26/9/2011

Mais sobre distribuições...

Transformada de Fourier de distribuições

Considere uma seqüência de funções r.d. $\{f_n(x),\ n=1,\cdots\}$ que define uma distribuição

$$\{f_n(x),\ n=1,\cdots\} \approx f(x)$$

Nós vimos anteriormente que a transformada de Fourier de uma função r.d. é uma função também r.d.

Dessa forma, cada função $f_n(x)$ da seqüência possui sua transformada de Fourier

$$F_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} f(x) = \mathcal{F}_k[f_n(x)]$$

(notação)

A seqüência $\{F_n(k),\ n=1,\cdots\}$ define uma distribuição

$$\{F_n(k),\ n=1,\cdots\} \approx F(k)$$

que é dita a transformada de Fourier da distribuição $f(x)$ e escrevemos, formalmente

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, f(x) \, e^{ikx}$$

embora estejamos cientes que $f(x)$ é uma distribuição e essa integral deve ser entendida em termos dos limites discutidos anteriormente.

Ex: Transformada da $\delta(x)$

$$\mathcal{F}_k[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{ikx} \, \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

⊛ Faça a conta acima usando

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{ikx} \, \delta_n(x)$$

onde $\delta_n(x)$ é, por exemplo,

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$$

⊛ Qual é a transf. de Fourier de x^n? Calcule!

Algumas propriedades das transformadas de Fourier de derivadas

Suponha que $f(x)$ seja r.d. Assim, considere a transf. de Fourier de

$$\frac{df}{dx}$$

Por partes

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx}\, \frac{d}{dx} f(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{d}{dx}\left[f(x)\, e^{ikx} \right] - ik\, e^{ikx} f(x) \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\, e^{ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - ik \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} f(x)$$

Já que $f(x)\Big|_{x\to\infty} = 0$ suficientemente rápido vemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} \frac{d}{dx} f(x) = -ik\, F(k)$$

onde $F(k)$ é a transformada original

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} f(x)$$

Assim, veja que interessante. Via transformada de Fourier, uma derivada em x é levada em uma potência em k no espaço k.

Suponha que tenhamos a equação diferencial linear e ordinária de 2ª ordem

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} x(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

$\omega_0, \gamma > 0$

Essa é a equação diferencial que descreve o oscilador harmônico (em 1 dimensão) amortecido na presença de uma força externa $f(t)$. Vamos resolver $x(t)$ usando a transformada de Fourier.

Note que, em geral, para uma função $g(t)$ que é a transformada de Fourier inversa de uma $\tilde{g}(\omega)$, o seguinte é válido

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{-i\omega t} \tilde{g}(\omega) \quad \text{e}$$

$$\frac{d}{dt} g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{-i\omega t} \tilde{g}(\omega)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, (-i\omega) e^{-i\omega t} \tilde{g}(\omega)$$

⊕ Assumo que a derivada pode ser colocada dentro da integral

Assim, se $\tilde{g}(\omega)$ é a transf. de Fourier de

$g(t)$, $-i\omega\,\tilde{g}(\omega)$ será a transf. de Fourier de $\frac{d}{dt}g(t)$.

Claramente, $$\frac{d^n}{dt^n}g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}(-i\omega)^n\,\tilde{g}(\omega)$$

e dessa forma vemos que a transformada de $\frac{d^n}{dt^n}g(t)$ só existirá se $\tilde{g}(\omega)$ tender para zero suficientemente rápido no infinito.

(*) Mostre que $\frac{d^n}{dt^n}g(t)$ sempre possui transf. de Fourier se $g(t)$ for r.d..

Dito isso, vamos voltar a nossa equação

$$\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

Fazemos o Fourier das funções

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\; e^{-i\omega t}\,\tilde{x}(\omega)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\; e^{-i\omega t}\,\tilde{f}(\omega)$$

e assim, usando a discussão acima, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\,\tilde{x}(\omega)\left[(-i\omega)^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\,\tilde{f}(\omega)$$

então concluímos que no espaço ω

a equação diferencial se tornou a simples equação algébrica

$$\tilde{x}(\omega)\left[-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2\right] = \tilde{f}(\omega) \qquad \text{ou}$$

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{\left[-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2\right]} \qquad //$$

Nossa solução $x(t)$ é então

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\,\frac{\tilde{f}(\omega)}{\left[-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2\right]}$$

Essa integral pode ser facilmente feita via método dos resíduos.

Em geral, assumimos que $\tilde{f}(\omega)$ (relacionada a força externa) não possui singularidades nesse intervalo.

Então, basta encontrarmos os pólos, os resíduos, e definir o contorno adequado no plano complexo ω.

$$\omega^2 + i\omega\gamma - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = \frac{-i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

Dependendo do valor de γ e ω_0^2 obtemos 3 situações distintas:

① $\Delta = -\gamma^2 + 4\omega_0^2 = 0 \longrightarrow$ 1 pólo simples de ordem 2 em $\omega = \frac{-i\gamma}{2}$

② $\Delta = -\gamma^2 + 4\omega_0^2 < 0 \longrightarrow$ 2 pólos (ordem 1) puramente imaginários

em $\omega_1 = \frac{-i\gamma + i|\Delta|^{\frac{1}{2}}}{2}$ e $\omega_2 = \frac{-i\gamma - i|\Delta|^{\frac{1}{2}}}{2}$

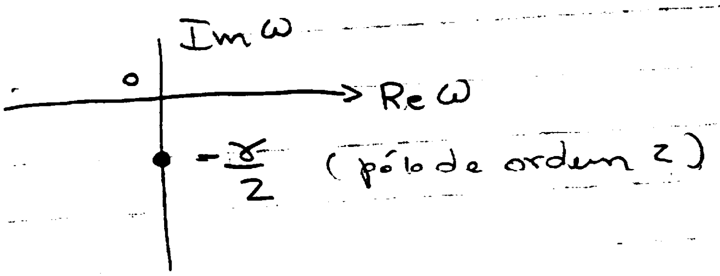
③ $\Delta = -\gamma^2 + 4\omega_0^2 > 0 \longrightarrow$ 2 pólos (ordem 1) com parte reais opostas e mesma parte imaginária.

$\omega_1 = -\frac{i\gamma}{2} + |\Delta|^{\frac{1}{2}}$

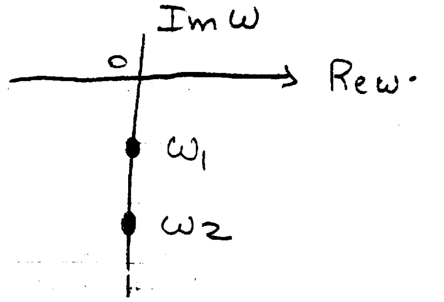
$\omega_2 = -\frac{i\gamma}{2} - |\Delta|^{\frac{1}{2}}$

Graficamente:

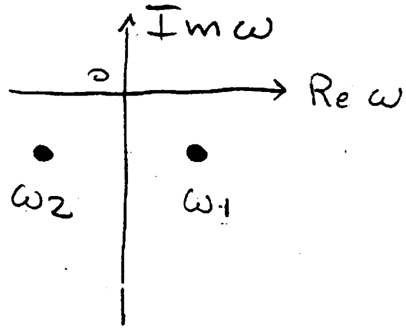
①



(2)



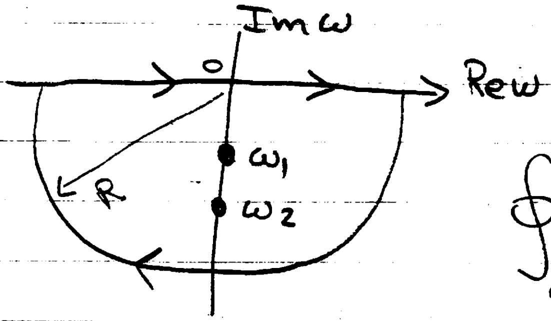
(3)



⊛ Note que, em geral, podemos escrever

$$-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2 = -(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)$$

