



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Laboratório de Eletromagnetismo Aplicado**  
**LMAG-PEA-EPUSP**



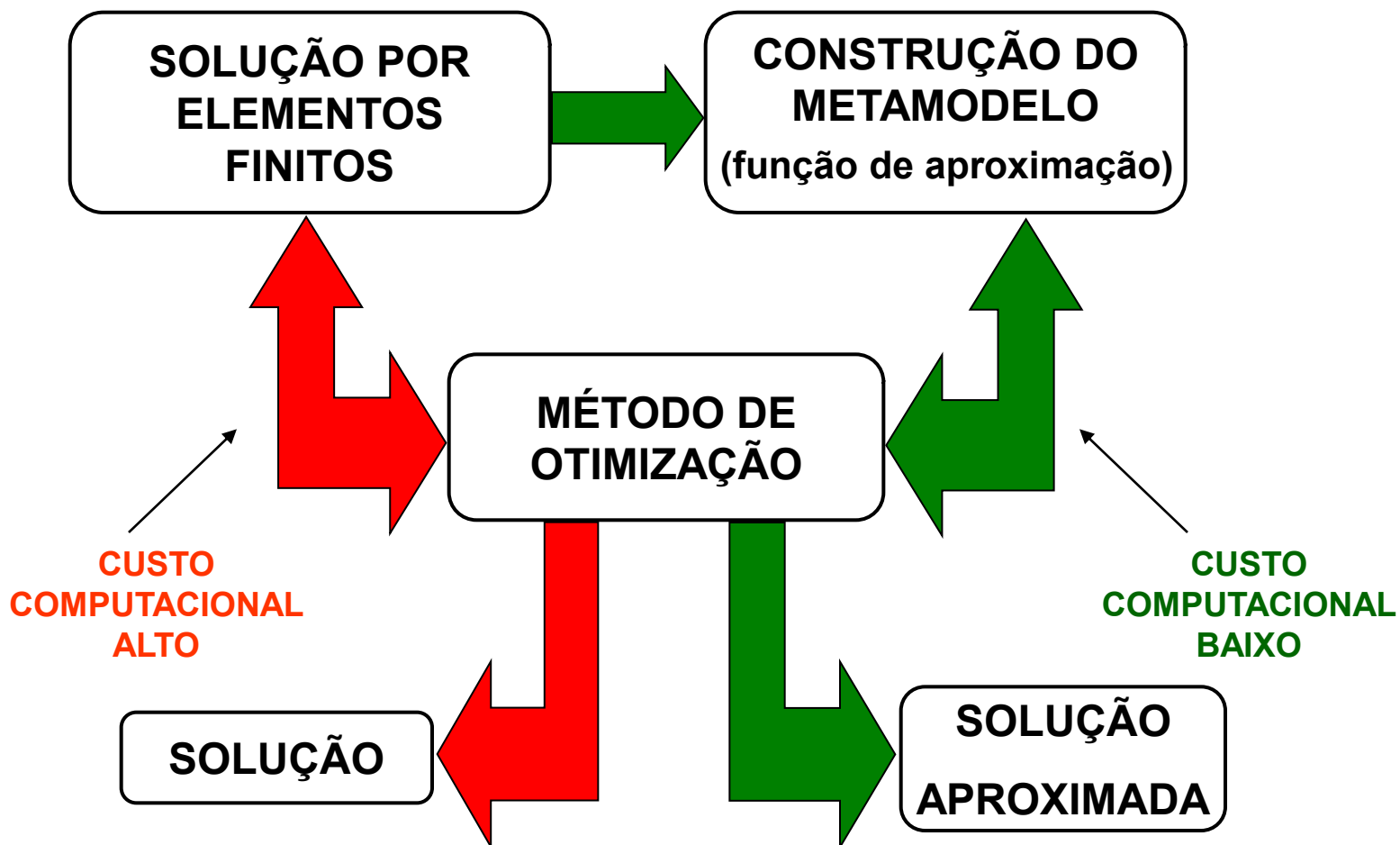
# **FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO**

