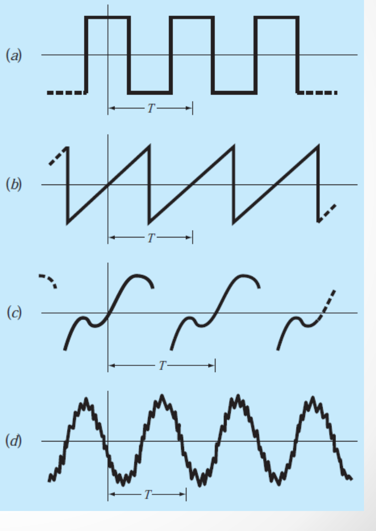
Modelagem em Engenharia C & A

Aula 11- Ajustes Avançados
Funções Periódicas e FFT

Funções Periódicas

- Até agora: funções representadas por polinômios regulares de primeira, segunda, ….ordens
- Funções Periódicas

$$f(t) = A_0 + C_1 \cos(\omega_0 t + \theta)$$

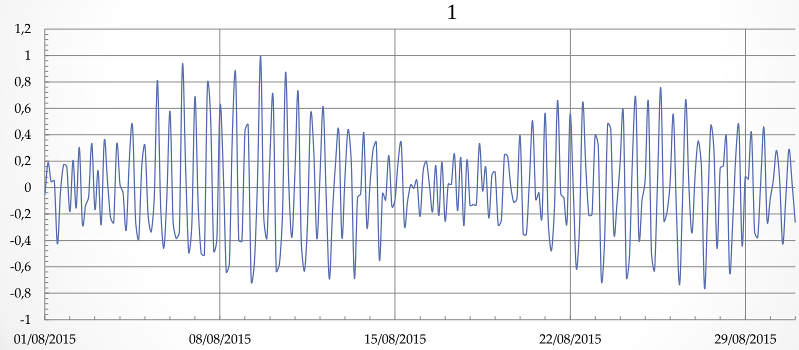


Exemplos na C & A

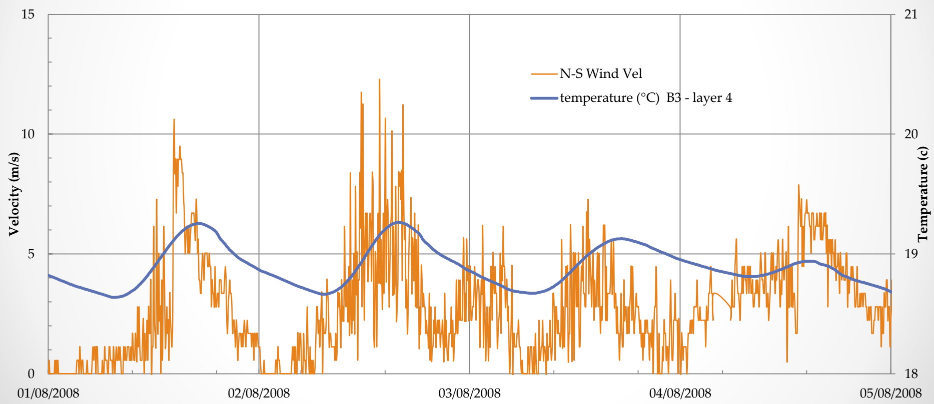
- Marés – portos, estruturas portuárias, estuários e ondas
- Vento – edifícios, torres, pontes, e etc
- Ressonância de estruturas – pontes e edifícios

Maré

$$H_m = H_{médio} + \sum_{1}^{n} \cdot a_i \cos(w_i \cdot t - F_i)$$



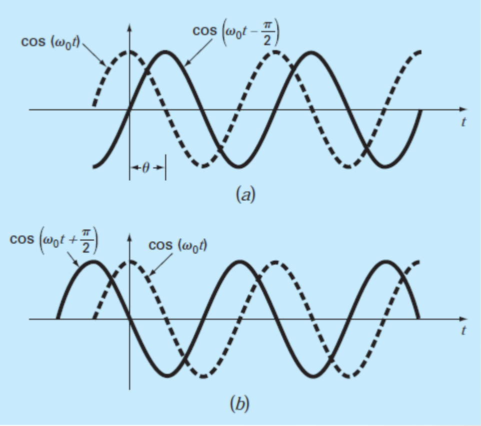
Vento



Propriedades e Comportamento

$$\omega_0 = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{T}$$



Ajuste de uma função senoidal

ou cossenoidal, ou tangentoidal, ou qualquercoisadal

$$f(t) = A_0 + C_1 \cos(\omega_0 t + \theta)$$

4 parâmetros a determinar

$$C_1 \cos(\omega_0 t + \theta) = C_1 [\cos(\omega_0 t) \cos(\theta) - \sin(\omega_0 t) \sin(\theta)]$$

$$f(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin(\omega_0 t) \rightarrow A_1 = C_1 \cos(\theta) + B_1 = -C_1 \sin(\theta)$$

$$C_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \qquad \theta = \arctan\left(-\frac{B_1}{A_1}\right)$$

