Instituto de Física da USP
Física Moderna I – 4300375
1º Semestre de 2014
Profª Márcia de Almeida Rizzutto

5ª Lista de Exercícios
Gabarito: Gabriel Marinello de Souza Santos

1 b) $\psi(+a/2) = \psi(-a/2) = 0$.

c) $E > 0$. Sempre sera estado ligado na região permitida.

2 a)

$$\begin{cases} \Psi(x,t) = 0 & , \quad |x| > a/2 \\ \Psi''(x,t) = -i\frac{2m}{\hbar}\dot{\Psi}(x,t) & , \quad 0 \le |x| \le a/2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \psi(x) = 0 \\ \psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \psi(x) = 0 & , \quad |x| > a/2 \\ \psi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) & , \quad 0 \le |x| \le a/2 \end{matrix}$$

c) Sim. $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2}$, $n = 1,2,3,\ldots$.

3 a)

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\cos(k_n x) \\ \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(k_n x) \end{cases}$$

b) $\langle x \rangle = 0$, $\langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{12}\left(1 - \frac{6}{n^2\pi^2}\right)$.

c) $\langle \hat{p} \rangle = 0$, $\langle \hat{p}^2 \rangle = \hbar^2 k_n^2$.

d) $\Delta x = \frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{1 - \frac{6}{n^2\pi^2}}$, $\Delta p = \frac{\hbar\pi n}{a}$.

4 b)

$$\begin{cases} \Psi_I(-a,t) = \Psi_{II}(-a,t) \\ \Psi'_I(-a,t) = \Psi'_{II}(-a,t) \\ \Psi_{II}(+a,t) = \Psi_{III}(+a,t) \\ \Psi'_{II}(+a,t) = \Psi'_{III}(+a,t) \end{cases}$$

c) As energias permitidas são $\forall E > 0$. Ligado se $0 < E < V_0$, e não ligado se $E > V_0$. As regiões classicamente permitidas são $-a < x < -a\sqrt{1 - E/V_0}$ **ou** $a\sqrt{1 - E/V_0} < x < a$ para os estados ligados e $\forall x$ para os estados não ligados.

5 a)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) = i\hbar\Psi(x,t) \rightarrow \Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}$$

6

7 b)

$$C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$$

c) As posições mais prováveis se encontram em $x_0 = \pm\sqrt{\frac{5}{2\alpha}}$

d) $\langle x\rangle = 0$, $\langle x^2\rangle = \frac{5}{2}\frac{\hbar}{m\omega}$.

e) $\langle \hat{p}\rangle = 0$, $\langle \hat{p}^2\rangle = \frac{1}{2}m\hbar\omega$.

8 b) Sim.

9 b)

$$\left\{\begin{array}{c} \psi''(x) = \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\psi(x) \\ \psi''(x)\left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2x^2}{\hbar^2}\right)\psi(x) = 0 \\ \psi''(x) = \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\psi(x) \end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{ccc} \psi(x) = A\exp(kx) & , & x < -a \\ \psi(x) = g(\alpha x) & , & -a \le x \le a \\ \psi(x) = B\exp(-kx) & , & x > +a \end{array}$$

onde $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ e $g(\xi)$ é tal que $g''(\xi) - (\lambda - \xi^2)g(\xi) = 0$, $\lambda = 2E/\hbar\omega$. A restrição nas constantes é dada por:

$$|A|^2\exp(-2ka) + |B|^2\exp(-2ka) + \int_{-a}^{+a} g^*(\alpha x)g(\alpha x)dx = 1$$

c)

$$\exp(-ka) = g(-a) = g(a) \quad , \quad \left\{\begin{array}{l} k\exp(-ka) = g'(-a) \\ -k\exp(-ka) = g'(a) \end{array}\right.$$

10 a)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi(x,y,t) = i\hbar\Psi(x,y,t) \rightarrow \Psi(x,t) = Ae^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

b) Sim, $\vec{p} = \hbar k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}\right)$, onde $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.