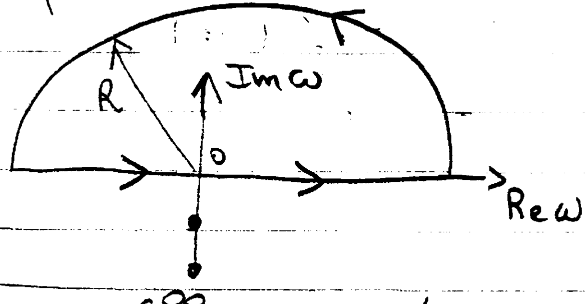
Vamos resolver aqui explicitamente o caso (2). Note que devemos fechar o contorno "por baixo" se $t>0$



e

$$\oint_C dz \, \frac{e^{-izt}\tilde{f}(z)}{-(z-\omega_1)(z-\omega_2)} = 2\pi i \sum' \mathrm{Res}$$

Se $t<0$, devemos fechar o contorno "por cima"



Nesse caso não há nenhum pólo na região definida pelo contorno fechado e assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{-i\omega t}\tilde{f}(\omega)}{[-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2]} = 0 \quad (\text{se } t<0)$$

Então, faz sentido dizermos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; e^{-i\omega t} \frac{\tilde{f}(\omega)}{[-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2]} = 2\pi i \, \Theta(t) \sum \text{Resíduos}$$

nos quadrantes inferiores

Os resíduos são:

$$\lim_{\omega \to \omega_1} e^{-i\omega t} \frac{\tilde{f}(\omega)}{-(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)} \cancel{(\omega-\omega_1)} = -\frac{\tilde{f}(\omega_1)}{\omega_1 - \omega_2} e^{-i\omega_1 t}$$

$$\lim_{\omega \to \omega_2} e^{-i\omega t} \frac{-\tilde{f}(\omega)}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)} \cancel{(\omega-\omega_2)} = -\tilde{f}\frac{(\omega_2)}{\omega_2 - \omega_1} e^{-i\omega_2 t}$$

Então, nosso $x(t)$ fica

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; e^{-i\omega t} \frac{\tilde{f}(\omega)}{[-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2]}$$

$$x(t) = \frac{\Theta(t)(-2\pi i)}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\tilde{f}(\omega_1) e^{-i\omega_1 t} - \tilde{f}(\omega_2) e^{-i\omega_2 t}}{\omega_1 - \omega_2} \right]$$

$$x(t) = \Theta(t) \sqrt{2\pi} \, i \left[\frac{\tilde{f}(\omega_1) e^{-i\omega_1 t} - \tilde{f}(\omega_2) e^{-i\omega_2 t}}{\omega_2 - \omega_1} \right]$$

Veremos na próxima aula como resolver esse tipo de problema via função de Green.

(suas partes imaginárias)

(*) Note que os pólos definem os tempos característicos de relaxação dessa equação diferencial.

Uma breve introdução a teoria das equações diferenciais lineares (E.D.L.) de 2ª ordem

E.D.L. aparecem em vários problemas em física. A forma geral de uma E.D.L. de 2ª ordem é

$$A(t)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B(t)\frac{dy(t)}{dt} + C(t)\,y(t) = F(t)$$

Costumamos dividir a eq. acima por $A(t)$ (quando ∃ pontos onde $A(t)$ se anula temos que tomar cuidado) e aí obtemos (definindo novas fçs. P, Q e R)

$$y''(t) + P(t)\,y'(t) + Q(t)\,y(t) = f(t)$$

Se $f(t)=0$, a eq. é dita homogênea se não ela é chamada de $\bar{n}$-homogênea.

Assumiremos aqui neste primeiro tratamento que:

P, Q, f são analíticas em t.

Equação homogênea:

$$y''(t) + P(t)\,y'(t) + Q(t)\,y(t) = 0$$

Essa equação é linear, i.e., se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções, a sua soma

$$y(t) = C_1\,y_1(t) + C_2\,y_2(t) \quad \text{também é.}$$

(Prove isso?) (onde C_1 e C_2 são ctes).

⊛ Note que nesse caso $y(t)=0$ é sempre solução (o mesmo não é verdade para a eq. não-homogênea).

Independência Linear

Duas soluções são chamadas de linearmente independentes se nenhuma delas for múltipla da outra, i.e., se a condição

$$C_1\,y_1(t) + C_2\,y_2(t) = 0 \quad \forall t \text{ no intervalo considerado}$$

se $C_1 = C_2 = 0$.

⊛ Vocês já viram essa idéia de independência linear quando estudaram os elementos de uma base em espaços vetoriais de dimensão finita.

A dependência linear das soluções pode ser verificada se conhecemos seus valores e o valor de sua 1ª derivada em um dado pto $t = t_0$. Se

$$y_1(t_0) = k\,y_2(t_0) \quad \text{e} \quad y_1'(t_0) = k\,y_2'(t_0)$$

$k = \underline{\underline{cte}}$

então y_1 e y_2 são <u>linearmente dependentes</u>.

Note que se y_1 e y_2 são soluções

$$y_1''(t) + P(t)\,y_1'(t) + Q(t)\,y_1(t) = 0$$

$$y_1''(t) = -P(t)\,y_1'(t) - Q(t)\,y_1(t) \quad \text{em } t = t_0$$

$$y_1''(t_0) = -P(t_0)\,y_1'(t_0) - Q(t_0)\,y_1(t_0) \quad \text{então}$$

$$y_1''(t_0) = -P(t_0)\,k\,y_2'(t_0) - Q(t_0)\,k\,y_2(t_0)$$

$$y_1''(t_0) = k\,y_2''(t_0) \quad \text{e assim} \quad y_1^{(n)}(t_0) = k\,y_2^{(n)}(t_0).$$

Agora, se

$$\frac{y_1(t_0)}{y_2(t_0)} \neq \frac{y_1'(t_0)}{y_2'(t_0)} \quad \text{num dado } t_0$$

essa soluções são linearmente independentes.

Para demonstrar isso, introduzimos o

Wronskiano das duas soluções:

$$W[y_1(t), y_2(t)] = y_1(t)\,y_2'(t) - y_2(t)\,y_1'(t)$$

(*) Note que para soluções linearmente dependentes, então $y_1(t_0) = k\,y_2(t_0)$

$$W[y_1(t_0), y_2(t_0)] = 0$$

O Wronskiano possui uma propriedade muito importante:

→ $W[y_1(t), y_2(t)]$ é identicamente nulo $(\forall x)$ ou NUNCA se anula!

Demonstração: Seja $W[y_1, y_2] = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ e y_1 e y_2 soluções da EDL.

Então,

$$\frac{dW}{dt} = y_1 y_2'' + y_1' y_2' - y_2' y_1' - y_2 y_1''$$

$$= y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

Assim, como

$$y_1'' = -P y_1' - Q y_1$$
$$y_2'' = -P y_2' - Q y_2$$

obtemos

$$y_1 y_2'' + P y_1 y_2' + Q y_1 y_2 = 0$$
$$y_2 y_1'' + P y_2 y_1' + Q y_1 y_2 = 0$$

Subtrai

$$\underbrace{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}_{\frac{dW}{dx}} + P(\underbrace{y_1 y_2' - y_2 y_1'}_{W[y_1,y_2]}) = 0$$ então

$$\frac{dW[y_1,y_2]}{dt} + P(t)\, W[y_1,y_2] = 0$$ e a solução é

$$W[t] = W(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} P(\xi)\, d\xi}$$

$W(t_0) = W[y_1(t_0), y_2(t_0)]$ é o valor em $t = t_0$. (arbitrário)

Uma vez que a exp nunca se anula,

$W(t) = 0$ se $W(t_0) = 0$ ou então $W(t)$ nunca se anula. //

⊛ Note que, se

$$\frac{y_1(t_0)}{y_2(t_0)} \neq \frac{y_1'(t_0)}{y_2'(t_0)}$$ então

$$y_1(t_0)\, y_2'(t_0) - y_2(t_0)\, y_1'(t_0) = \underline{W(t_0) \neq 0}.$$

então, $W(t)$ nunca pode se anular e y_1 e y_2 não podem ser linearmente dependente e assim eles tem que ser linearmente independentes

Solução Geral da Equação Homogênea

A solução da EDL de 2ª ordem fica completamente determinada se soubermos $y(t_0)$ e $y'(t_0)$ para um dado t_0.