## **APLICADAS AO PROJETO DE**

## **EQUIPAMENTOS ELETROMAGNÉTICOS**

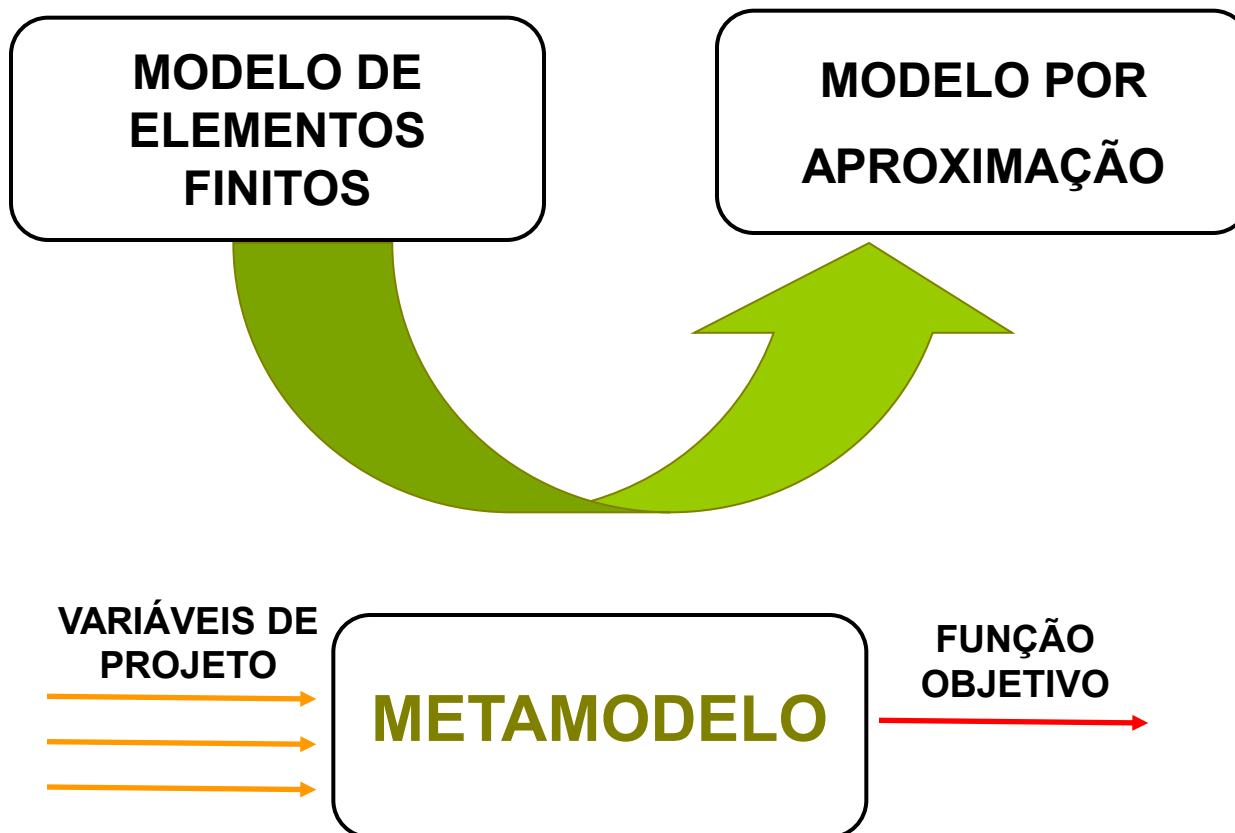


# INTRODUÇÃO: OTIMIZAÇÃO DE UM PROJETO





# MODELOS POR SUBSTITUIÇÃO





# Funções de Aproximação

- funções radiais de base
- funções do tipo multiquadrics
- splines
- as superfícies de resposta
- as redes neurais artificiais
- Kriging e Cokriging



## Função de Aproximação

- substituirá tanto a função objetivo e suas restrições no contexto de um processo de otimização;
- Características fundamentais:
  - baixo custo computacional
  - boa confiabilidade (erro em relação ao modelo de elemento finitos é baixo).



## Algumas características dos dados

- Dados a serem analisados são oriundos de experimentos por computador.
- Natureza dos dados é determinística.
- Não há qualquer erro de medida.
  - Logo o modelo a ser adotado deve ser interpolador.



# FUNÇÕES RADIAIS DE BASE

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{n_S} \beta_i h(\|x - x_i\|)$$

$$y(x_k) = \sum_{i=1}^{n_S} \beta_i h(\|x_k - x_i\|)$$

**GAUSSIANA**

$$h(x) = \exp\left(-\frac{\|x - x_i\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

**MULTIQUADRICS**

$$h(x) = \frac{1}{\left(\|x - x_i\|^2 + \lambda^2\right)^\alpha} \quad \alpha = -\frac{1}{2}$$



