6^a Lista de Exercícios – Eletromagnetismo I – 2016/2
Entrega: 23 de Novembro.

6.1 Frequentemente é útil escrever uma onda plana monocromática usando a fórmula de Euler, e tomando a parte real dessa onda:

$$\vec{E} = Re\left[\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta)}\right] \equiv Re\left[\tilde{E}\right] \ , \qquad \vec{B} \equiv Re\left[\tilde{B}\right] = Re\left[\frac{1}{c}\hat{k}\times\tilde{E}\right] \ .$$

Mostre que podemos escrever a *média temporal* da densidade de energia do campo eletromagnético em termos desses campos complexos, como:

$$\langle u_{EM}\rangle_t = \frac{1}{4}Re\left[\varepsilon_0\tilde{E}\cdot\tilde{E}^* + \frac{1}{\mu_0}\tilde{B}\cdot\tilde{B}^*\right] \ .$$

onde o asterisco denota o complexo conjugado. Similarmente, mostre que a média temporal do vetor de Poyting é dada por:

$$\langle\vec{S}_P\rangle_t = \frac{1}{2\mu_0}Re\left[\tilde{E}\times\tilde{B}^*\right] \ .$$

6.2 Analise o caso da polarização *perpendicular* ao plano de incidência (em sala de aula vimos o caso de polarização *paralela* ao plano de incidência – ou seja, quando a direção do campo elétrico é paralela ao plano de incidência). Imponha as condições de contorno e obtenha as equações de Fresnel para o campo elétrico refletido e transmitido. Esboce os gráficos de $\frac{E_R}{E_I}$ e $\frac{E_R}{E_I}$ em função do ângulo de incidência para o caso em que $n_2/n_1 = 1.5$. Calcule os coeficientes de transmissão e reflexão, e mostre que a soma dos dois é 1.

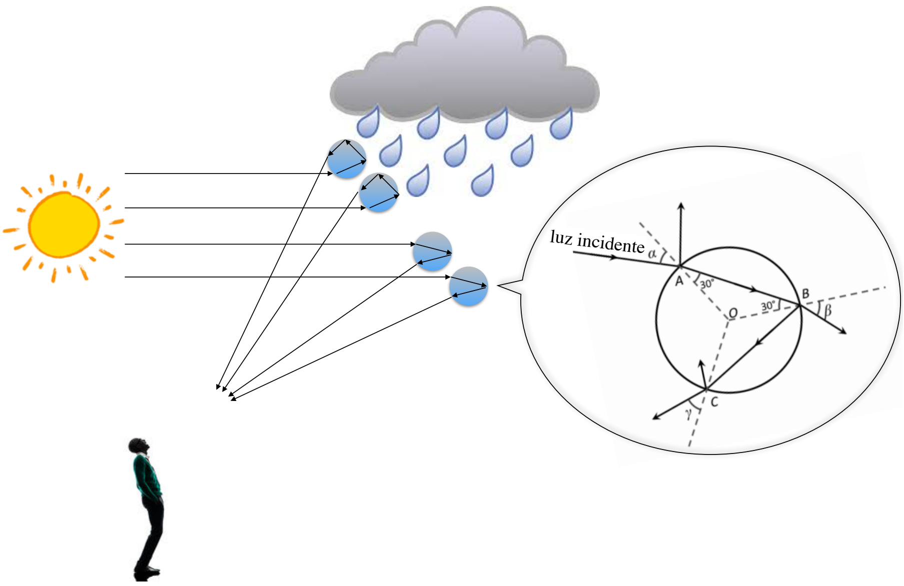
6.3 Problema-desafio: o arco-íris.
Um feixe de luz vermelha não-polarizada (tal como você espera do Sol num fim de tarde), de intensidade I_0, incide no ponto A de uma gota de água esférica (veja a figura na página seguinte). Em A, parte da luz é refletida, e parte é transmitida (refratada) para dentro da gota. A luz refratada atinge o ponto B onde, novamente, parte é refletida e parte é refratada. A luz que foi refletida no ponto B então atinge o ponto C, onde novamente, parte é refletida, parte é refratada. Utilizando um índice de refração para a água para luz vermelha de $n_v = 1.331$, responda:

a) Usando os dados da figura acima, qual é o ângulo α?

b) Qual a intensidade de luz que é refratada para dentro da gota em A? Utilize para isso os resultados para os índices de refração obtidos no caso de polarização paralela ao plano de incidência (feitos em sala de aula) e perpendicular ao plano de incidência (Problema 6.2, acima), lembrando que luz não-polarizada é, efetivamente, composta de 50% de luz em cada um desses dois estados de polarização (perpendicular e paralela ao plano de incidência).

c) Para qual valor do ângulo α a luz refletida em A seria totalmente polarizada na direção paralela ao plano de incidência?

d) Qual é o estado de polarização dominante da luz que emerge do ponto B?



e) Assuma que o mesmo feixe de luz incidente que você considerou acima contenha, além da luz vermelha, um pouco de luz azul. Qual seria a trajetória da luz azul? (O índice de refração da luz azul na água é $n_a = 1.343$.)

f) Se você observar um arco-íris no céu, vai notar que a faixa azul/violeta está abaixo da faixa avermelhada. Use os seus cálculos e a figura deste problema para explicar por quê a luz acaba separada dessa maneira.

g) Agora considere um feixe de luz que experimenta não dois, mas *três* reflexões internas dentro da gota d'água (veja as gotas mais acima na figura deste problema). De que modo as faixas de luz azul e vermelha estarão organizadas?