Por sua vez, sabendo duas soluções linearmente independentes y_1 e y_2,

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

(C_1 e C_2 ctes escolhidas para satisfazer as condições iniciais)

é a solução mais geral da EDL homogênea de 2ª ordem.

De fato, seja $y(t)$ uma solução da forma acima com valores dados em um dado t_0

$$y(t_0) = a, \quad y'(t_0) = b$$ Assim,

$$y''(t_0) = C_1 y_1''(t_0) + C_2 y_2''(t_0)$$

$$y''(t_0) = C_1[-P(t_0)y_1'(t_0) - Q(t_0)y_1(t_0)] + C_2[-P(t_0)y_2'(t_0) - Q(t_0)y_2(t_0)]$$ e

como $y(t)$ é solução

$$y''(t_0) = -[P(t_0)y'(t_0) + Q(t_0)y(t_0)]$$
$$= -P(t_0)b - Q(t_0)a$$

Assim, $P(t_0)b + Q(t_0)a = c_1 P(t_0) y_1'(t_0) + c_1 Q(t_0) y_1(t_0)$
$+ c_2 P(t_0) y_2'(t_0) + c_2 Q(t_0) y_2(t_0)$

$= P(t_0)[c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0)]$
$+ Q(t_0)[c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0)]$ e dessa forma

$$a = c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0)$$

$$b = c_1 y_1'(t_0) + c_1 y_1'(t_0)$$

Podemos resolver essas equações acima para encontrar c_1 e c_2. Essa solução existe pois o determinante

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} = y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_2(t_0) y_1'(t_0)$$

$= W(t_0) \neq 0$ já que y_1 e y_2 são linearmente independentes.

Agora, suponha que só conhecemos uma solução $y_1(t)$ da EDL de 2ª ordem. Podemos encontrar uma solução linearmente independente $y_2(t)$ da seguinte forma:

Note que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2}$$

Por outro lado, vimos que

$$W(t) = W(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} d\xi\, P(\xi)} \qquad \text{Assim}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{W(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} d\xi\, P(\xi)}}{y_1^2(t)} \qquad \text{e}$$

$$\frac{y_2(t)}{y_1(t)} = \underbrace{W(t_0)}_{\text{é uma constante}} \int_{t_1}^{t} dt' \, \frac{e^{-\int_{t_0}^{t'} d\xi\, P(\xi)}}{y_1^2(t')}$$

onde t_0 e t_1 são arbitrários. Assim sabemos y_2 a menos de uma constante.

— X — 28/9/2011

Equação $\bar{n}$-homogênea: Método da Função de Green

Seja D_t o operador diferencial linear de 2ª ordem

$$D_t = \frac{d^2}{dt^2} + P(t)\frac{d}{dt} + Q(t) \qquad \text{assim,}$$

$D_t[y(t)] = f(t)$ representa a EDL não-homogênea

$$y''(t) + P(t)y'(t) + Q(t) = f(t)$$

Agora, associado a este operador diferencial $\mathcal{D}_t$ está a função de Green

$G(t,t')$ definida via

ff de 2 variáveis
$$\mathcal{D}_t[G(t,t')] = \delta(t-t')$$

Voltando a nossa EDL

$\mathcal{D}_t[y(t)] = f(t)$, vemos que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G(t,t') f(t')$$ é solução.

De fato,

$$\mathcal{D}_t[y(t)] = \mathcal{D}_t\left[\int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G(t,t') f(t')\right]$$

$$= \left[\frac{d^2}{dt^2} + P(t)\frac{d}{dt} + Q(t)\right] \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G(t,t') f(t')$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left(\left[\frac{d^2}{dt^2} + P(t)\frac{d}{dt} + Q(t)\right] G(t,t')\right) f(t')$$

só atua em t e não em t'

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \mathcal{D}_t \underbrace{[G(t,t')]}_{\delta(t-t')} f(t')$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \delta(t-t') f(t') = f(t) \quad //$$

⊛ Note que essa solução se anula quando $f(t)=0$. Ou seja, ela só aparece quando a EDL não é homogênea.

A solução geral de $D_t[y(t)] = f(t)$ é

linearmente independentes

$$y(t) = \underbrace{C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)}_{\text{é a parte homogênea}} + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G(t,t') f(t')$$

$$D_t[y_1(t)] = D_t[y_2(t)] = 0 .$$

Construção da Função de Green

Podemos obter a função de Green $G(t,t')$ de uma equação diferencial a partir das soluções da parte homogênea dela. De fato, da definição de $G(t,t')$:

$$D_t[G(t,t')] = \delta(t-t')$$

vemos que para $t \neq t'$, $\underset{t \neq t'}{D_t[G(t,t')]} = 0$

ou seja, nesse caso $G(t,t')$ é uma solução da EDL homogênea em t. Entretanto, quando $t \to t'$ a coisa diverge, o que sugere alguma descontinuidade da G em $t \to t'$.

Vamos separar o domínio em 2 regiões $t > t'$ e $t < t'$. Então, sendo y_1 e y_2 duas soluções linearmente independentes de D_t (homogênea), fazemos

$$G(t,t') = C_1\, y_1(t)\, \Theta(t'-t) + C_2\, y_2(t)\, \Theta(t-t')$$

↘ Heaviside

Nesse caso, iremos determinar C_1 e C_2 da condição que

$$D_t[G(t,t')] = \delta(t-t')$$

Assim, para calcular o lado esquerdo precisamos

$$\frac{d}{dt} G(t,t') = C_1\, y_1'(t)\, \Theta(t'-t) + C_2\, y_2'(t)\, \Theta(t-t') + \Big[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\Big]_{t\to t'} \delta(t-t')$$

$$\frac{d^2}{dt^2} G(t,t') = C_1\, y_1''(t)\, \Theta(t'-t) + C_2\, y_2''(t)\, \Theta(t-t') + \Big[C_2 y_2'(t) - C_1 y_1'(t)\Big]\Big|_{t\to t'} \delta(t-t') + \Big[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\Big]\Big|_{t\to t'} \frac{d}{dt}\delta(t-t')$$

Assim

$$\frac{d^2}{dt^2} G(t,t') + P(t)\frac{d}{dt} G(t,t') + Q(t)\, G(t,t')$$ fica

y_1 e y_2 são soluções da EDL homogênea

$$= \theta(t'-t) C_1 \underbrace{\left[\frac{d^2}{dt^2} y_1(t) + P(t)\frac{d}{dt} y_1(t) + Q(t) y_1(t) \right]}_{0}$$

$$+ C_2 \theta(t-t') \underbrace{\left[\frac{d^2}{dt^2} y_2(t) + P(t)\frac{d}{dt} y_2(t) + Q(t) y_2(t) \right]}_{0}$$

$$+ P(t)\, \delta(t-t') \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t) \right] \Big|_{t\to t'}$$

$$+ \left[C_2 y_2'(t) - C_1 y_1'(t) \right]_{t\to t'} \delta(t-t')$$

$$+ \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t) \right] \Big|_{t\to t'} \frac{d}{dt} \delta(t-t')$$

isso tem que ser igual a $\delta(t-t')$. Assim, vamos escolher C_1 e C_2 de forma que o termo com $\frac{d}{dt}\delta(t-t')$ suma. Assim, impomos

$$\left.\begin{aligned} C_2 y_2(t') - C_1 y_1(t') &= 0 \\ C_2 y_2'(t') - C_1 y_1'(t') &= 1 \end{aligned}\right\}$$ 2 eqs e 2 variáveis C_1 e C_2.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -y_1(t') & y_2(t') \\ -y_1'(t') & y_2'(t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -y_1(t') & y_2(t') \\ -y_1'(t') & y_2'(t') \end{pmatrix} = -\left[y_1(t') y_2'(t') - y_2(t') y_1'(t') \right]$$

$$= -W[y_1(t'), y_2(t')]$$

Solução

$$C_1 = \frac{y_2(t')}{W[y_1(t'), y_2(t')]} \quad , \quad C_2 = \frac{y_1(t')}{W[y_1(t'), y_2(t')]}$$