# Funções Radiais de Base Multiquadrics

- se  $x = x_j$  então  $g(x_j) = f(x_j)$   $g(x) = \sum_{i=1}^N c_i \sqrt{\|x - x_i\|^2 + \lambda}$

$$[c_j] = [X_{ij}]^{-1} [f_1]$$

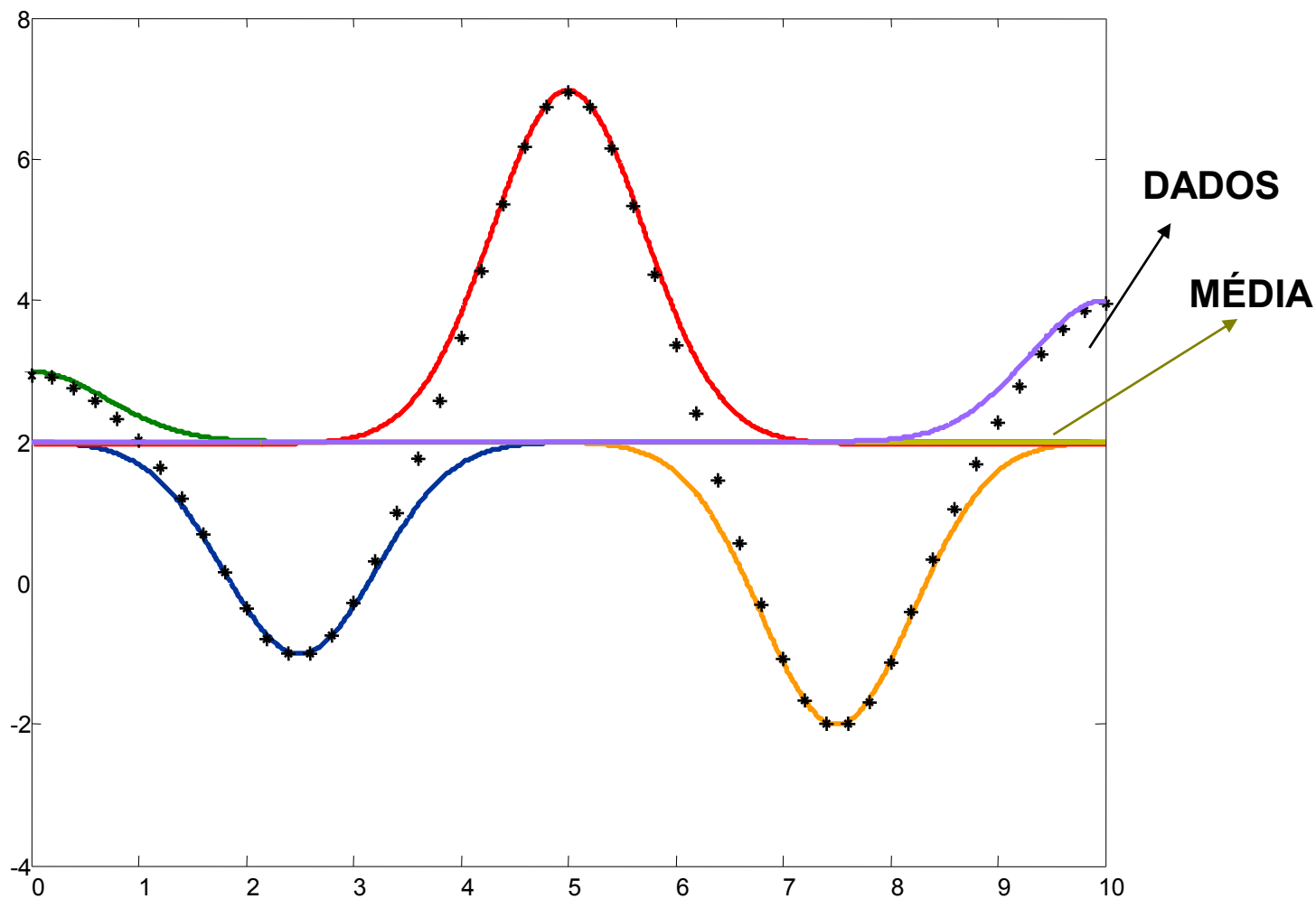
$$X_{ij} = \sqrt{\|x_j - x_i\|^2 + \lambda}$$

- Com um raciocínio análogo faz a interpolação por Gaussianas
- As questões:
  - qual o bom  $\lambda$ ?
  - Ou qual o bom  $\sigma$ ?





