Instituto de Física da USP
Física Moderna I – 4300375
1º Semestre de 2014
Profª Márcia de Almeida Rizzutto

5ª Lista de Exercícios

Nos exercícios 1 a 6, justifiquem todas as passagens e respostas.

1 Seja um poço de potencial dado por:

$$V(x) = \begin{cases} +\infty \quad , & \text{se } x < -a/2 \\ 0 \quad , & \text{se } -a/2 \leq x \leq +a/2 \\ +\infty \quad , & \text{se } x > +a/2 \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de $V(x)$.

b) Descreva as condições de contorno, justificando fisicamente sua resposta.

c) Quais são as energias permitidas para o sistema? Determine quais as regiões de estado ligado e estado não ligado. Justifique.

2 Seja o mesmo poço do exercício anterior.

a) Escreva a equação de Schrödinger **dependente do tempo** para as três regiões do poço. Justifique.

b) Suponha que o sistema tenha energia $E > 0$. Escreva a equação de Schrödinger **independente do tempo** e as soluções gerais $\psi(x)$ da parte espacial. Justifique.

c) Aplique as condições de contorno em x e determine as energias possíveis ao sistema. Elas são quantizadas? Justifique.

d) Mostre que as energias deste sistema são tais que

$$\frac{\Delta E}{E_n} = \frac{E_{n+1} - E_n}{E_n} = \frac{2n+1}{n^2}$$

e discuta o significado físico deste resultado, tendo em vista o princípio da correspondência.

3 Considere o poço infinito das duas questões anteriores.

a) Determine as funções de onda normalizadas do problema. Justifique.

b) Determine $< x >$ e $< x^2 >$. Justifique.

c) Determine $< \hat{p} >$ e $< \hat{p}^2 >$. Justifique.

d) Interprete os resultados dos itens b) e c) em vista do princípio da correspondência. Justifique.

e) Determine as incertezas da posição e momento, e discuta a validade do princípio da incerteza nestas funções de onda. Justifique.

4 Seja um poço de potencial dado por:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & , \quad \text{se } x < -a \\ V_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) & , \quad \text{se } -a \leq x \leq +a \\ V_0 & , \quad \text{se } x > +a \end{cases}$$

com $a > 0$.

a) Esboce o gráfico de $V(x)$.

b) Descreva as condições de contorno, justificando fisicamente sua resposta.

c) Quais são as energias permitidas para o sistema? Para uma dada energia E determine quais as regiões de estado ligado e estado não ligado. Quais as posições permitidas classicamente, para $E < V_0$ e $E > V_0$? Justifique.

5 Seja uma partícula livre, com $V(x) = 0$, $\forall x$.

a) Escreva a equação de Schrödinger **dependente do tempo**. Escreva a solução $\Psi(x,t)$ para este sistema. Justifique.

b) Considere uma partícula de massa m se movendo a partir de $-\infty$. Mostre que o operador momento, nesta situação, pode ser escrito como $\hat{p}\psi(x,t) \equiv \hbar k \psi(x,t)$, justificando seus resultados. Interprete este resultado.

6 Considere uma barreira de potencial da forma

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } x < -2a \\ V_0 & , \quad \text{se } -2a < x < -a \\ 0 & , \quad \text{se } -a < x < +a \\ V_0 & , \quad \text{se } +a < x < +2a \\ 0 & , \quad \text{se } x > +2a \end{cases}$$

com $a > 0$.

a) Esboce o gráfico de $V(x)$.

b) Utilizando argumentos físicos, esboce a forma de $\psi(x)$. Justifique.

7 Uma partícula de massa m encontra-se em um estado descrito pela função de onda

$$\Psi(x,t) = C\left(4\frac{m\omega x^2}{\hbar} - 2\right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} e^{-i5\omega t/2}$$

onde ω é uma constante conhecida.

a) Esboce o gráfico da parte espacial $\psi(x)$.

b) Determine a constante C. Justifique fisicamente seu cálculo.

c) Quais as posições mais prováveis para esta partícula? Justifique.

d) Determine o valor esperado da posição $\hat{x}$ e do quadrado da posição $\hat{x}^2$. Justifique.

e) Determine o valor esperado do momento $\hat{p}$ e do quadrado do momento $\hat{p}^2$. Justifique.
Dica: Considere $\xi = \alpha x$, $\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$ *e recorde-se que:*

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2a)^n} = \quad , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

8 Uma partícula de massa m encontra-se em um estado descrito pela função de onda do exercício anterior.

a) Mostre que esta equação é uma solução da equação de Schrödinger dependente do tempo para um potencial da forma $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$.

b) A energia desta partícula é constante no tempo? Se sim, determine seu valor. Se não, determine o seu valor médio. Em ambos os casos, justifique a resposta.

c) Suponha que seja feita uma medida desta partícula. O que pode ser dito sobre sua posição? E sobre seu momento? E sobre sua energia? Justifique.

d) E se forem feitas 1000 medidas?

9 Uma partícula de massa m executa um movimento unidimensional sob o efeito de um potencial da forma

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 & , \quad \text{se } |x| > a \\ \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 & , \quad \text{se } -a \leq x \leq +a \end{cases}$$

com energia $E < V_0$ e com $a > 0$.

a) Esboce este potencial.

b) Escreva a equação de Schrödinger para cada uma das três regiões do problema. Descreva as soluções cabíveis do problema, justificando fisicamente sua escolha.

c) Escreva as equações que determinam as energias acessíveis ao sistema. **Não é necessário resolvê-las**.

10 Uma partícula de massa m se move no espaço bidimensional na ausência de um potencial. Considere a partícula se movendo na direção $\hat{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{y})$ com energia $E > 0$.

a) Escreva a equação de Schrödinger **dependente do tempo** desta partícula. Descreva as soluções deste problema. Justifique.

b) O momento $\vec{p}$ da partícula é constante **no tempo**? Se sim, determine seu valor. Se não, determine o seu valor médio. Em ambos os casos, justifique a resposta.