Assim, a função de Green é

$$G(t,t') = \frac{1}{W[y_1(t'), y_2(t')]} \left\{ y_2(t')\, y_1(t)\, \Theta(t'-t) + y_1(t')\, y_2(t)\, \Theta(t-t') \right\}$$

Note que a função de Green não é unívoca. De fato, uma vez que ela é definida via

$$D_t[G(t,t')] = \delta(t-t') \quad \text{se}$$

temos uma $G_0(t,t')$ que satisfaz a eq. acima, uma outra combinação

$$G(t,t') = G_0(t,t') + Z(t,t') \quad \text{onde}$$

$D_t[Z(t)] = 0$, vemos que $G(t,t')$ também satisfaz a equação.

De fato, usando a solução anterior e

$$Z(t,t') = -\frac{y_2(t')\, y_1(t)}{W[y_1(t'), y_2(t')]}$$

Note que
$D_t[Z(t,t')] = 0$

obtemos que a G se anula para $t' > t$ ou

$$G(t,t') = \frac{[y_1(t')\,y_2(t) - y_2(t')\,y_1(t)]}{W[y_1(t'),\, y_2(t')]}\,\theta(t-t')$$

e a solução particular da EDL não homogênea tem o termo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t,t')\,f(t') = \int_{-\infty}^{t} dt'\, G(t,t')\,f(t').$$

⊛ Veremos (um dia) que essa fç de Green acima é chamada de função de Green retardada.

Ex: Seja D_t o operador diferencial que vimos anteriormente (oscilador harmônico forçado)

$$\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = f(t)$$

$\gamma, \omega_0^2 > 0$ ctes

$$D_t = \frac{d^2}{dt^2} + \gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2$$

Devemos achar uma $G(t)$

$$D_t[G(t)] = \delta(t)$$

A solução geral será $x(t) = x(t)_{\text{homogênea}} + \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t-t')\,f(t')$

⊛ Para EDL com coeficientes constantes, $G(t,t') = G(t-t')$

Podemos expressar $G(t)$ em transf. de Fourier

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{-i\omega t} \tilde{G}(\omega) \qquad \text{e aí}$$

$$D_t[G(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \tilde{G}(\omega) \left[\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right] e^{-i\omega t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2 \right] e^{-i\omega t} \tilde{G}(\omega)$$

$$= \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{-i\omega t} \qquad \text{Assim,}$$

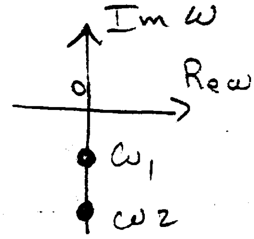
$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\left[-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2 \right]}$$

Agora, temos que calcular

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{-i\omega t} \tilde{G}(\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\left[-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2 \right]}$$

já fizemos uma conta muito parecida nas aulas passadas



Vamos considerar o caso

pólos puramente imaginários

$$\omega_{1,2} = \frac{-i\gamma}{2} \pm \frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2}, \quad \Delta = -\gamma^2 + 4\omega_0^2 < 0$$

Se $t<0$, $G(t) = 0$ (pois temos que fechar o contorno "por cima" onde n̄ há polos)

Para $t<0$, usamos um contorno fechado que engloba os dois pólos. $\boxed{t<0}$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{-[\omega-\omega_1][\omega-\omega_2]} = 2\pi i \sum \text{Res}$$

Resíduo em ω_1: $-\dfrac{e^{-i\omega_1 t}}{(\omega_1-\omega_2)2\pi}$

Em $\omega_2 \rightarrow -\dfrac{e^{-i\omega_2 t}}{(\omega_2-\omega_1)2\pi}$ Assim, obtemos

$$G(t) = -i\frac{e^{-i\omega_1 t}}{(\omega_1-\omega_2)} + i\frac{e^{-i\omega_2 t}}{\omega_1-\omega_2}$$

$$= \frac{i}{(\omega_1-\omega_2)}\left[e^{-i\omega_2 t} - e^{-i\omega_1 t}\right]$$

$$\Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = -i|\Delta|^{\frac{1}{2}} = i\left|-\gamma^2 + 4\omega_0^2\right|^{\frac{1}{2}}$$

$$G(t) = \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{|-\gamma^2+4\omega_0^2|^{\frac{1}{2}}}\left[e^{-\frac{\sqrt{|\Delta|}t}{2}} - e^{\frac{\sqrt{|\Delta|}t}{2}}\right]$$

$$= -\frac{2\,e^{-\frac{\gamma t}{2}}}{|-\gamma^2+4\omega_0^2|^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{senh}\left(\frac{|\Delta|^{\frac{1}{2}}t}{2}\right)$$ em geral

$$G(t) = \frac{-2\Theta(t)\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{|-\gamma^2+4\omega_0^2|}\,\mathrm{senh}\left(\frac{|\Delta|^{\frac{1}{2}}t}{2}\right) \quad //$$

Vocês podem obter isso construindo $G(t)$ via Wronskiano das soluções homogêneas.

Existe aqui a idéia de Causalidade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t-t')f(t') = \int_{-\infty}^{t} dt'\, G(t-t')f(t')$$

ou seja, a função $f(t')$ gera um $x(t)$ mas t tem que ser $t' < t$, i.e., $f(t')$ é a causa do $x(t)$ num tempo t posterior a t'. Em outras palavras: o deslocamento $x(t)$ do oscilador harmônico amortecido em t ocorre por causa da ação da força externa $f(t')$ em $t' < t$.

Matematicamente, esse requerimento de causalidade é equivalente a dizer que $G(t-t') = 0$ se $t < t'$ (daí o uso da $\Theta(t-t')$).

Teorema de Titchmarsh

Considere $H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G(t-t') f(t')$

No espaço de Fourier

$$\tilde{H}(\omega) = \tilde{G}(\omega) \tilde{f}(\omega)$$

pelo teorema da convolução

Se $\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, |\tilde{G}(\omega)|^2 \longrightarrow$ finito (ou seja, $\tilde{G}(\omega)$ é de quadrado integrável) então

qualquer uma das afirmações abaixo implica nas outras duas:

1- A transformada inversa de $\tilde{G}(\omega)$, i.e., $G(t)$ é zero se $t<0$ (causalidade)

2- Para z complexo, $\tilde{G}(z)$ é analítica na parte de cima $\mathrm{Im}\, z > 0$ e $\tilde{G}(z) \to \tilde{G}(\mathrm{Re}\, z)$ quando $y \to 0$. Além disso

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, |\tilde{G}(x + i\,\mathrm{Im}\, z)|^2 < \underset{\text{finito}}{K} \quad \text{para } \mathrm{Im}\, z > 0$$

3- A parte real e a parte imaginária de $\tilde{G}(\omega)$ satisfazem valor principal

$$\mathrm{Re}\,\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\pi} P. \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega}\, \frac{\mathrm{Im}\,\tilde{G}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}-\omega}$$

$$\mathrm{Im}\,\tilde{G}(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega}\, \frac{\mathrm{Re}\,\tilde{G}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}-\omega}$$

Essas são chamadas "relações de dispersão". $\mathrm{Re}\,\tilde{G}(\omega)$ e $\mathrm{Im}\,\tilde{G}(\omega)$ são "transformadas de Hibert" uma da outra.

Veremos um exemplo depois envolvendo a função de Green, suas partes reais e imaginárias, no contexto de absorcão de ondas eletromagnéticas num condutor.