# KRIGING: VISÃO INTUITIVA





# KRIGING: VIA ESTIMATIVA DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

$$Y(x) = f^T(x)\beta + Z(x)$$

TENDÊNCIA GLOBAL ←

→ DESVIOS LOCAIS

*$\beta$  estimativa da média*

*$Z(x)$  é a realização de um processo estocástico*



# Formalização Matemática do Mecanismo do Kriging

- Em experimentos por computador é usual adotar  $f(x)$  constante
  - $f(x) = \beta$
  - (Kriging Comum)
- $Z(x) = N(0, \sigma^2)$
- Como determinar  $\beta$  e  $\sigma^2$ ?
- Estimativa de Máxima Verossimilhança



## Estimativa de Máxima Verossimilhança

- A matriz de covariância

$$\text{Cov}[Z(x_i), Z(x_j)] = \sigma^2 \mathbf{R}(R(x_i, x_j))$$

- Função de Correlação

$$R(x_i, x_j) = e^{-\theta \|x_i - x_j\|^2} \Rightarrow \textit{Gaussiana}$$

- Melhor estimador não viesado vale:

$$y^*(x) = \beta(\theta) + \mathbf{r}^t(x, \theta) \times \mathbf{R}(\theta)^{-1} \times (\mathbf{y} - \mathbf{f}\beta(\theta))$$

- E o vetor de correlação  $\mathbf{r}^t$  vale:

$$\mathbf{r}^T(x) = [R(x, x_1) \dots R(x, x_{n_s})]^T$$



## Estimativa de Máxima Verossimilhança

- Se  $\theta$  é conhecido, então é possível realizar uma estimativa de  $\beta$  e  $\sigma^2$ , pois a correlação é Gaussiana.

$$\hat{\beta}(\theta) = (\mathbf{f}^t \mathbf{R}(\theta)^{-1} \mathbf{f})^{-1} (\mathbf{f}^t \mathbf{R}(\theta)^{-1} \mathbf{y})$$

$$\hat{\sigma}^2(\theta) = [(\mathbf{y} - \mathbf{f} \hat{\beta}(\theta))^T \mathbf{R}^{-1}(\theta) (\mathbf{y} - \mathbf{f} \hat{\beta}(\theta))] / N$$



## Estimativa de Máxima Verossimilhança

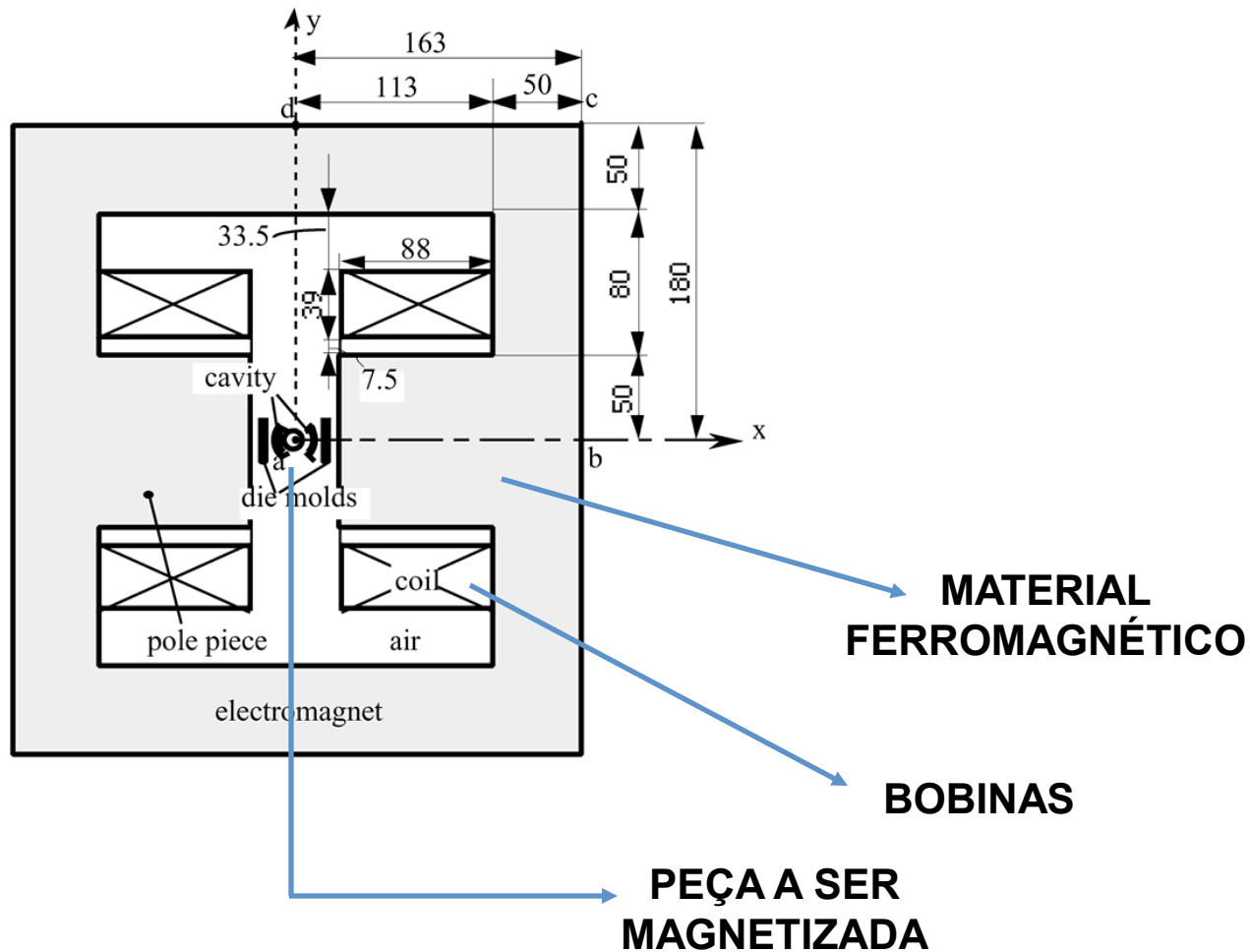
- Como determinar o coeficiente de correlação ( $\theta$ )?

