Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Princípio dos Trabalhos Virtuais para a Elasticidade Tridimensional

Define-se o ***trabalho virtual dos esforços internos*** – as tensões – σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, σ_{xy}, σ_{xz} e σ_{yz} para o campo das deformações virtuais por:

$$\delta\tau_i = \int_V \left(\delta\varepsilon_{xx}\sigma_{xx} + \delta\varepsilon_{yy}\sigma_{yy} + \delta\varepsilon_{zz}\sigma_{zz} + \delta\gamma_{xy}\sigma_{xy} + \delta\gamma_{xz}\sigma_{xz} + \delta\gamma_{yz}\sigma_{yz}\right) dV$$

$$\delta\tau_i = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\}\, dV$$

O ***trabalho virtual dos esforços externos*** é dado por:

$$\delta\tau_e = \int_V \{\delta u\}^T \{f^B\} dV + \int_{S_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dS$$

onde:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} \qquad \{\delta u\} = \begin{Bmatrix} \delta u(x,y,z) \\ \delta v(x,y,z) \\ \delta w(x,y,z) \end{Bmatrix}$$

O ***Princípio dos Trabalhos Virtuais*** para a elasticidade tridimensional pode ser escrito como:

$$\boxed{\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \left\{f^B\right\} dV + \int_{S_f} \{\delta u\}^T \left\{f^S\right\} dS}$$

Mostra-se que:

Dados $\left\{f^B\right\}$ em V e $\left\{f^S\right\}$ em S_f

são condições equivalentes para o campo de tensões $\{\sigma\}$ satisfazer o ***Princípio dos Trabalhos Virtuais*** para qualquer deslocamento virtual e satisfazer equilíbrio, *i.e.*,

Princípio dos Trabalhos Virtuais

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{f^B\} dV + \int_{S_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dS$$

para todo $\{\delta u\}$, $\{\delta u\} = 0$ em S_u

$\Updownarrow$

Equilíbrio

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x^B = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y^B = 0 \quad \text{para todo } \underline{x} \text{ em } V$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z^B = 0$$

$$[T]\{u\} = \{f^S\} \quad \text{para todo } \underline{x} \text{ em } S_f$$

O problema da elasticidade linear pode ser formulado usando o princípio dos trabalhos virtuais.

Determinar $\{\delta u\}$, $\{\sigma\}$ e $\{\varepsilon\}$ tal que

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{f^B\} dV + \int_{S_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dS$$

para todo $\{\delta u\}$, $\{\delta u\} = 0$ em S_u

Equilíbrio

(a)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [\partial_\varepsilon]\{u\} \qquad \forall\ \underline{x} \in V$$

Compatibilidade

(b)

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \qquad \forall\ \underline{x} \in V$$

Equação Constitutiva

(c)

Substituindo as equações de compatibilidade e constitutivas ((b) e (c)) na expressão do princípio dos trabalhos virtuais (a) obtém-se a formulação somente em termos dos deslocamentos

Determinar $\{u\}$ tal que

$$\int_V \{\delta u\}^T [\partial_\varepsilon][C][\partial_\varepsilon]^T \{u\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{f^B\} dV + \int_{S_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dS$$

$$\forall \{\delta u\}, \{\delta u\} = 0 \text{ em } S_u$$

Tendo-se $\{u\}$, obtém-se

$$\{\varepsilon\} = [\partial_\varepsilon]\{u\}$$

e

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$$

Princípio dos Trabalhos Virtuais para a Elasticidade no Plano

Estado Plano de Tensões

Particularizando-se a expressão da elasticidade tridimensional para as condições de estado plano de tensão:

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left(\delta\varepsilon_{xx}\sigma_{xx} + \delta\varepsilon_{yy}\sigma_{yy} + \delta\varepsilon_{zz}0 + \delta\gamma_{xy}\sigma_{xy}\right) dz\, dA$$

$$= h\int_A \left(\delta\varepsilon_{xx}\sigma_{xx} + \delta\varepsilon_{yy}\sigma_{yy} + \delta\gamma_{xy}\sigma_{xy}\right) dA$$

e

$$\int_V \{\delta u\}^T \left\{f^B\right\} dV + \int_{S_f} \{\delta u\}^T \left\{f^S\right\} dS = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left(\delta u\, f_x^B + \delta v\, f_y^B\right) dz\, dA +$$

$$+ \int_{L_f} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\delta u\, f_x^S + \delta v\, f_y^S\right) dz\, dL = h\int_A \left(\delta u\, f_x^B + \delta v\, f_y^B\right) dA + h\int_{L_f} \left(\delta u\, f_x^S + \delta v\, f_y^S\right) dL$$