— x — 30/09/2011

Transformação Linear no espaço de Funções e a base contínua

Para uma dada matrix $n \times n$ $\hat{A}$ (dimensão finita) a equação

$\vec{y}' = \hat{A}\vec{y}$, $\forall y \in V$ define a ação do operador linear $\hat{A}: V \to V$

$$: \vec{y} \mapsto \vec{y}' = \hat{A}\vec{y}$$

O espaço de funcões forma um espaço vetorial (de dimensão infinita) onde as funções, como elementos do espaço vetorial, fazem o papel de vetores. Se funções são os vetores, o que faz o papel de operador linear nesse espaço de dimensão infinita?

A resposta é

$$f(x) = \int dx' \, K(x,x') \, g(x')$$

$K(x,x') \rightarrow$ kernel $\qquad \underbrace{K : \Omega \rightarrow \Omega}_{}$ $\rightarrow$ operador linear

$$f(x) \mapsto g(x)$$

⊛ Prove que K é uma operação linear.

Para um espaço de dimensão finita n

$$\vec{y}\,' = \hat{A}\vec{y} \Rightarrow y_i' = \sum_k \underbrace{A_{ik}\, y_k}_{\text{números}}$$

$\rightarrow$ operador (ou matrix)

y_i = componente na base $\vec{e}_i$

$$y_i = \vec{e}_i^{\,T} \cdot \vec{y} \qquad \text{e a base é ortonormal}$$

$$\{\vec{e}_i,\ i=1,\dots,n\} \ni \vec{e}_i^{\,T} \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

Notação de Dirac

Vetores são denotados como

$\vec{y} \longrightarrow |y\rangle$ $\quad\quad$ $\vec{e}_i^{\,T} \longrightarrow \langle i|$

$\vec{e}_i \longrightarrow |i\rangle$

Produto escalar entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ fica

$\vec{a}^{\,T}.\vec{b} \longrightarrow \langle a|b\rangle$ $\quad$ Assim, o i-ésimo componente de $|y\rangle$ na base $|i\rangle$ é

$y_i = \langle i|y\rangle$ $\quad$ e a condição de ortonormalidade fica

$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$

Decompomos um vetor (qualquer) $|a\rangle$ assim

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i |i\rangle$$ mas $a_i = \langle i|a\rangle$ assim

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^{n} |i\rangle a_i = \sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i|a\rangle = \left[\sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i|\right] |a\rangle$$

esse objeto

$\sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i|$ é uma matriz $n \times n$ (diagonal)

que leva um vetor qualquer $|a\rangle \in V$ nele mesmo. Concluímos assim que

$\sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i| = \hat{1}$ é a representação da matrix identidade $\hat{1}$ nessa base $\{|i\rangle, i=1,\dots,n\}$

Como encontramos os elementos de um operador $\hat{A}$ numa base $|i\rangle$?

$$\hat{A} = \hat{1}\hat{A}\hat{1} = \sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i|\hat{A} \sum_{k=1}^{n} |k\rangle\langle k|$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |i\rangle\langle k| \langle i|\hat{A}|k\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik} |i\rangle\langle k| \quad , \quad A_{ik} = \langle i|\hat{A}|k\rangle$$

elementos (números) do operador A na base $|i\rangle$.

Se $\hat{A}$ é diagonal em $|i\rangle$, obtemos

$$A_{ik} = \langle i|\hat{A}|k\rangle = A_i \langle i|k\rangle = A_i \delta_{ik}$$

Para estabelecer a correspondência formal entre

$$|x\rangle = \hat{A}|y\rangle \quad \text{e}$$

$$f(x) = \int dx' \, K(x,x') \, g(x')$$

Vamos associar a notação vetorial para uma função $f(x)$ como:

$$f(x) \longrightarrow |f\rangle$$

Supomos agora que existe uma base (contínua)

$$\{|x\rangle, -\infty < x < \infty\}$$ tal que

$$f(x) = \langle x|f\rangle$$ → coeficiente de $|f\rangle$ na base $|x\rangle$

e

$$|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, |x'\rangle f(x')$$ e

$$\langle x|f\rangle = f(x) = \langle x| \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, |x'\rangle f(x')$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, \langle x|x'\rangle f(x')$$

o que corresponderia para um vetor n-dimensional

$$x_i = \vec{e}_i^{\,T} \cdot \sum_{j=1}^{n} \vec{e}_j x_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\vec{e}_i^{\,T} \cdot \vec{e}_j) x_j$$

O fato de que $(\vec{e}_i^{\,T} \cdot \vec{e}_j) = \delta_{ij}$ e as propriedades da Delta de Dirac indicam que

$$\langle x | x' \rangle = \delta(x - x')$$

Relação de completeza

$$|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \langle x | f \rangle \, |x\rangle$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \; |x\rangle\langle x| \right) |f\rangle$$

$$= \hat{\mathbb{1}}_x |f\rangle$$ ou seja

$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; |x\rangle\langle x| = \hat{\mathbb{1}}_x$ é o operador identidade no espaço das funções.

Produto escalar

Sejam $|f\rangle$ e $|g\rangle$ dois vetores no espaço de funções:

$\langle f | g \rangle \in \mathbb{C}$ onde

$$\hat{\mathbb{1}}_x |g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; |x\rangle\langle x | g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; |x\rangle \, g(x)$$

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \langle f | x \rangle \, g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; f^*(x) \, g(x)$$

Note que $\langle x|f\rangle = f(x)$ pois usamos o
$\langle f|x\rangle = f^*(x)$ corpo dos complexos

* $\langle f|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2 \geq 0$ (O fato de que $f(x)$ pode ser complexa e a imposição que a norma de $|f\rangle$ $\sqrt{\langle f|f\rangle}$ exista $\in \mathbb{R}$ implica em $\langle f|x\rangle = \langle x|f\rangle^*$).

Note que, a imposição de que $\langle f|f\rangle$ seja finito, restringe nossa discussão ao espaço de funções de quadrado integrável.

* A equação para o Kernel

$$f(x) = \int dx'\, K(x,x')\, g(x')$$

fica, nessa representação

$$|f\rangle = \hat{K}\,|g\rangle$$

. De fato,

$\langle x|f\rangle = \langle x|\hat{K}|g\rangle$ mas $|g\rangle = \hat{\mathbb{1}}_x|g\rangle$ e

$$\langle x|f\rangle = \langle x|\hat{K}\,\hat{\mathbb{1}}_x|g\rangle = \langle x|\hat{K}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, |x'\rangle\langle x'|g\rangle$$

$$\langle x|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, \langle x|\hat{K}|x'\rangle\langle x'|g\rangle$$

ou seja

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, K(x,x')\, g(x')$$

$K(x,x') = \langle x | \hat{K} | x' \rangle$. elemento do operador $\hat{K}$ na base $\{|x\rangle, -\infty < x < \infty\}$

Analogamente, $\langle x | \mathbb{1}_x | x' \rangle = \delta(x-x')$

ou seja, a Delta de Dirac dá os elementos do operador unidade $\mathbb{1}_x$ na base $|x\rangle$.

(*) Note que $K(x,x')$ será em geral uma distribuição.