$$\max \quad \frac{-\left\{N \ln(\hat{\sigma}^2(\theta)) + \ln(\det(\mathbf{R}(\theta)))\right\}}{2}$$

$$y^*(x) = \beta(\theta) + \mathbf{r}^t(x, \theta) \times \mathbf{R}(\theta)^{-1} \times (\mathbf{y} - \mathbf{f}\beta(\theta))$$

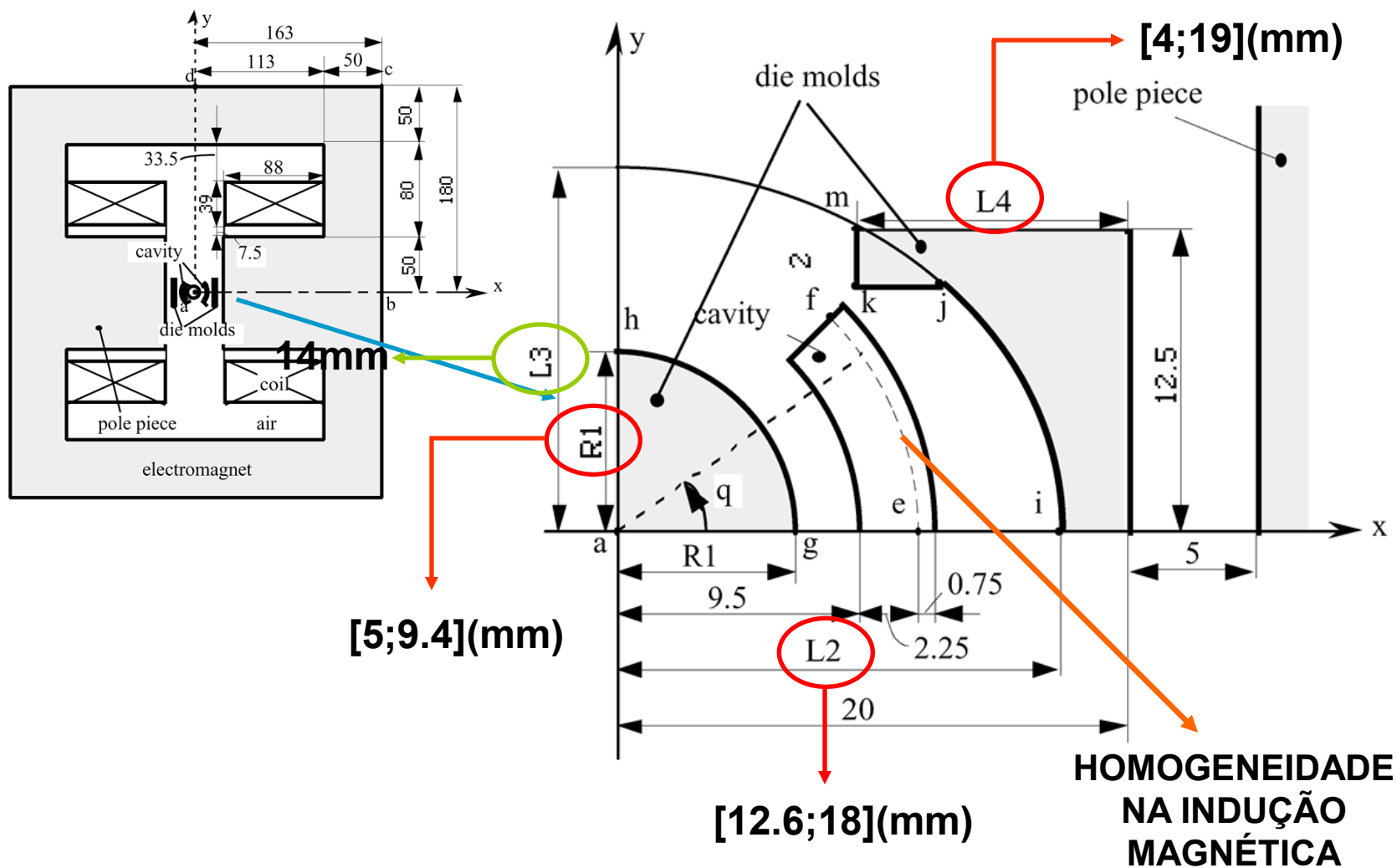


# TEAM 25





# TEAM 25





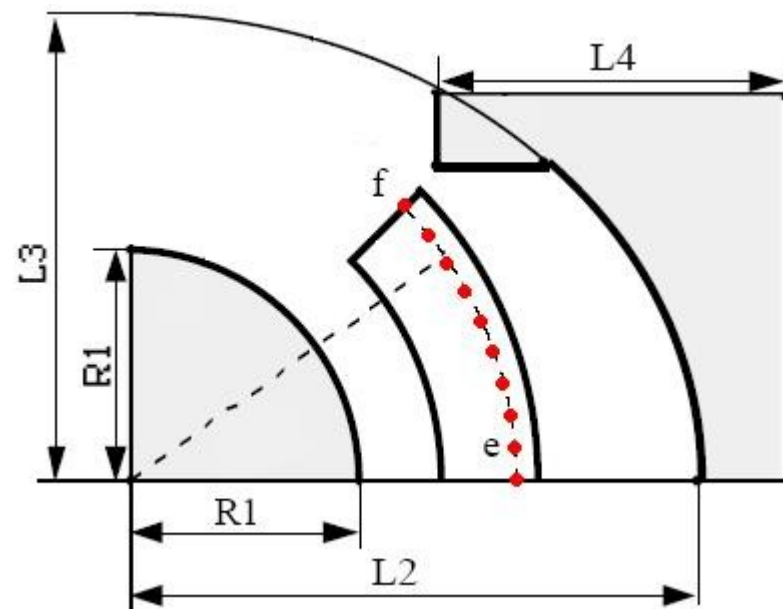


# TEAM 25: A Função Objetivo

$$W = \sum_{i=1}^n \left\{ (B_{xip} - B_{xio})^2 + (B_{yip} - B_{yio})^2 \right\}$$

**VALOR ESPECIFICADO**

**VALOR CALCULADO**





# TEAM 25: A influência das amostras

- Amostra 1: cada uma das 4 variáveis de otimizaçãodo problema assumiu sete valores distintos e equidistantes, desde seu valor mínimo até o valor máximo, obtendo-se uma amostra com 2401 pontos.
- Amostra 2: manteve-se a variável L3 constante e igual a 14 mm, porque ela tem baixo impacto no problema analisado. Desta forma, manteve-se o critério anterior, sete valores distintos e equidistantes por variável, o que resulta uma diminuição do tamanho da amostra para 343 pontos.
- Amostra 3: a partir da amostra com 2401 pontos, realiza-se um sorteio dos pontos que participarão da construção da função de aproximação.
- Amostra 4: a partir da amostra com 2401 pontos, fixa-se uma das quatro variáveis que definirá um hiperplano. Neste hiperplano, realiza-se um sorteio dos pontos que participarão da construção da função de aproximação. Esta amostragem é mais guiada do que a anterior.