Usando a notação:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

e definindo-se

$$\{\delta u\} = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{Bmatrix} \qquad \{f^{B}\} = \begin{Bmatrix} f_x^{B} \\ f_y^{B} \end{Bmatrix} \qquad \{f^{S}\} = \begin{Bmatrix} f_x^{S} \\ f_y^{S} \end{Bmatrix}$$

resulta:

$$\int_A \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_A \{\delta \mathrm{u}\}^T \{f^{B}\} dA + \int_{L_f} \{\delta \mathrm{u}\}^T \{f^{S}\} dL$$

Estado Plano de Deformações

As componentes de deformação ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy} são diferentes de zero e as componentes de tensão σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} , σ_{zz} são não nulas, então analogamente ao caso de estado plano de tensões, tem-se:

$$\int_A \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_A \{\delta u\}^T \{ f^B \} dA + \int_{L_f} \{\delta u\}^T \{ f^S \} dL$$

Introdução ao Método dos Elementos Finitos Considerando o Problema Plano

Equilíbrio:

$$\int_A \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dA = \int_A \{\delta u\}^T \{f^B\} dA + \int_{L_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dL$$

onde $\{u\}^T = \{u \quad v\}$

Compatibilidade:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Equação constitutiva:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \qquad \text{(i)}$$

Definindo-se

$$\left[\partial_{\varepsilon}\right]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

A equação de compatibilidade pode ser reescrita como:

$$\{\varepsilon\}=\left[\partial_{\varepsilon}\right]\{u\} \qquad \text{(ii)}$$

Substituindo-se (i) e (ii) na equação de equilíbrio, resulta:

$$\int_{A}\{\delta u\}^{T}\left[\partial_{\varepsilon}\right]^{T}[C]\left[\partial_{\varepsilon}\right]\{u\}dA=\int_{A}\{\delta u\}^{T}\left\{f^{B}\right\}dA+\int_{L_f}\{\delta u\}^{T}\left\{f^{S}\right\}dL$$

Formulação do Problema da Elasticidade Plana em Termos de Deslocamentos

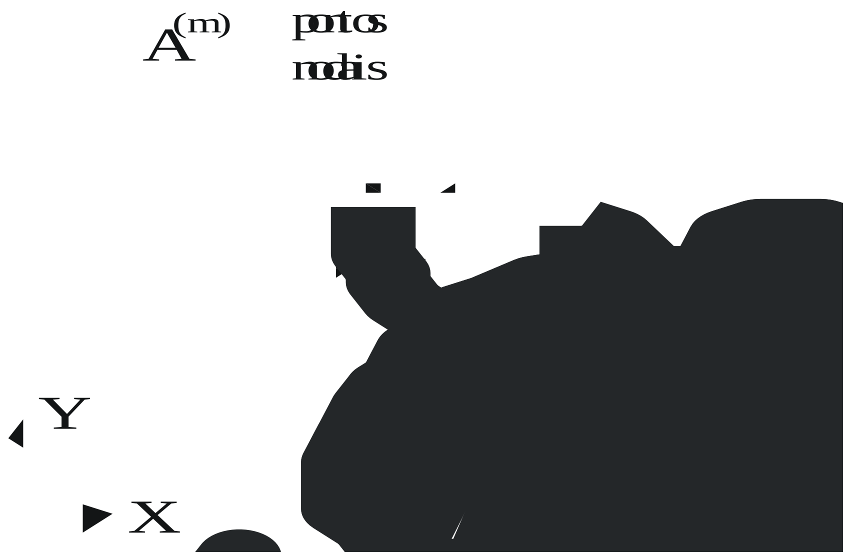
Determinar o campo de deslocamentos $\{u\}$, $\{u\}^{\mathrm{T}} = \{\ u(x,y)\ \ v(x,y)\ \}$ tal que:

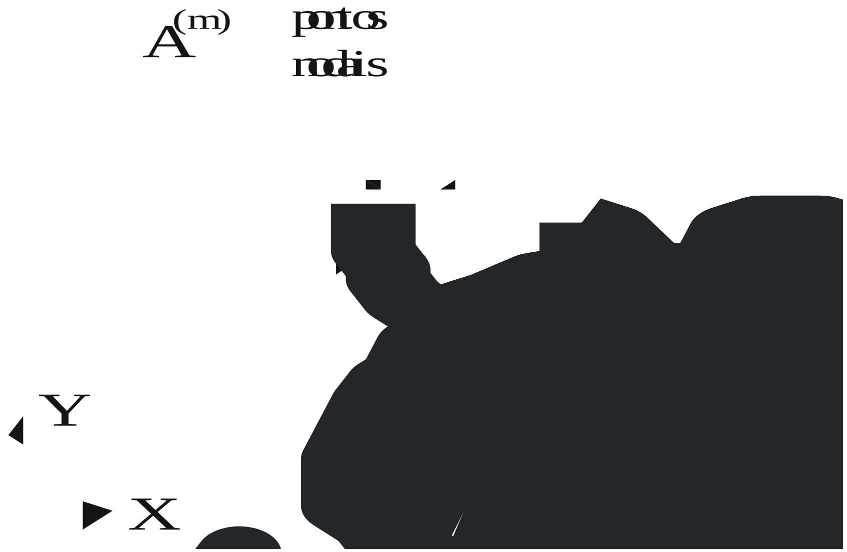
$$\int_A \{\delta u\}^T [\partial_\varepsilon]^T [C][\partial_\varepsilon]\{u\} dA = \int_A \{\delta u\}^T \{f^B\} dA + \int_{L_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dL$$

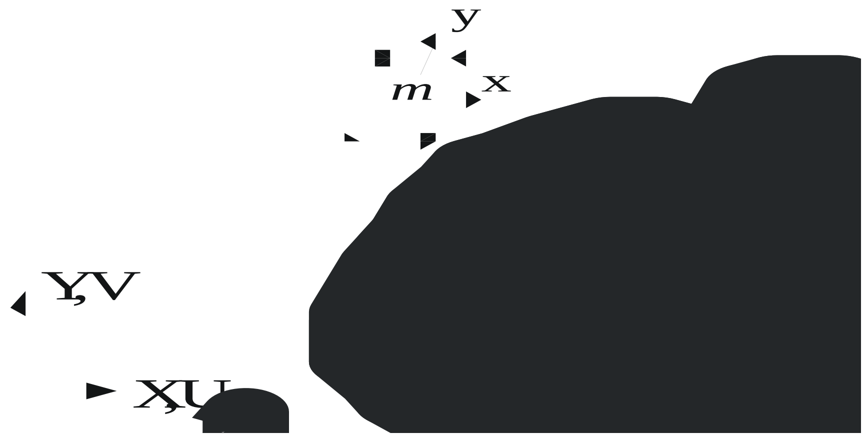
para qualquer $\{\delta u\}$, $\{\delta u\}^T = \{\ \delta u(x,y),\ \delta v(x,y)\ \}$ tal que $\{\delta u\} = \{0\}$ em L_u

Vamos procurar a solução para a equação acima considerando uma determinada forma funcional para os deslocamentos.

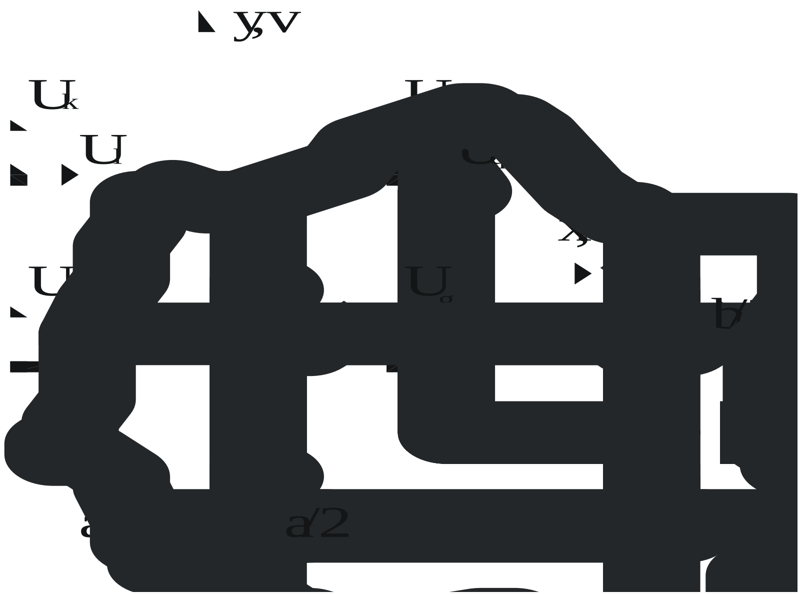
Para se definir essa forma considere:



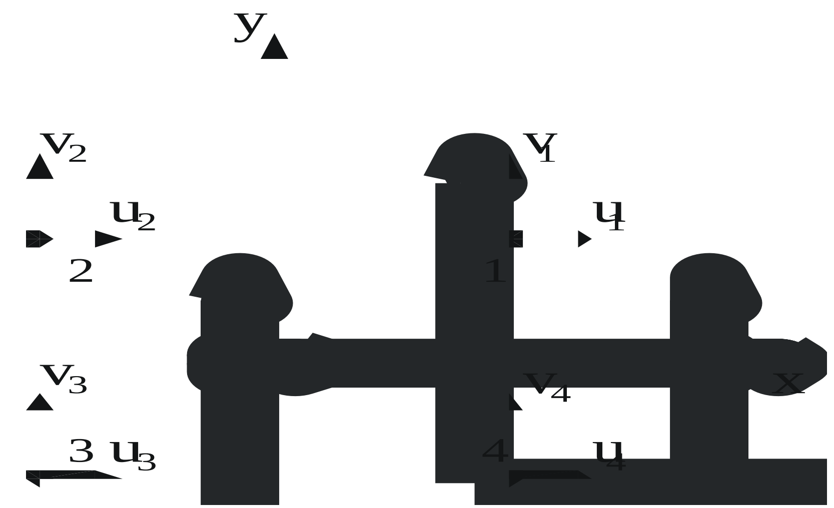

A(m)
Y
X


y
x
m
Y,V
X,U

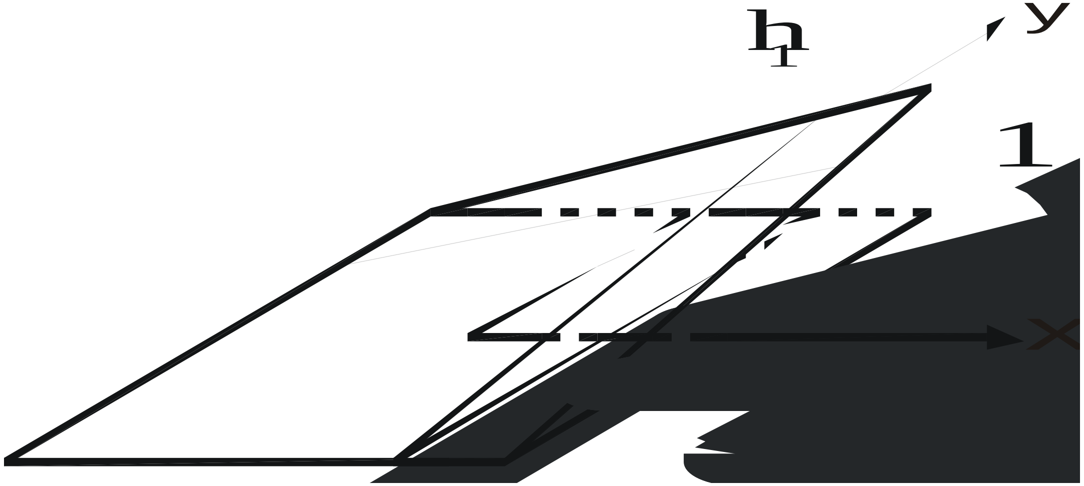
Considere um elemento genérico



e uma numeração local



define-se



Então

$$h_1(x,y)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{2x}{a}\right)\left(1+\frac{2y}{b}\right)$$

$$h_2(x,y)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{2x}{a}\right)\left(1+\frac{2y}{b}\right)$$

$$h_3(x,y)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{2x}{a}\right)\left(1-\frac{2y}{b}\right)$$

$$h_4(x,y)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{2x}{a}\right)\left(1-\frac{2y}{b}\right)$$

Define-se o campo de deslocamentos no interior do elemento por

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{4} h_i u_i$$

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^{4} h_i v_i$$

Nota-se que

$$u(x_j, y_j) = \sum_{i=1}^{4} h_i(x_j, y_j) u_i$$

Como $h_i(x_j, y_j) = 1$ quando $i = j$ e $h_i(x_j, y_j) = 0$ quando $i \neq j$

$$u(x_j, y_j) = u_j$$

analogamente

$$v(x_j, y_j) = v_j$$

Definindo-se

$$\{\hat{u}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Pode-se escrever

$$\left\{u^{(m)}\right\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = [H]\{\hat{u}\}$$

onde:

$$[H] = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix}$$

Considere: $$\{U\}^T = \{U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad \dots \quad U_n\}$$

onde U_i , i = 1, ..., n representam todos os deslocamentos nodais do modelo.