Operador diferencial como Kernel

Para uma função diferenciável

$f'(x) = \dfrac{df}{dx}(x)$ existe. Podemos escrever isso da seguinte forma

$$\frac{d}{dx} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, \delta(x-x') \frac{d}{dx'} f(x')$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left\{ \frac{d}{dx'} \cancel{\left[\delta(x-x') f(x') \right]}_{0} - f(x') \frac{d}{dx'} \delta(x-x') \right\}$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, f(x') \frac{d}{dx'} \delta(x-x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, f(x') \frac{d}{dx} \delta(x-x')$$

, ou seja, $\delta(x-x') \dfrac{d}{dx'} = \dfrac{d\delta(x-x')}{dx}$ (no sentido de distribuições)

$, \left|\frac{df}{dx}\right\rangle$

Para o vetor $|f'\rangle$ com componente

$\langle x|f'\rangle = f'(x)$ temos

$$|f'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |x\rangle f'(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |x\rangle \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x') \frac{d}{dx}\delta(x-x')$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |x\rangle \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, \frac{d}{dx}\delta(x-x') \langle x'|f\rangle$$

$$|f'\rangle = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, |x\rangle \frac{d}{dx}\delta(x-x') \langle x'|\right] |f\rangle$$

Assim, faz sentido definir o operador

$$\hat{D} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, |x\rangle \frac{d}{dx}\delta(x-x') \langle x'|$$ e

escrever

$$|f'\rangle = \hat{D}|f\rangle$$ onde

$\langle x|\hat{D}|x'\rangle = \frac{d\delta}{dx}(x-x')$ são os elementos de $\hat{D}$ na base dos $|x\rangle$.

(*) Mostre que $\langle x|\hat{D}^n|x'\rangle = \frac{d^n}{dx^n}\delta(x-x')$

e $\langle x|\hat{D}^n|f\rangle = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$.

(*) Para um número "a" definimos a exponencial do operador diferencial D como

$$e^{a\hat{D}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \hat{D}^n}{n!}$$

(série de Taylor ?)

Mostre que $\langle x| e^{a\hat{D}} |f\rangle = f(x+a)$

Transformada de Fourier como mudança de base no espaço de funções

$\langle f|f\rangle \to$ finito (em geral) $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2 \to$ finito

Então, Fourier existe e pela identidade de Parseval

$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, |\tilde{f}(k)|^2$. Assim, vemos que deve existir uma base $\{|k\rangle, k=-\infty,\dots,\infty\}$ onde

$$\langle f|f\rangle = \langle f|\hat{1}_k|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \langle f|k\rangle\langle k|f\rangle$$

e $\langle k|f\rangle = \tilde{f}(k)$ Porém,

$\langle k|\hat{1}_x|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \langle k|x\rangle\langle x|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \langle k|x\rangle f(x)$ Comparando com Fourier

Vemos que
$\langle k|x\rangle = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ → elemento da matrix mudança da base $|x\rangle$ para $|k\rangle$.

Transformada de Laplace

Vimos anteriormente a transformada de Fourier. Vários tipos de transformadas aparecem em física matemática como as transformadas de

Mellin: $g(\alpha) = \int_0^\infty dt\, f(t)\, t^{\alpha-1}$

Hilbert: $u(x) = P \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{v(x')}{x-x'}$ (Valor principal)

Passaremos agora a estudar a transformada de Laplace

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \lim_{a\to\infty} \int_0^a dt\, F(t)\, e^{-st}$$

$$f(s) = \int_0^\infty dt\, F(t)\, e^{-st}$$ //

⊛ A integral $\int_0^\infty dt\, F(t)$ não precisa existir !

Por exemplo, $F(t)$ pode divergir exponencialmente quando $t\to\infty$. Entretanto, se existe uma constante $\underline{\underline{s_0}}$ tal que

$\lim_{t\to\infty} |e^{-s_0 t} F(t)| \leq M$, a $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ existe para $s > s_0$.

Nesse caso, $F(t)$ é de "ordem exponencial".

Como contra-exemplo, $F(t) = e^{t^2}$ não possui transformada de Laplace.

⊛ A transf. de Laplace pode também não existir se existe uma singularidade suficientemente forte em $F(t)$ quando $t \to 0$, ou seja, por exemplo

$\int_0^\infty dt\, t^n e^{-st}$ diverge em $t \to 0$ para $n \leq -1$. A $\mathcal{L}\{t^n\}$ não existe se $n \leq -1$.

⊛ A transf. de Laplace é uma operação linear, i.e., para 2 funções $f(t)$ e $g(t)$ com transf. de Laplace

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

(Prove isso!) (Assume que $F(t) = 0$ se $t < 0$)

Ex: $F(t) = 1 \to \mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty dt\, e^{-st} = \frac{1}{s}$

que existe quando $s > 0$.

- $F(t) = e^{kt} \to \mathcal{L}\{e^{kt}\} = \int_0^\infty dt\, e^{-st+kt} = \frac{1}{s-k}$

$\exists$ se $s > k$.

$$- \quad F(t) = \cosh(kt) \rightarrow \mathcal{L}\{\cosh(kt)\} = \int_0^\infty dt\, e^{-st} \cosh(kt)$$

$$= \int_0^\infty dt\, \frac{e^{-st}}{2} \left[e^{kt} + e^{-kt} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k} \right]$$

$$= \frac{s}{s^2 - k^2} \quad \text{se} \quad s > k.$$

⊛ Mostre que $\mathcal{L}\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2+k^2}$, $s > 0$

Para $F(t) = t^n$, $\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty dt\, e^{-st}\, t^n$ $\quad st = u$, $dt = \frac{du}{s}$

$$= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty du\, e^{-u} u^n = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

se $s > 0$, $n > -1$.

Unicidade da Transformada inversa

Dada a transf. de Laplace $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ queremos saber se $\exists\, \mathcal{L}^{-1}$ t.q.

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$$

Para os fins desse curso, quando $\mathcal{L}$ existir $\mathcal{L}^{-1}$ ~~existirá e será~~ única. Em geral, essa transformada inversa não é única. Isto é, se

$$\mathcal{L}\{F_1(t)\} = f(s) \quad e \quad \mathcal{L}\{F_2(t)\} = f(s)$$

em geral $F_1(t) \neq F_2(t)$ (teorema de Lerch).

Não iremos nos preocupar com esta possibilidade aqui no curso.

Veremos depois como calcular essa inversa em alguns casos representativos.

Expansão em frações parciais

Expande assim

$$f(s) = \frac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \frac{c}{s} + \frac{as+b}{s^2+k^2}$$

temos que determinar a, b, c. Tomando o denominador comum

$$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \frac{c(s^2+k^2)+s(as+b)}{s(s^2+k^2)} \quad \text{então}$$

$$k^2 = \underbrace{(a+c)s^2 + bs + ck^2}_{\text{polinômio em } s}$$

Comparando,

$a+c=0$, $b=0$, $c=1$. $\Rightarrow a=-1$ e assim $\frac{k^2}{s(k^2+s^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+k^2} = f(s)$

Qual a função $F(t)$ que tem transf. de Laplace igual a $f(s)$?

Resposta: $F(t) = 1 - \cos kt$ já que

$$\mathcal{L}\{1-\cos kt\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\cos kt\}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+k^2} \quad //$$

Transformada de Laplace e derivadas

Considere a transf. de Laplace de

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dF}{dt}\right\} = \int_0^\infty dt\, e^{-st} \frac{d}{dt}F(t)$$ integra por partes

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dF}{dt}\right\} = e^{-st}F(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty dt\, F(t)\frac{d}{dt}(e^{-st})$$

$$= -\lim_{t\to 0^+} F(t) + s\int_0^\infty dt\, F(t)\, e^{-st}$$

$$= s f(s) - F(0^+) \qquad \left(e^{-st}F(t)\Big|_{t=\infty} = 0\right)$$

(*) $\frac{dF(t)}{dt}$ é, por hipótese, pelo menos contínua por pedaços. em $0 \leq t < \infty$

Analogamente,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nF}{dt^n}\right\} = s^n \mathcal{L}\{F(t)\} - s^{n-1}F(0^+) - s^{n-2}\frac{dF}{dt}(0^+) - \ldots - \frac{d^{n-1}F}{dt^{n-1}}(0^+)$$

(Prove isso acima)

(*) Vemos que, tal qual aconteceu com a transformada de Fourier, a transformada de Laplace converterá eqs. diferenciais em t em equações algébricas em s.