# TEAM 25 A influência das amostras e dos parâmetros (multiquadrics)

$h$	<i>Forma de Amostragem</i>	$L_3$	$L_2$	$L_4$	$R_1$	Função Objetivo
0,01	1	15,499	14,687	14,781	7,295	0,023
	2	14,000	13,724	14,647	7,024	0,003
	3	15,760	16,765	15,874	7,728	-0,008
	4	17,481	15,650	14,092	7,615	0,00086
0,1	1	15,592	14,677	14,824	7,312	-0,027
	2	14,000	13,570	17,917	7,332	-0,005
	3	15,831	18,000	12,424	6,470	-0,039
	4	14,630	14,938	15,700	6,980	0,031
1	1	15,798	14,432	14,886	7,306	-0,039
	2	14,000	13,724	14,647	7,024	-0,004
	3	18,991	15,352	14,248	7,835	0,003
	4	14,617	15,293	16,442	7,488	-0,030
10	1	15,911	13,295	15,032	7,215	-0,087
	2	14,000	13,724	14,647	7,024	-0,004
	3	14,667	15,077	12,114	7,426	-0,217
	4	14,780	15,673	16,524	7,654	-0,057



# TEAM 25: A influência das amostras MULTIQUADRICS

Tipo de amostragem	L <sub>3</sub> [mm]	L <sub>2</sub> [mm]	L <sub>4</sub> [mm]	R <sub>1</sub> [mm]	Função Objetivo
1	15,50	14,69	14,78	7,30	-0,023857
2	14,00*	13,70	14,69	7,02	-0,003352
3	15,76	16,77	15,87	7,73	-0,00813
4	14,63	14,94	15,72	6,98	-0,030788

\*Pelo método de amostragem, esse valor foi fixado e não encontrado na simulação.

Tabela 4. Melhor Resultado Conhecido

L <sub>3</sub> [mm]	L <sub>2</sub> [mm]	L <sub>4</sub> [mm]	R <sub>1</sub> [mm]	Função Objetivo
14,03	14,01	14,64	7,28	$6,461 \times 10^{-5}$



# TEAM 25: a influência do parâmetro $\sigma$ (Gaussianas)

$\sigma$	$L_3$ [mm]	$L_2$ [mm]	$L_4$ [mm]	$R_1$ [mm]	Função Objetivo
1	35	8,1963	15,736	6,3389	-0,015
2	14,125	13,886	15,318	7,9993	-0,067493
5	14,023	12,6	8,4743	5,0000	-0,13512
10	14,005	12,772	17,065	6,3604	-0,072119

Tabela 4. Melhor Resultado Conhecido

$L_3$ [mm]	$L_2$ [mm]	$L_4$ [mm]	$R_1$ [mm]	Função Objetivo
14,03	14,01	14,64	7,28	$6,461 \times 10^{-5}$