6.4 De acordo com a Lei de Snell, quando a luz passa de um meio opticamente denso para um meio menos denso ($n_1 > n_2$), o vetor de propagação $\vec{k}$ é desviado, de modo que o ângulo de transmissão é maior do que o ângulo de incidência. Em particular, quando o ângulo de incidência é igual a um ângulo crítico:

$$\theta_C \equiv \sin^{-1}(n_2/n_1) \ ,$$

então $\theta_T = 90°$, e a luz é transmitida paralelamente à interface do meio. Se $\theta_I > \theta_C$, temos o fenômeno da reflexão interna total, onde toda a luz é refletida (não há refração).

a) Considerando que a interface encontre-se no plano xy, mostre que na reflexão total para uma onda de frequência ω se propagando na direção z temos:

$$\tilde{E}_T(\vec{r}, t) = \tilde{E}_{0T} e^{\kappa z} e^{i(kx - \omega t)} \ ,$$

onde:

$$\kappa \equiv \frac{\omega}{c}\sqrt{(n_1 \sin\theta_I)^2 - n_2^2} \qquad \text{e} \qquad k \equiv \frac{\omega n_1}{c} \sin\theta_I \ .$$

b) Calcule o coeficiente de reflexão para a onda eletromagnética com polarização paralela ao plano de incidência.

c) Calcule o coeficiente de reflexão para a onda com a polarização perpendicular ao plano de incidência.

d) No caso da polarização perpendicular ao plano de incidência, mostre que a parte real dos campos transmitidos (que nesse caso são chamados campos evanescentes) são:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 e^{\kappa z}\cos(kx-\omega t)\hat{e}_y$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{E_0}{\omega}e^{\kappa z}[\kappa\sin(kx-\omega t)\hat{e}_x + k\cos(kx-\omega t)\hat{e}_z]$$

e) Mostre que, para os campos do item anterior, em média, nenhuma energia é transmitida na direção z.

6.5 Um plasma pode ser pensado como um gás clássico de íons e elétrons. A interação de uma onda eletromagnética será muito mais forte com os elétrons livres do que com os íons, já que estes têm massa muito maior.

a) Para uma onda plana, reescreva as equações de Maxwell usando as correspondências que seguem das transformadas de Fourier, $\nabla \to i\vec{k}$ e $\partial/\partial t \to -i\omega$.

b) Dado $\vec{J} = -eN\vec{v}$, a definição da densidade de corrente livre elétrons, onde N é a densidade e e a carga dos elétrons, mostre que a densidade de corrente induzida pelo campo elétrico da onda é:

$$\vec{J} = -i\frac{ne^2}{m\omega}\vec{E}\ ,$$

onde e e m são, respectivamente, a carga e a massa do elétron, e ω é a frequência da onda. Note que podemos escrever $\vec{J} = -en\vec{v}$, onde v é a velocidade dos elétrons. [**Dica**: Desconsidere a contribuição de $\vec{B}$ para força de Lorentz na equação de movimento.]

c) Utilizando a equação de Ampère-Maxwell e a Lei de Gauss na fomulação do item a), obtenha uma relação para k, tal que $k(\omega)$. Baseado nesta relação, ondas com qualquer frequência podem se propagar no interior do plasma? Justifique sua resposta e identifique em um gráfico $k \times \omega$ as regiões onde pode ou não existir propagação (um esboço feito a mão já é o suficiente).

6.6 [Ex. 10.19 do Griffiths] Calcule os campos elétrico e magnético de um fio reto e infinito, com densidade de carga λ, que se move com velocidade constante v na direção do fio. (*Dica: você pode usar as fórmulas para os campos de cargas pontuais em movimento retilíneo e uniforme, e integrar a distribuição dessas cargas ao longo do fio.*) Pense bem, e veja que você talvez pudesse obter esse mesmo resultado de um outro jeito mais "esperto" e menos trabalhoso.