Ex: Calcule $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\}$

Uma vez que $\frac{d^2}{dt^2}\operatorname{sen}(kt) = -k^2\operatorname{sen}(kt)$

temos que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\operatorname{sen}(kt)\right\} = -k^2\mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\}$$

$$= s^2\mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\} - s\,\cancel{\lim_{t\to 0^+}\operatorname{sen}(kt)}^{\,0} - \frac{d}{dt}\operatorname{sen} kt\Big|_{t\to 0^+}$$

$$= s^2\mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\} - k = -k^2\mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\} = \frac{k}{s^2+k^2} \quad //$$

Ex: Oscilador harmônico

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$ com condições iniciais $x(0^+) = x_0$, $\dot{x}(0^+) = 0$

Aplicamos a transf. na equação inteira

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} + \omega_0^2 \mathcal{L}\{x(t)\} = 0$$

Denotamos $\mathcal{L}\{x(t)\} = \tilde{x}(s)$ e assim

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = s^2 x(s) - s\lim_{t\to 0^+} x(t) - \cancel{\dot{x}(0^+)}^{\,0}$$

$$= s^2 x(s) - s x_0$$ Então

a equação fica

$$s^2\tilde{x}(s) - s x_0 + \omega_0^2 x(s) = 0$$

$$\Rightarrow x(s) = x_0 \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$ mas vimos que

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$ e assim vemos que

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} = x_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right\} = x_0 \cos\omega_0 t$$

Como já era esperado.

(*) Note que as condições iniciais entram naturalmente aqui.

Aula 5/10/2011

Transformada de Laplace da Delta de Dirac

(Prove isso: Dica, use $\Theta(t)$ ou função degrau)

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \int_0^\infty dt\, e^{-st}\,\delta(t-t_0) = e^{-st_0}, \quad t_0 > 0$$

e se $t_0 \to 0$ (tomamos o limite)

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

(*) Aqui está subentendido que estamos trabalhando com o limite $n \to \infty$ de uma seqüência delta.

Ex: Força de curtíssima duração

Imagine uma partícula de massa m sujeito a uma força de curtíssima duração, que iremos usar a aproximação em que

$$m\frac{d^2x}{dt^2}(t) = P\,\delta(t), \quad P \text{ é cte.}$$

Aplicando a transformada de Fourier, obtemos

$$ms^2\tilde{x}(s) - ms\,x(0^+) - m\dot{x}(0^+) = P$$

Assumimos agora que $\dot{x}(0^+) = x(0^+) = 0$.

Assim $\tilde{x}(s) = \dfrac{P}{ms^2}$ e

$$x(t) = \frac{P}{m}t \quad \text{e} \quad \dot{x}(t) = \frac{P}{m}$$

Outras propriedades ...

Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ então

$$\mathcal{L}\{e^{at} F(t)\} = \int_0^\infty ds\, e^{at} e^{-st} F(t)$$

$$= \int_0^\infty ds\, e^{-(s-a)t} F(t)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} F(t)\} = f(s-a) \quad //$$

Assim, como $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$

$$\mathcal{L}\{e^{at} \operatorname{sen} kt\} = \frac{k}{(s-a)^2+k^2}$$

$\Rightarrow$ Trocamos $s \to s-a$ e estamos prontos!

Ex: Oscilador harmônico amortecido

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Condições iniciais: $x(0^+) = x_0$ e $\dot{x}(0^+) = 0$.

Aplicando a transformada obtemos

$$s^2 \tilde{x}(s) - s x(0^+) - \cancel{\dot{x}(0^+)} + \gamma s \tilde{x}(s) - \gamma x(0^+) + \omega_0^2 \tilde{x}(s) = 0$$

Então

$$\tilde{X}(s) = \frac{x_0\,(s+\gamma)}{[s(s+\gamma)+\omega_0^2]}$$

Completando o quadrado...

$$s(s+\gamma)+\omega_0^2 = s^2+s\gamma+\frac{\gamma^2}{4}-\frac{\gamma^2}{4}+\omega_0^2 = \left(s+\frac{\gamma}{2}\right)^2+\left(\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}\right)$$

e $$\tilde{X}(s) = \frac{x_0\left(s+\frac{\gamma}{2}\right)}{[s(s+\gamma)+\omega_0^2]} + \frac{x_0\gamma}{2\,[s(s+\gamma)+\omega_0^2]}$$

$$\tilde{X}(s) = \frac{x_0\left(s+\frac{\gamma}{2}\right)}{\left[\left(s+\frac{\gamma}{2}\right)^2+\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}\right]} + \frac{x_0\gamma}{2}\cdot\frac{1}{\left[\left(s+\frac{\gamma}{2}\right)^2+\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}\right]}$$

Define $\omega_1^2 \equiv \omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4} > 0$ e assim

$$\tilde{X}(s) = \frac{x_0\left(s+\frac{\gamma}{2}\right)}{\left[\left(s+\frac{\gamma}{2}\right)^2+\omega_1^2\right]} + \frac{x_0\gamma}{2\omega_1}\,\frac{\omega_1}{\left[\left(s+\frac{\gamma}{2}\right)^2+\omega_1^2\right]}$$

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{X}(s)\}$ e como $\mathcal{L}\{\cos(\omega_1 t)\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}\}$

$= \dfrac{\left(s+\frac{\gamma}{2}\right)}{\left[\left(s+\frac{\gamma}{2}\right)^2+\omega_1^2\right]}$ e $\mathcal{L}\left\{e^{-\frac{\gamma t}{2}}\operatorname{sen}\omega_1 t\right\} = \dfrac{\omega_1}{\left(s+\frac{\gamma}{2}\right)^2+\omega_1^2}$

Vemos que $X(t) = X_0 \cdot e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[\cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{2\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t \right]$

when $\gamma \to 0$ nós recuperamos o oscilador harmônico que fizemos anteriormente.

Translação em t

Seja $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty dt\, e^{-st} F(t)$

Considere agora

$$e^{-sb} f(s) = \int_0^\infty dt\, e^{-s(b+t)} F(t)$$

$\boxed{b>0}$

subs. variável
$b+t = z$
$dt = dz$

Então,

$$e^{-sb} f(s) = \int_b^\infty dz\, e^{-sz} F(z-b)$$

$$= \int_0^\infty dz\, e^{-sz} F(z-b)\, \Theta(z-b)$$

então

$$\mathcal{L}\{F(t-b)\Theta(t-b)\} = e^{-sb} f(s) \quad //.$$

Derivada de uma transformada

Assumindo que $F(t)$ seja contínua por partes e o domínio de s é tal que

$e^{-st}F(t)$ converge exponencialmente para $s \to \infty$, a integral que define a transformada

$$f(s) = \int_0^\infty dt\, e^{-st} F(t)$$ converge uniformemente e pode ser derivada com relação à s.

Então,

$$\frac{d f(s)}{ds} = \int_0^\infty dt\, (-t)\, e^{-st} F(t) = \mathcal{L}\{-t F(t)\}$$

e assim $$\frac{d^n}{ds^n} f(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n F(t)\}$$

Todas as integrais serão uniformemente convergentes por causa do comportamento de $e^{-st}F(t)$ quando $t \to \infty$.

Ex: $$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \int_0^\infty dt\, e^{-st} e^{kt} = \frac{1}{s-k}, \quad s > k$$

$$\mathcal{L}\{t e^{kt}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-k}\right) = \frac{1}{(s-k)^2} \qquad s > k$$

Integrais de Transformadas de Laplace

Se $F(t)$ for contínua por pedaços e s grande o suficiente de forma que $\underset{t\to\infty}{e^{-st}F(t)}$ decresça exponencialmente, a integral

$$f(x) = \int_0^\infty dt\, e^{-xt} F(t)$$ é uniformemente convergente com respeito a x.