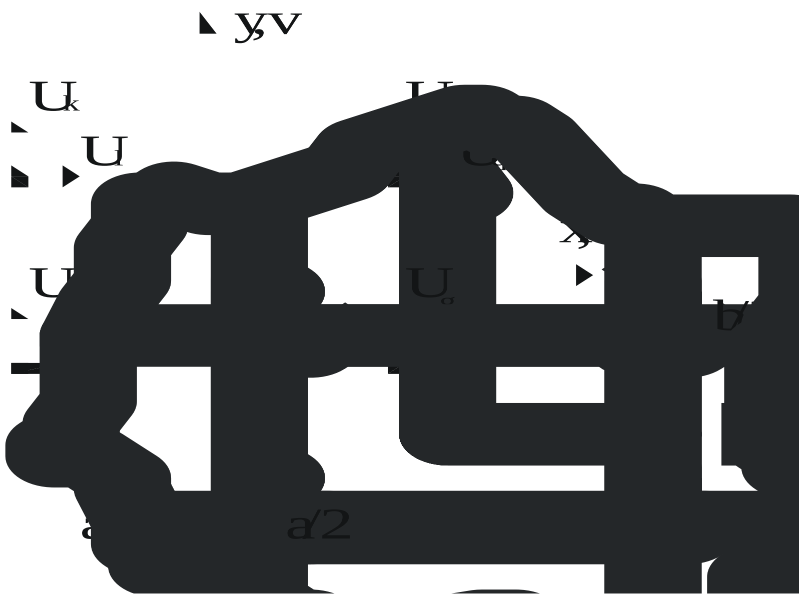
Pode-se escrever:

$$\{u^{(m)}\} = [H^{(m)}]\{U\}$$

onde

$$\{u^{(m)}\} = \begin{Bmatrix} u^{(m)}(x, y) \\ v^{(m)}(x, y) \end{Bmatrix}$$

e para o elemento (m) abaixo



tem-se

$$\left[H^{(m)}\right] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} & & & U_K & & & & U_\ell & U_i & & U_q & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & h_2 & h_3 & \ldots & h_1 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & h_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \end{array}\right. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} U_f & U_p & & U_j & & U_g & \end{array} \\ \left.\begin{array}{ccccccc} h_4 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & h_1 & \ldots & h_3 & \ldots & h_4 & \ldots \end{array}\right] \end{array}$$

Considerando as relações deslocamento-deformações

$$\left\{\varepsilon^{(m)}\right\} = \left[B^{(m)}\right]\left\{U\right\}$$

onde

$$\left[B^{(m)}\right] = \left[\partial_\varepsilon\right]\left[H^{(m)}\right]$$

e usando a equação constitutiva

$$\left\{\sigma^{(m)}\right\} = \left[C^{(m)}\right]\left\{\varepsilon^{(m)}\right\}$$

sendo que

$$\left[C^{(m)}\right] = \left[C\right]$$

para material homogêneo.

Lembrando o enunciado do *Princípio dos Trabalhos Virtuais*

$$\int_A \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dA = \int_A \{\delta \mathrm{u}\}^T \{f^B\} dA + \int_{L_f} \{\delta \mathrm{u}\}^T \{f^S\} dL$$

pode-se escrevê-lo considerando-se a interpolação de elementos finitos

$$\{u^{(m)}\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \left[H^{(m)}\right]\{U\}$$

E considerando ainda que os deslocamentos virtuais são interpolados da mesma forma que os deslocamentos

$$\{\delta u^{(m)}\} = \left[H^{(m)}\right]\{\delta U\}$$

$$\{\delta\varepsilon^{(m)}\} = \left[B^{(m)}\right]\{\delta U\}$$

então resulta

$$\{\delta U\}^T \left[\sum_{m=1}^{n_e} \int_{A^{(m)}} \left[B^{(m)}\right]^T \left[C^{(m)}\right]\left[B^{(m)}\right] dA^{(m)} \right] \{U\} =$$

$$\{\delta U\}^T \left[\sum_{m=1}^{n_e} \left(\int_{A^{(m)}} \left[H^{(m)}\right]^T \left\{ f^{\,B^{(m)}} \right\} dA^{(m)} \right) \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{n_e} \left(\int_{L_1^{(m)},\ldots L_q^{(m)}} \left[H^{(m)}\right]^T \left\{ f^{\,S^{(m)}} \right\} dL^{(m)} \right) \right]$$

onde $L_1^{(m)}$, $L_2^{(m)}$, ..., $L_f^{(m)}$ lados do elemento (m) que pertencem a fronteira do domínio L_f .