6.7 Considere um plano infinito em $z = 0$ no qual fazemos passar uma densidade de corrente que oscila no tempo como $\vec{J}(t,z) = J_0\,\delta(z)\,e^{-i\omega t}\,\hat{x}$. Ou seja, é como se esse plano tivesse uma certa carga superficial, e ele se movimentasse por meio de oscilações harmônicas na direção x. Neste problema vamos verificar como a corrente na superfície desse plano inifinito gera ondas planas monocromáticas se propagando na direção z.

a) Mostre que a densidade de cargas desse sistema físico é constante, $\partial\rho/\partial t = 0$ – ou seja: o plano infinito em $z = 0$ pode apenas ter uma densidade de carga superficial constante.

b) Como a densidade de carga é constante, haverá uma solução eletrostática – que vamos desprezar, pois estamos interessados nos campos elétricos e magnéticos dinâmicos que aparecem nesse problema. Esses campos dinâmicos são, portanto, gerados exclusivamente pelo potencial-vetor $\vec{A}(t, \vec{x})$, cuja solução exata é dada por:

$$\vec{A}(t,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\vec{J}(t' = t_R, \vec{x}\,')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} \ ,$$

onde $t_R = t - |\vec{x} - \vec{x}\,'|/c$ é o tempo retardado.

Usando coordenadas cilíndricas, mostre que podemos expressar $\vec{A}$ como:

$$\vec{A}(t,z) = \hat{x} \, \frac{\mu_0 J_0}{2} e^{-i\omega t} \int d\rho' \, \rho' \, \frac{e^{ik\sqrt{\rho'^2 + z^2}}}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}}$$

c) Partindo da expressão acima obtenha o campo magnético, cuja única componente é: $\vec{B}(t,z) = B_y \hat{y} = \partial A_x/\partial z$. Preste atenção aos casos em que $z > 0$ e em que $z < 0$.

d) Agora use a expressão encontrada no item (c) para obter diretamente o campo elétrico, $\vec{E}(t,z) = -\partial A_x/\partial t$.

e) Finalmente, mostre que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ correspondem a uma onda plana, polarizada linearmente, que se propaga com velocidade c na direção de $|z|$ crescente – ou seja, no sentido $+\hat{z}$ na região $z > 0$ e no sentido $-\hat{z}$ na região $z < 0$.

6.8 Neste problema vamos trabalhar a radiação de uma <u>antena de meia onda</u>. Suponha que um fio se situe ao longo do eixo z de $-\lambda/4$ a $+\lambda/4$ e que sua densidade de corrente seja dada por:

$$J_z(\vec{r}', t) = \delta(x')\delta(y') I_0 \mathrm{sen}(\omega \mathrm{t}) \cos(\frac{2\pi \mathrm{z}'}{\lambda}).$$

Assumindo que o ponto onde será medida a radiação da antena é muito distante, isto é, $\lambda \ll r$, onde λ é o comprimento da onda da antena, e desprezando termos de ordem r^{-2} ou superior,

a) Partindo da definição do vetor potencial $\vec{A}$, encontre:

$$A_z = -\frac{\mu_0 I_0}{4\pi r} \frac{\mathrm{sen}(\omega\mathrm{t} - \mathrm{rk})}{k} \left[2\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\mathrm{sen}^2\theta} \right].$$

Será necessário utilizar a expressão:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u\cos\theta)\cos u du = 2\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\mathrm{sen}^2\theta}$$

Dica: É preciso desenvolver $(1 - z'/r\cos\theta)^{-1}$ em série de potências para resolver a integral do potencial A_z. Contudo, basta tomar apenas os dois primeiros termos, umas vez que o segundo será desprezado pela aproximação assumida em r e, portanto, o mesmo valerá para os demais termos da série.

b) Escreva $\vec{A}$ encontrado no item a) em coordenadas esféricas e utilize o calibre de Lorentz (novamente desprezando termos de ordem r^{-2} ou superior) para encontrar:

$$A_r = A_z \cos\theta; \quad A_\theta = A_z \mathrm{sen}\theta; \quad \mathrm{A}_\varphi = 0;$$

$$\varphi(r,\theta) = -c\frac{\mu_0 I_0}{4\pi r}\cos\theta\frac{\mathrm{sen}(\omega\mathrm{t}-\mathrm{rk})}{\omega}\left[2\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\mathrm{sen}^2\theta}\right]$$

c) Calcule o vetor de Poynting e o fluxo médio de energia em uma superfície esférica qualquer. Em comparação com do problema 5.7 (lista anterior), o que este resultado nos diz?

6.9 - Carga puntiforme em movimento uniforme

a) Encontre os potencias $\vec{A}$ e ϕ para uma carga em movimento uniforme (ou seja, com velocidade constante).

b) Agora obtenha os potenciais através de uma transformação de Galileu a partir de uma carga em repouso. Mostre que os potenciais obtidos desses dois modos diferem por termos de ordem v/c, onde v é a velocidade da partícula e c é a velocidade da luz.

c) Os potenciais devem ser *covariantes* sob transformações de coordenadas, o que significa que deve haver uma transformação do "tipo Lorentz" para as "coordenadas" φ e $\vec{A}$. Qual é a transformação correta a ser usada – e que "corrige" a resposta encontrada no item (b)?

d) Verifique que a Lei de Gauss, $\oint d\vec{S}\cdot\vec{E} = Q/\epsilon_0$, vale para a carga em movimento uniforme, integrando sobre uma esfera de raio R centrada na carga.

e) Calcule o vetor de Poynting da carga em movimento uniforme (você pode assumir que a carga se move na direção z).