MAP5729 - Introdução à Análise Numérica

1º Semestre de 2014

Exercícios selecionados

Exercício 1 Demonstre as seguintes relações para o número de condição de matrizes de ordem n, com a norma subordinada:

(a) $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$;

(b) $\kappa(cA) = \kappa(A)$, para todo $c \in R$;

(c) $\kappa_2(V) = 1$ para qualquer matriz *ortogonal* V;

(d) $\kappa_2(VA) = \kappa_2(A)$ se V é uma matriz ortogonal;

Exercício 2 A matriz de Frobenius G_j que é usada na etapa j do método de eliminação de Gauss pode ser representada na forma

$$G_j = I - \sum_{i=j+1}^{n} l_{ij} e_i e_j^T,$$

onde I é a matriz identidade e e_k é o k-ésimo vetor da base canônica do R^n. Usando a representação acima, prove que

$$G_j^{-1} = I + \sum_{i=j+1}^{n} l_{ij} e_i e_j^T.$$

Exercício 3 Sob as hipóteses do teorema do ponto fixo de Banach, denote por $L < 1$ uma constante tal que

$$||\Phi(x) - \Phi(y)|| \leq L||x - y||.$$

Se $\bar{x}$ é o ponto fixo de Φ, demonstre as seguintes estimativas de erro:

$$||x^{(k)} - \bar{x}|| \leq \frac{L^k}{1-L}||x^{(1)} - x^{(0)}||, \quad k \geq 1 \quad \text{estimativa } \textit{a priori};$$
$$||x^{(k)} - \bar{x}|| \leq \frac{L}{1-L}||x^{(k)} - x^{(k-1)}||, \quad k \geq 1 \quad \text{estimativa } \textit{a posteriori}.$$

Exercício 4 Transforme o sistema não linear

$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} &= 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \operatorname{sen}(x_3) + 1.06 &= 0 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0 \end{aligned}$$

em um problema de ponto fixo $x = \Phi(x)$ isolando-se x_i na equação i. Prove então que o sistema tem uma única solução em $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$. Partindo-se de $x^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)$, estime quantas iterações do método de aproximações sucessivas são necessárias para se garantir um erro menor do que 10^{-5} com a norma do máximo.

Exercício 5 Sejam $L_i(x)$ os polinômios de Lagrange para pontos $x_0, \ldots, x_n$ dois a dois distintos, e seja $c_i = L_i(0)$. Mostre que

a)

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x_i^j = \begin{cases} 1 & \text{para } j = 0, \\ 0 & \text{para } j = 1, \ldots, n, \\ (-1)^n x_0 x_1 \ldots x_n & \text{para } j = n+1; \end{cases}$$

b)

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1.$$

Exercício 6

a) Dados os pares de números complexos (z_k, f_k), $k = 0, \ldots, N$, onde $z_k \neq z_l$ se $k \neq l$, mostre que existe um único polinômio complexo $p(z)$ de grau menor ou igual a N tal que $p(z_k) = f_k$, $k = 0, \ldots, n$.

b) Dados os pares (θ_k, f_k), $k = 0, \ldots, N$, onde $\theta_k = 2k\pi/(N+1)$ e os f_k são números complexos, mostre que existe um único polinômio trigonométrico

$$p(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{i\theta} + \cdots \alpha_N e^{iN\theta}$$

tal que $p(\theta_k) = f_k$, $k = 0, \ldots, N$.

Exercício 7 Discuta como aproximar as integrais

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{x} \cos(x)\, dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$$

usando n-Simpsons de forma a garantir convergência proporcional a h^4.

Exercício 8 Considere uma partição $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$ e seja $Y = \{y_0, \ldots, y_n\}$ um conjunto de $n+1$ números reais. Defina o espaço

$$C^2_{\Delta,Y} = \{f \in C^2([a,b]) \,|\, f(x_i) = y_i, 0 \leq i \leq n\}$$

e seja $S_{\Delta,Y}$ o subconjunto de $C^2_{\Delta,Y}$ formado pelos splines cúbicos $s(x)$ subordinados à partição Δ tais que $s(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$. Prove que se $f \in C^2_{\Delta,Y}$ e $s \in S_{\Delta,Y}$ então

$$\int_a^b [f''(x) - s''(x)]s''(x)\, dx = s''(b)[f'(b) - s'(b)] - s''(a)[f'(a) - s'(a)].$$

Mostre então que:

a) O único elemento de $C^2_{\Delta,Y}$ que minimiza $\|f''\|_2$ é o spline cúbico $s \in S_{\Delta,Y}$ tal que $s''(a) = 0$ e $s''(b) = 0$.

b) Entre todas as funções $f \in C^2_{\Delta,Y}$ tais que $f'(a) = \alpha$ e $f'(b) = \beta$, onde α e β são fixos, a única que minimiza $\|f''\|_2$ é o spline cúbico $s \in S_{\Delta,Y}$ tal que $s'(a) = \alpha$ e $s'(b) = \beta$.

Exercício 9 Considere a equação diferencial $y' = \lambda y$, onde λ é constante (real ou complexa). Se usarmos um método Runge-Kutta explícito com m estágios, as aproximações são claculadas por uma expressão da forma

$$\eta_{k+1} = F(h\lambda)\eta_k.$$

(a) Mostre que $F(\mu)$ é um polinômio de grau m em μ;

(b) Se o método tem ordem p ($p \leq m$), quais são os coeficientes de μ^j, $0 \leq j \leq p$? Justifique.

Exercício 10 Considere o método de passo múltiplo linear

$$\eta_{k+2} - (1+a)\eta_{k+1} + a\eta_k = \frac{h}{2}[(3-a)f_{k+1} - (1+a)f_k].$$

Mostre que o método tem ordem 2 e é zero-estável quando $a = 0$, e que ele tem ordem 3 mas não é zero-estável quando $a = -5$. O que se pode afirmar sobre a convergência em cada caso?