Assim, podemos trocar a ordem das integrais da eq. abaixo:

$$\int_s^b f(x)\,dx = \int_s^b dx \int_0^\infty dt\, e^{-xt} F(t)$$

$$= \int_0^\infty dt\, F(t) \int_s^b dx\, e^{-xt}$$

$$= \int_0^\infty dt\, F(t) \left(-\frac{1}{t}\right)\left(e^{-tb} - e^{-ts}\right)$$

Agora, tomamos $b \to \infty$

$$\int_s^\infty dx\, f(x) = \int_0^\infty dt\, \frac{F(t)}{t} e^{-st} = \mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}$$

Se $\frac{F(t)}{t}$ é finito em $t=0$ ou diverge mais fracamente do que $\sim \frac{1}{t}$ (nesse caso $\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}$ existe.

Convolução (muito importante)

Seja $f_1(s) = \mathcal{L}\{F_1(t)\}$ e $f_2(s) = \mathcal{L}\{F_2(t)\}$

Então, vamos mostrar que

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t du\, F_1(t-u)\, F_2(u) \right\} = f_1(s)\, f_2(s) .$$

De fato,

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t du\, F_1(t-u)\, F_2(u) \right\} = \int_0^\infty dt\, e^{-st} \int_0^t du\, F_1(t-u)\, F_2(u)$$

$$= \int_0^\infty dt\, e^{-st} \int_0^\infty du\, \theta(t-u)\, F_1(t-u)\, F_2(u)$$

$$= \int_0^\infty du\, F_2(u) \underbrace{\int_0^\infty dt\, e^{-st}\, \theta(t-u)\, F_1(t-u)}_{\text{pág. 280}}$$

$$= \int_0^\infty du\, F_2(u)\, e^{-su} f_1(s)$$

$$= f_1(s) \int_0^\infty du\, e^{-su} F_2(u) = f_1(s)\, f_2(s) \; //$$

Ex: Mostre que $\mathcal{L}\left\{ \int_0^t du\, F(u) \right\} = \dfrac{f(s)}{s}$

onde $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$.

usando resultado acima da convolução fazemos $F(u) = F_2(u)$ e $F_1(t-u) = 1$ e, sabendo que $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ obtemos, por convolução que

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t du\, F(u) \cdot 1 \right\} = f(s) \cdot \frac{1}{s} \quad //$$

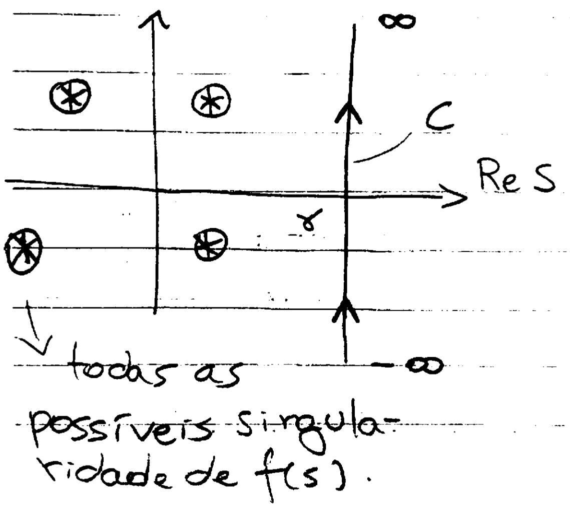
Inversa da Transformada de Laplace

- Integral de Bromwich

Seja $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ (assume que existe). Vamos mostrar em seguida que

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds\, e^{st} f(s)$$

onde o caminho no plano complexo s é:



De fato, vemos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} ds\, e^{st} f(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} ds\, e^{st}\int_0^\infty du\, e^{-su}F(u)$$

caminho C (~ linha reta)

paramentrização
$s=\gamma+i\xi$
$ds = i\,d\xi$

$$= \int_0^\infty du\, F(u)\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} ds\, e^{s(t-u)}$$

$$= \int_0^\infty du\, F(u)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{\gamma(t-u)+i\xi(t-u)}$$

$$= \int_0^\infty du\, F(u)\, e^{\gamma(t-u)}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{i\xi(t-u)}}_{\delta(t-u)}$$

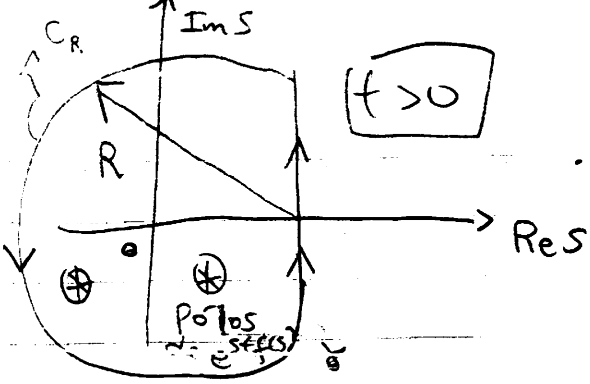
$$= \int_0^\infty du\, F(u)\, e^{\gamma(t-u)}\,\delta(t-u)$$

já que $t>0$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} du\, \Theta(u)F(u)\, e^{\gamma(t-u)}\,\delta(t-u) = \Theta(t)F(t)$$
$$= F(t)$$

Agora, em geral, no cálculo de

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} ds\, e^{st} f(s)$$ nós podemos criar um contorno fechado escolhendo um γ de modo que as singularidades de $e^{st}f(s)$ fiquem a esquerda. Assim, se $\boxed{t>0}$



$\boxed{t>0}$

De forma que

$$\int_{C_R} dz\, e^{zt} f(z) = 0 \quad \text{quando } R \to \infty$$

e assim

$\boxed{t>0}$

$$F(t) = \sum{}' \operatorname{Res}\left[\, e^{st} f(s) \text{ para } \operatorname{Re} s < \gamma \,\right]$$

Aula 7/10/2011

Ex: $f(s) = \dfrac{a}{s^2 - a^2}$. Então

$$e^{st} f(s) = \frac{a\, e^{st}}{(s-a)(s+a)} \qquad \text{Pólos: } s = \pm a$$

Resíduo em $s = a \Rightarrow \dfrac{e^{at}}{2}$

Resíduo em $s = -a \Rightarrow -\dfrac{e^{-at}}{2}$. Assim,

$$F(t) = \frac{e^{at}}{2} - \frac{e^{-at}}{2} = \operatorname{senh}(at) \quad //$$

Ex: $f(s) = \dfrac{1 - e^{-as}}{s}$

$$e^{st} f(s) = \underbrace{\frac{e^{st}}{s}}_{\substack{\text{pólo em} \\ s=0}} - e^{-as} \underbrace{\left(\frac{e^{st}}{s}\right)}_{\text{pólo em } s=0}$$

Resíduo de $\dfrac{e^{st}}{s}$ em $s=0 \Rightarrow 1$.

Resíduo de $e^{-as}\dfrac{e^{st}}{s}$ em $s=0 \Rightarrow 1$.

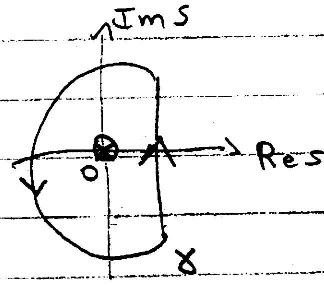
Agora, temos que inverter $\dfrac{e^{st}}{s}$ e $e^{st}\dfrac{e^{-as}}{s}$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} ds\, \frac{e^{st}}{s} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} ds\, \frac{e^{(t-a)s}}{s}$$

Define como

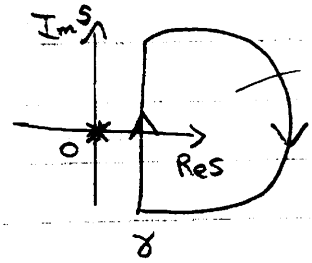
$$F(t) = F_1(t) - F_2(t)$$

Para $F_1(t)$: Se $t>0 \Rightarrow$



$F_1(t) = 1$ se $t>0$

Se $t<0 \Rightarrow$



, não tem polos

$F_1(t)=0$ se $t<0$

Então, $F_1(t) = \Theta(t)$. Analogamente, obtemos que

$F_2(t) = \Theta(t-a)$ e assim

$$F(t) = \Theta(t) - \Theta(t-a)$$