Definindo-se

$$\left[K^{(m)}\right] = \int_{A^{(m)}} \left[B^{(m)}\right]^T \left[C^{(m)}\right]\left[B^{(m)}\right] dA^{(m)}$$

$$\left\{R_B^{(m)}\right\} = \int_{A^{(m)}} \left[H^{(m)}\right]^T \left\{f^{B^{(m)}}\right\} dA^{(m)}$$

$$\left\{R_S^{(m)}\right\} = \int_{L_1^{(m)},\ldots L_q^{(m)}} \left[H^{(m)}\right]^T \left\{f^{S^{(m)}}\right\} dL^{(m)}$$

$$\left[K\right] = \sum_{m=1}^{n_e} \left[K^{(m)}\right]$$

$$\left\{R_B\right\} = \sum_{m=1}^{n_e} \left\{R_B^{(m)}\right\} \qquad \left\{R_S\right\} = \sum_{m=1}^{n_e} \left\{R_S^{(m)}\right\} \qquad \left\{R\right\} = \left\{R_B\right\} + \left\{R_S\right\}$$

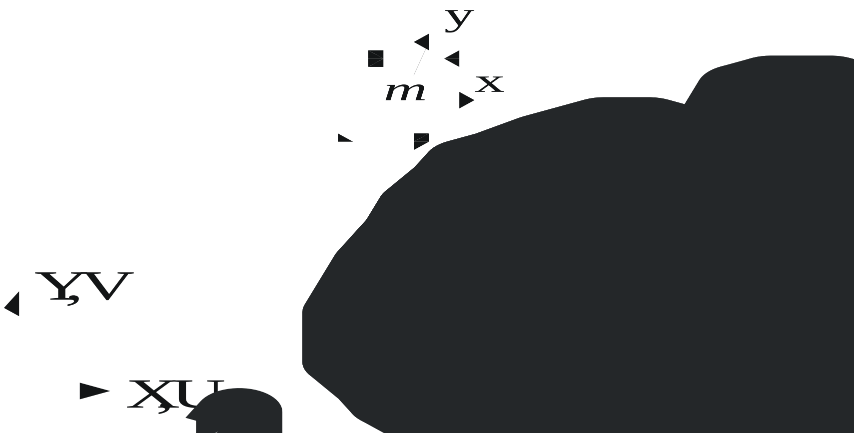
Pode-se escrever

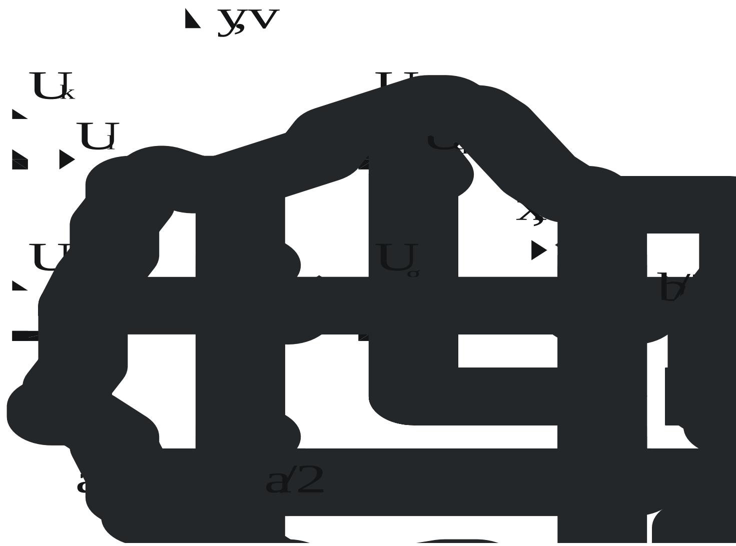
$$\left\{\delta U\right\}^T \left(\left[K\right]\left\{U\right\} - \left\{R\right\}\right) = 0$$

Como os deslocamentos virtuais são arbitrários, $\{\delta U\}$ pode ser tomado arbitrariamente levando a:

$$\left[K\right]\left\{U\right\} = \left\{R\right\}$$

Montagem da Matriz de Rigidez





$$\left[K\right]=\sum_{m=1}^{n_e}\left[K^{(m)}\right]$$

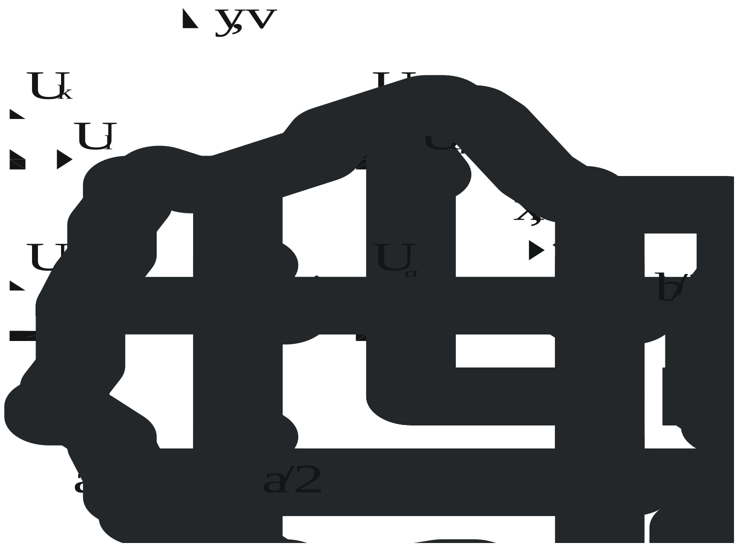
$$K_{ij}^{(m)} = \int_{A^{(m)}} \left\{B^{(m)}\right\}_i^T \left[C\right]\left\{B^{(m)}\right\}_j \, dA^{(m)}$$

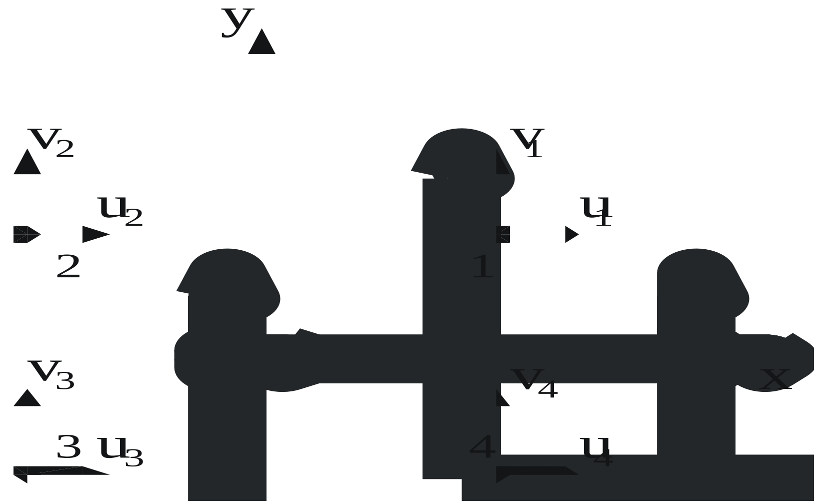
$$\left[B^{(m)}\right]=\left\lfloor \ldots\ldots\ldots \quad \left|\left\{B^{(m)}\right\}_i\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left|\left\{B^{(m)}\right\}_j\right| \quad \ldots\ldots\ldots \right\rfloor$$

$$\underset{\Uparrow}{i} \qquad \qquad \underset{\Uparrow}{j}$$

$K_{ij}^{(m)} \neq 0$ somente se os graus de liberdade U_i e U_j pertencerem ao elemento (m)

Montagem da Matriz de Rigidez





Recorda-se

$$\left\{u^{(m)}\right\}_{2\times 1} = \left[H^{(m)}\right]_{2\times N}\left\{U\right\}_{N\times 1} = \left[H\right]_{2\times 8}\left\{\hat{u}\right\}_{8\times 1}$$

Analogamente

$$\left\{\varepsilon^{(m)}\right\}_{3\times 1} = \left[B^{(m)}\right]_{3\times N}\left\{U\right\}_{N\times 1} = \left[B\right]_{3\times 8}\left\{\hat{u}\right\}_{8\times 1}$$