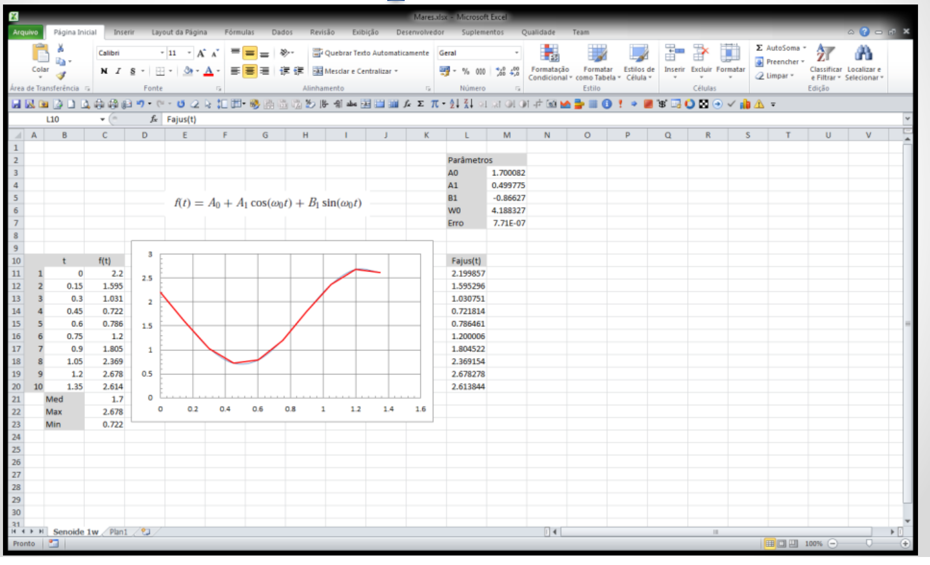
Se $\theta < 0 \rightarrow \theta = \theta + \pi$

Logo é possível fazer um ajuste utilizando as técnicas que já estudamos, que são…….

Técnicas de ajuste

- Resolver a matriz MMQ
  - Aplica-se a quaisquer tipos de dados (frequência de amostragem constante ou variável)
  - Formulação definida – fácil de programar
  - Aplica-se à uma única componente
- Utilizar o solver para achar os parâmetros
  - Mesmos anteriores
  - Pode-se aplicar à várias componentes
- Utilizar o FFT
  - Frequência de amostragem constante ou não
  - Aplica-se à várias componentes- fases

Exemplo Solver



$$f(t) = A_0 + A_1\cos(\omega_0 t) + B_1\sin(\omega_0 t)$$

Parâmetros	
A0	1.700082
A1	0.499775
B1	-0.86627
W0	4.188327
Erro	7.71E-07

	t	f(t)	Fajus(t)
1	0	2.2	2.199857
2	0.15	1.595	1.595296
3	0.3	1.031	1.030751
4	0.45	0.722	0.721814
5	0.6	0.786	0.786461
6	0.75	1.2	1.200006
7	0.9	1.805	1.804522
8	1.05	2.369	2.369154
9	1.2	2.678	2.678278
10	1.35	2.614	2.613844
	Med	1.7	
	Max	2.678	
	Min	0.722	

Fazendo o MMQ

$$y = A_0 + A_1\cos(\omega_0 t) + B_1\sin(\omega_0 t) + e \quad = \quad y = a_0 z_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_m z_m + e$$

$$z_0 = 1,\ z_1 = \cos(\omega_0 t),\ z_2 = \sin(\omega_0 t)$$

Somando todos os erros

$$S_r = \sum_{i=1}^{N} \{ y_i - [A_0 + A_1\cos(\omega_0 t_i) + B_1\sin(\omega_0 t_i)] \}^2$$

