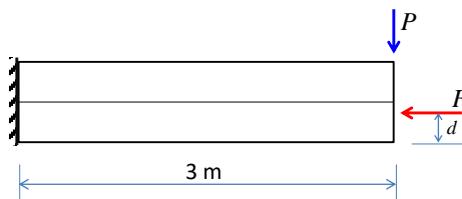
PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



Exemplo viga protendida:

- Qual máxima distância  $d$  (contada a partir da extremidade inferior da peça) que se pode aplicar uma força de protensão  $F$ ?
- Qual o valor máximo de  $F$  aplicado na distância  $d$  calculada no item anterior?
- Na situação definida nos itens "a" e "b", qual o valor máximo de  $P$  que pode ser aplicado na extremidade livre da viga (de cima para baixo)?

Desconsiderar o peso próprio da peça.



São dados:

$$\bar{\sigma}_t = 0$$

$$\bar{\sigma}_c = 4 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

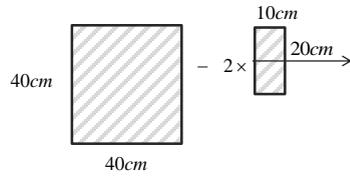


PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



### Propriedades da seção

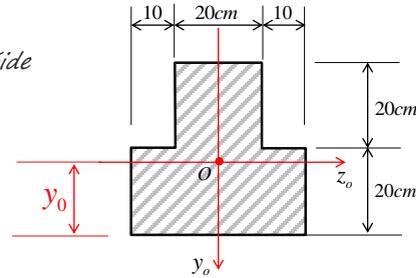
Determinação das coordenadas do centróide



$$y_o = \frac{40 \times 40 \times 20 - 2 \times 10 \times 20 \times 30}{40 \times 40 - 2 \times 10 \times 20}$$

$$y_o = \frac{20.000}{1.200} = 16,67 \text{ cm}$$

$$A = 1.200 \text{ cm}^2$$



$$I_{z_o} = \frac{40 \times 40^3}{12} + (40 \times 40) \times (20 - 16,67)^2 + 2 \times \left[ \frac{10 \times 20^3}{12} + (10 \times 20) \times (30 - 16,67)^2 \right]$$

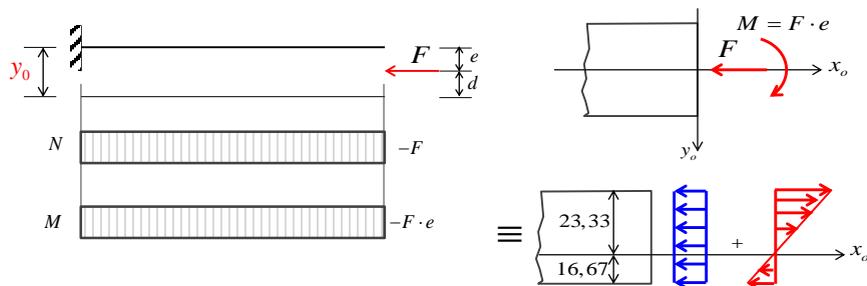
$$I_{z_o} = 146.666,67 \text{ cm}^4$$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



Situação 1: supondo  $d < y_o = 16,67 \text{ cm}$



Tensão na fibra superior - tração impossível

$$\sigma_{\max} \leq 0$$

$$-\frac{F}{1200} - \frac{F \times e \times (-23,33)}{146.666,67} \leq 0$$

$$23,33 \times e \leq \frac{146.666,67}{1200}$$

$$e \leq 5,23 \text{ cm}$$

O que leva a:

$$d \geq 16,67 - 5,23 = 11,44 \text{ cm}$$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



Tensão na fibra inferior – máxima compressão  $\sigma_{\min} \geq -4 \text{ kN/cm}^2$

$$-\frac{F}{1200} - \frac{F \times 5,23 \times 16,67}{146.666,67} \geq -4$$

Em módulo:

$$F \left( \frac{1}{1200} + \frac{5,23 \times 16,67}{146.666,67} \right) \leq 4$$