Definindo

$$[k]_{8\times 8} = \int_A [B]^T [C][B]\, dA$$

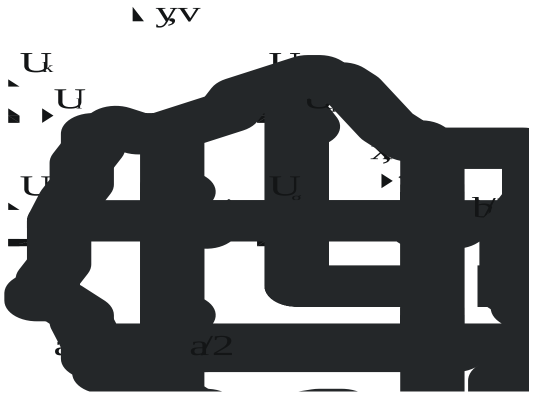
$$K_{ij}^{(m)} = k_{56}$$

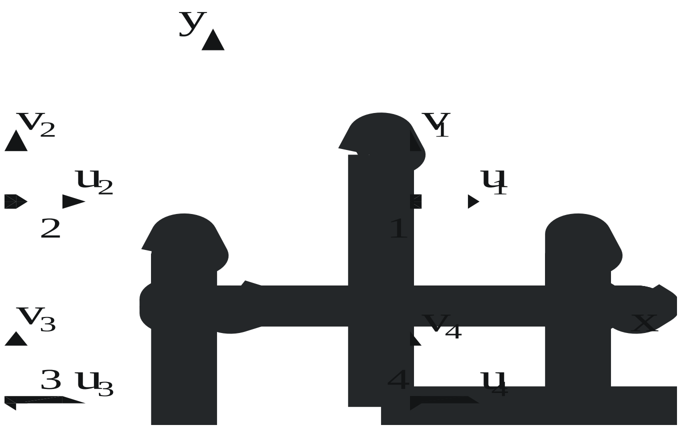
$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
 & U_i & u_3 & \\
\hline
 & U_j & v_3 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\{\hat{u}\} = \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \right\} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

Os termos de $[K^{(m)}]$ que não são encontrados em $[k]$ são nulos

Montagem da Matriz de Rigidez





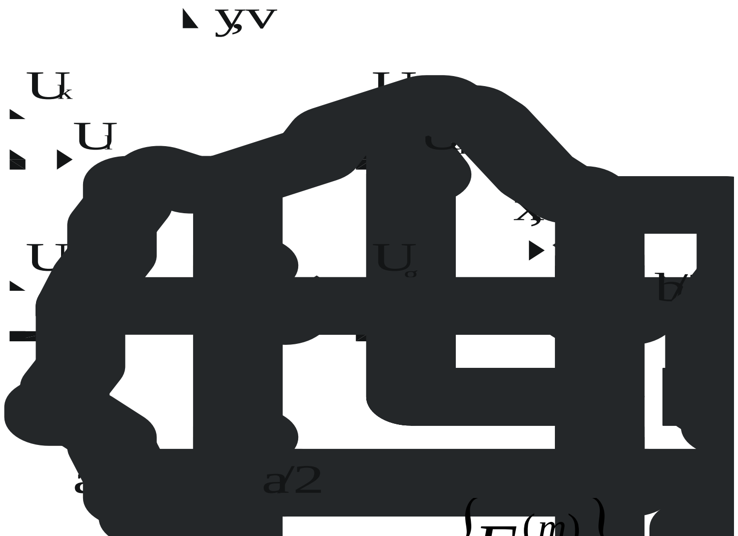
Define-se

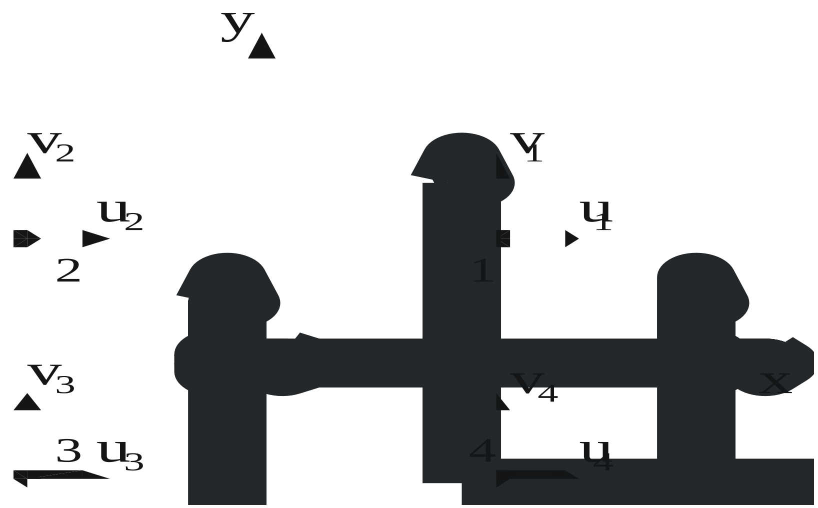
$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\quad\; u_1 \quad\; v_1 \quad\; u_2 \quad v_2 \quad\; u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad\; v_4 \\
\left\{LM^{(m)}\right\}^T = \left\{q \quad p \quad l \quad k \quad i \quad j \quad f \quad g\right\}
\end{array}
$$

As contribuições da matriz de rigidez do elemento (m) para a matriz [K] podem ser obtidas somando-se

k_{11} na posição qq de [K]
k_{12} na posição qp de [K]
⋮
k_{18} na posição qg de [K]
k_{22} na posição pp de [K]
⋮
k_{28} na posição pg de [K]

Forças Nodais





$$\{F^{(m)}\}_{N\times 1} = [K^{(m)}]_{N\times N}\{U\}_{N\times 1}$$

$$\{f\} = [k]\{\hat{u}\}$$