Derivando a função em z0, z1 e z2 para obter o mínimo ....

$$\begin{bmatrix} N & \Sigma\cos(\omega_0 t) & \Sigma\sin(\omega_0 t) \\ \Sigma\cos(\omega_0 t) & \Sigma\cos^2(\omega_0 t) & \Sigma\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t) \\ \Sigma\sin(\omega_0 t) & \Sigma\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t) & \Sigma\sin^2(\omega_0 t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma y\cos(\omega_0 t) \\ \Sigma y\sin(\omega_0 t) \end{Bmatrix}$$

Que pode ser resolvida facilmente com as técnicas de matriz já estudadas

Caso particular de Δt=cte

$$f(t) = A_0 + A_1\cos(\omega_0 t) + B_1\sin(\omega_0 t)$$

$$T = N \times \Delta t$$

$$W = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{\Sigma\sin(\omega_0 t)}{N} = 0 \qquad \frac{\Sigma\cos(\omega_0 t)}{N} = 0$$

$$\frac{\Sigma\sin^2(\omega_0 t)}{N} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\Sigma\cos^2(\omega_0 t)}{N} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\Sigma\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)}{N} = 0$$

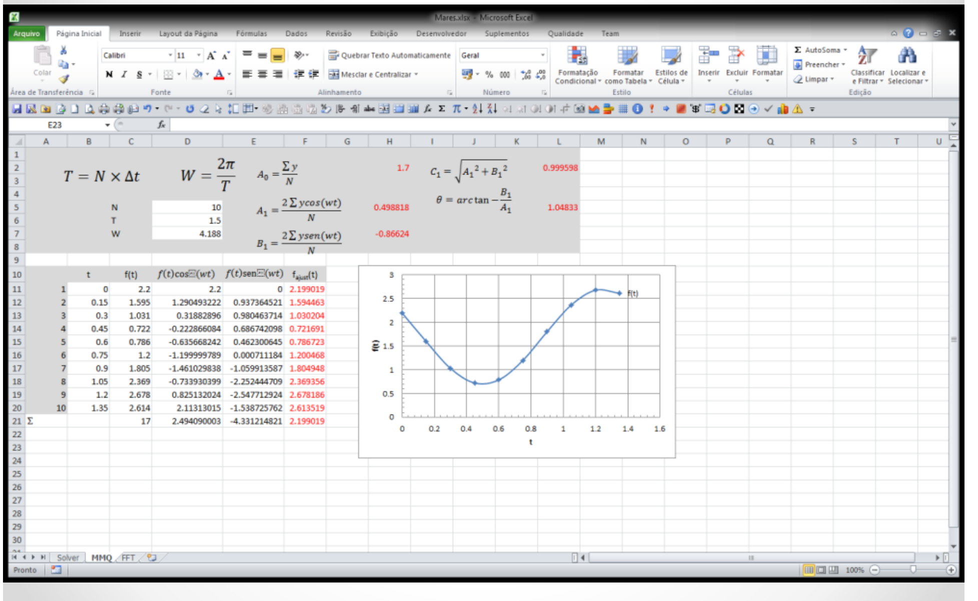
$$\begin{bmatrix} N & \Sigma\cos(\omega_0 t) & \Sigma\sin(\omega_0 t) \\ \Sigma\cos(\omega_0 t) & \Sigma\cos^2(\omega_0 t) & \Sigma\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t) \\ \Sigma\sin(\omega_0 t) & \Sigma\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t) & \Sigma\sin^2(\omega_0 t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma y\cos(\omega_0 t) \\ \Sigma y\sin(\omega_0 t) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N/2 & 0 \\ 0 & 0 & N/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma y\cos(\omega_0 t) \\ \Sigma y\sin(\omega_0 t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/N & 0 & 0 \\ 0 & 2/N & 0 \\ 0 & 0 & 2/N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma y\cos(\omega_0 t) \\ \Sigma y\sin(\omega_0 t) \end{Bmatrix}$$