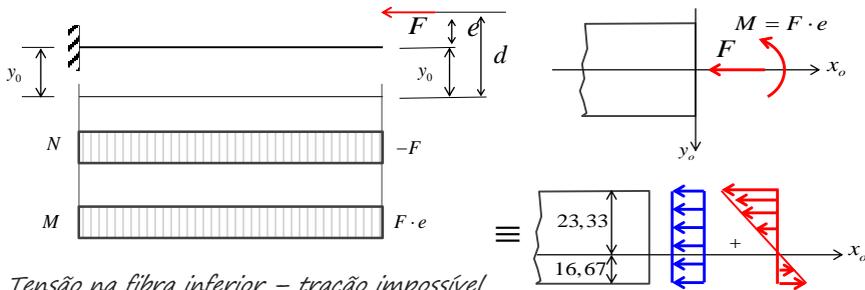
$$F \leq 2801,6 \text{ kN}$$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



Situação 2: supondo  $d > 16,67 \text{ cm}$



Tensão na fibra inferior – tração impossível

$$-\frac{F}{1200} + \frac{F \times e \times 16,67}{146.666,67} \leq 0 \quad \sigma_{\max} \leq 0$$

$$16,67 \times e \leq \frac{146.666,67}{1200} \quad e \leq 7,33 \text{ cm}$$

O que leva a :

$$d = 16,67 + 7,23 \leq 24 \text{ cm}$$

Logo  $11,44 \text{ cm} \leq d \leq 24 \text{ cm}$  E o máximo  $d = 24 \text{ cm}$ !



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



Tensão na fibra superior – máxima compressão  $\sigma_{\min} \geq -4 \text{ kN} / \text{cm}^2$

$$-\frac{F}{1200} + \frac{F \times 7,33 \times (-23,33)}{146.666,67} \geq -4$$

Em módulo:

$$F \left( \frac{1}{1200} + \frac{7,33 \times (23,33)}{146.666,67} \right) \leq 4$$

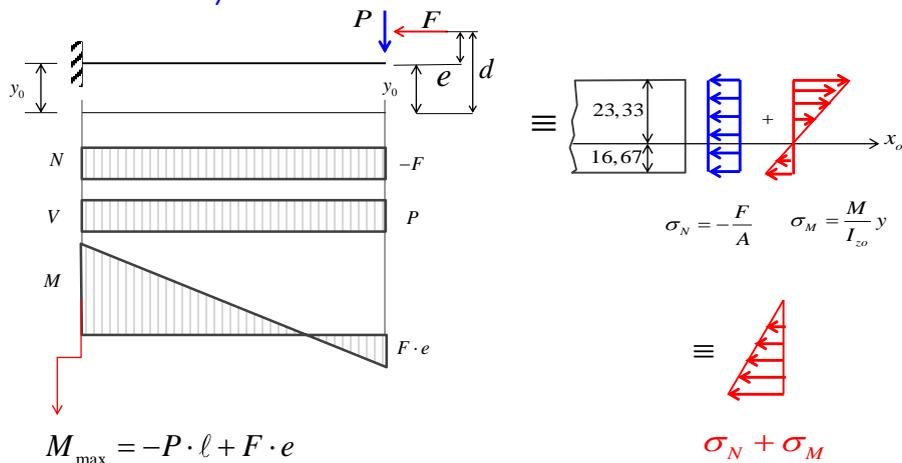
$$F \leq 2.000,7 \text{ kN}$$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



Encontrar  $P$  para  $F=2000\text{kN}$  e  $d=24\text{cm}$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



Tensão na fibra superior – tração impossível  $\sigma_{\max} \leq 0$

$$-\frac{F}{A} + \frac{F \times e \times y_s}{I_{z0}} - \frac{P \times \ell \times y_s}{I_{z0}} \leq 0 \quad (\text{note que } y_s < 0)$$

$$-\frac{2000,7}{1200} + \frac{2000,7 \times 7,33 \times (-23,33)}{146.666,67} - \frac{P \times 300 \times (-23,33)}{146.666,67} \leq 0$$

$$-1,6673 - 2,3328 + 0,0477P \leq 0$$

$$0,0477P \leq 4,0001$$

$$P \leq 83,8kN$$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



Tensão na fibra inferior – máxima compressão  $\sigma_{\min} \geq -4$

$$-\frac{F}{A} + \frac{F \times e \times y_i}{I_{z0}} - \frac{P \times \ell \times y_i}{I_{z0}} \geq -4 \quad (\text{note que } y_i > 0)$$

Em módulo:

$$\frac{2000,7}{1200} - \frac{2000,7 \times 7,33 \times 16,67}{146.666,67} + \frac{P \times 300 \times 16,67}{146.666,67} \leq 4$$

$$1,6673 - 1,6668 + \frac{P}{29,3275} \leq 4$$

$$P \leq 117,3kN$$

Logo:  $P_{\max} = 83,8kN$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