$$A_0 = \frac{\sum y}{N}$$

$$A_1 = \frac{2\sum y cos(wt)}{N}$$

$$B_1 = \frac{2\sum y sen(wt)}{N}$$



$$T = N \times \Delta t \qquad W = \frac{2\pi}{T}$$

N	10
T	1.5
W	4.188

$A_0 = \frac{\sum y}{N}$ 1.7

$A_1 = \frac{2\sum y cos(wt)}{N}$ 0.498818

$B_1 = \frac{2\sum y sen(wt)}{N}$ -0.86624

$C_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$ 0.999598

$\theta = arc\tan -\frac{B_1}{A_1}$ 1.04833

	t	f(t)	$f(t)\cos(wt)$	$f(t)\text{sen}(wt)$	$f_{ajust}(t)$
1	0	2.2	2.2	0	2.199019
2	0.15	1.595	1.290493222	0.937364521	1.594463
3	0.3	1.031	0.31882896	0.980463714	1.030204
4	0.45	0.722	-0.222866084	0.686742098	0.721691
5	0.6	0.786	-0.635668242	0.462300645	0.786723
6	0.75	1.2	-1.199999789	0.000711184	1.200468
7	0.9	1.805	-1.461029838	-1.059913587	1.804948
8	1.05	2.369	-0.733930399	-2.252444709	2.369356
9	1.2	2.678	0.825132024	-2.547712924	2.678186
10	1.35	2.614	2.11313015	-1.538725762	2.613519
Σ		17	2.494090003	-4.331214821	2.199019

Série de Fourrier

- Problemas de transferência de calor em estruturas

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \cdots$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

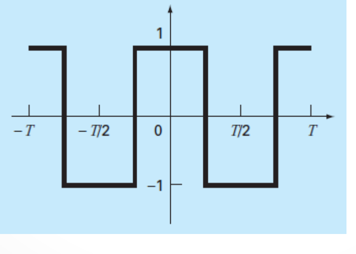
$$a_0 = \frac{\int_0^T f(t)\, dt}{T} \qquad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt \qquad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega_0 t)\, dt$$

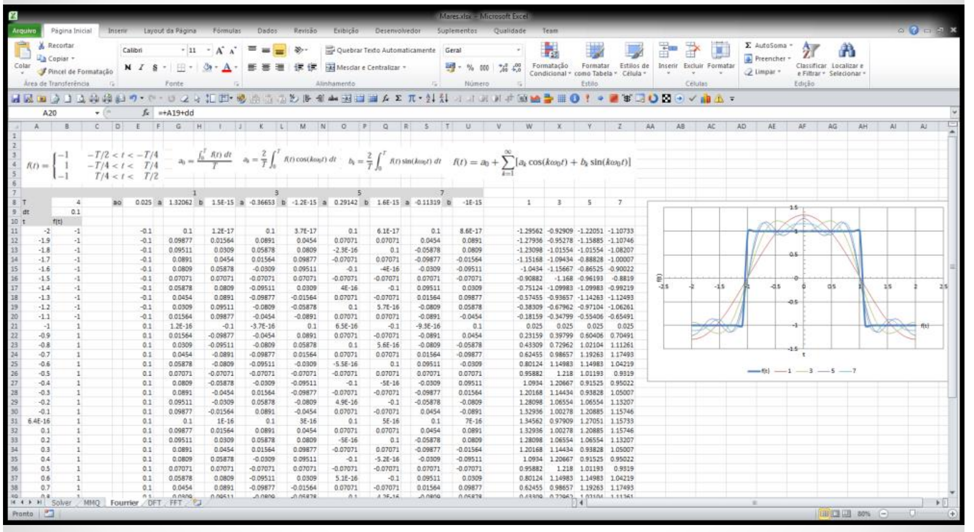
Chapra, S – Numérical Methods for Engineers

Exemplo

- Aproximar a função retangular por uma função periódica

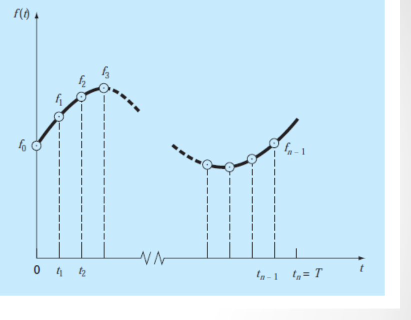
$$f(t) = \begin{cases} -1 & -T/2 < t < -T/4 \\ 1 & -T/4 < t < T/4 \\ -1 & T/4 < t < T/2 \end{cases}$$





Transformada de Fourier

- Dados em engenharia são discretos
- Pontos são especificados entre 0, N-1



$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-ikw_0 n}$$

$$f_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{ikw_0 n}$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

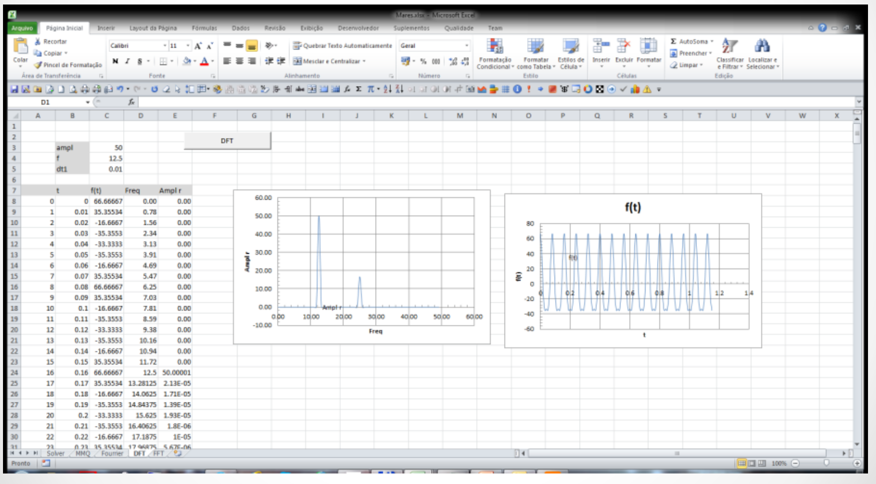
$$K = 0,1,\ldots,N-1$$

Resolvendo…

$$e^{-\pm ia} = \cos a \pm i\, sen\, a$$

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} \left| f_n \cos k w_0 n - i f_n\, sen\, k w_0 n \right|$$

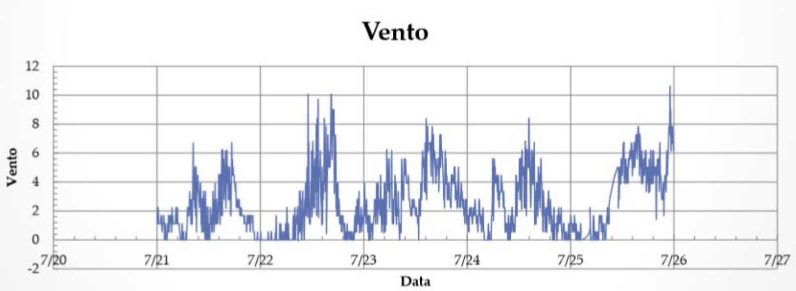
$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| F_k \cos k w_0 n + i\, F_k sen\, k w_0 n \right|$$



```
Sub DFT()
    Dim k As Integer, n As Integer, Np As Integer
    Dim dt As Single, ang As Single, w0 As Single, real As Single, imag As Single
    Dim pi As Single
    Dim r As Range

    'pega os dados dos pontos
    Set r = Application.InputBox(prompt:="Enter data columns t - f(t):", Type:=8)
    'Set r = Range("b8:c119")
    Np = r.Rows.Count

    'verifica se existem dados
    If Np = 0 Then
        MsgBox "Nodata supplied! Aborted", vbOKOnly
        Exit Sub
    End If

    ' verifica se a frequencia é constante
    dt = r(2, 1) - r(1, 1)
    For k = 3 To Np
        If r(k, 1) - r(k - 1, 1) <> dt Then
            MsgBox "Data frequency not constant! Aborted", vbOKOnly
            Exit Sub
        End If
    Next k

    'calcula o espectro
    pi = 4 * Atn(1)
    w0 = 2 * pi / Np
    For k = 1 To Np \ 2
        real = 0
        imag = 0
        For n = 1 To Np
            ang = (k - 1) * w0 * (n - 1)
            real = real + r(n, 2) * Cos(ang) / Np
            imag = imag - r(n, 2) * Sin(ang) / Np
        Next n
        'escreve a frequencia
        r(k, 3) = (k - 1) / (dt) / Np

        'escreve a amplitude
        r(k, 4) = Sqr(real ^ 2 + imag ^ 2) * 2
    Next k

End Sub
```

Exercício Vento

- O vento atuando sobre o guarda-corpo e tabuleiro de uma ponte introduz um esforço lateral que deve ser resistido pelo peso próprio de uma ponte.



- Determine as principais frequências e os valores de velocidades associados.
- Com base na análise espectral, crie uma rotina para gerar as velocidades de vento para o período de um ano com estas frequências
- Determine a velocidade média correspondente ao terço superior da distribuição estatística das velcidades simuladas.