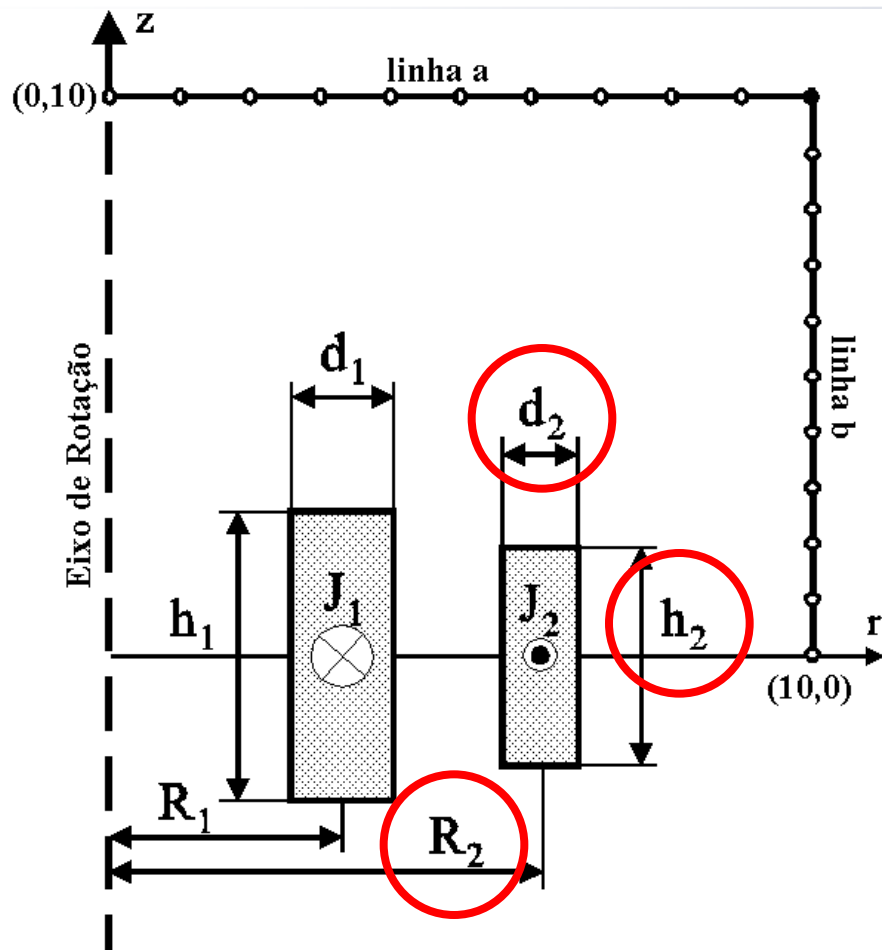


# TEAM 25: análise comparativa (amostra 2)

	L <sub>3</sub> [mm]	L <sub>2</sub> [mm]	L <sub>4</sub> [mm]	R <sub>1</sub> [mm]	Função Objetivo
Multiquadrics	14,63	14,94	15,72	6,98	-0,030788
Gaussiana	14,000	13,159	15,268	6,9684	-0,008546
Splines	14,000	13,313	15,262	7,046	-0,006925
Kriging	14,00	14,1737	14,3720	7,1945	$2.80 \times 10^{-4}$

Tabela 4. Melhor Resultado Conhecido

L <sub>3</sub> [mm]	L <sub>2</sub> [mm]	L <sub>4</sub> [mm]	R <sub>1</sub> [mm]	Função Objetivo
14,03	14,01	14,64	7,28	$6,461 \times 10^{-5}$





## TEAM 22: 3 condições

- 1) *A Energia armazenada no dispositivo deve ser 180MJ.*
- 2) *A indução magnética nas linhas a e b (a 10 metros do dispositivo) deve ser a menor possível.*
- 3) *A condição de supercondutividade do enrolamento deve ser garantida.*





## TEAM 22: 1ª Condição

- Função que se busca minimizar é

$$F_{Energia} = \left| \frac{Energia - E_{ref}}{E_{ref}} \right|$$

$$E_{ref} = 180MJ$$

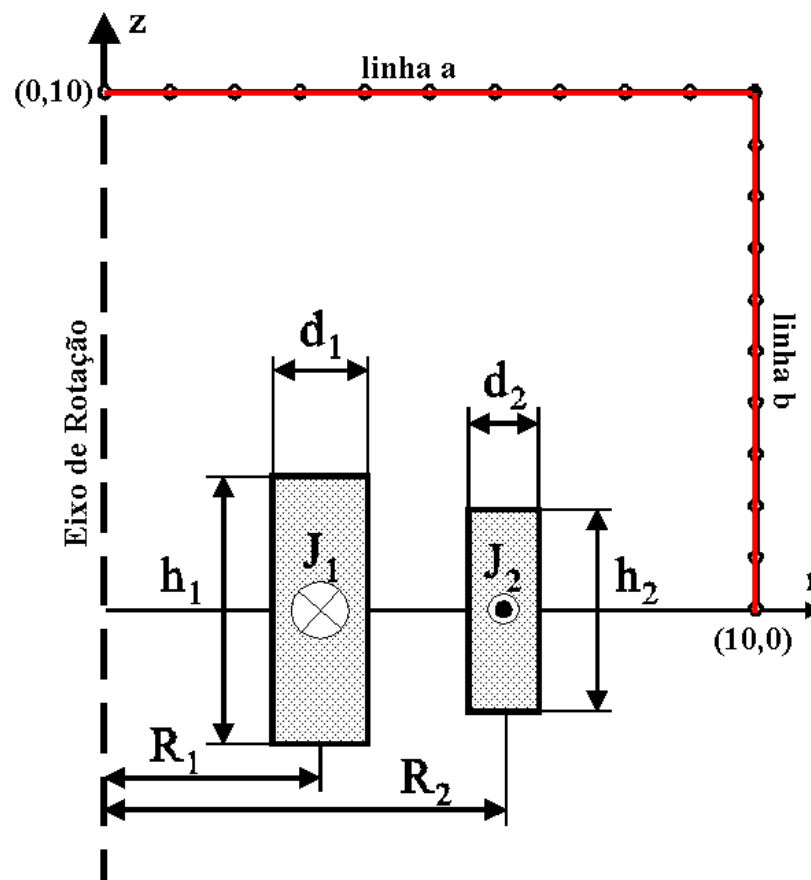


# TEAM 22: 2ª Condição

$$F_{B_{Stray}^2} = \frac{B_{Stray}^2}{B_{norm}^2}$$

$$B_{norm} = 3.0 \times 10^{-3} T$$

$$B_{stray}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{22} |B_{stray_i}^2|}{22}$$





## TEAM 22: 3ª Condição

- Acima da linha, o material perde sua característica de supercondutor.

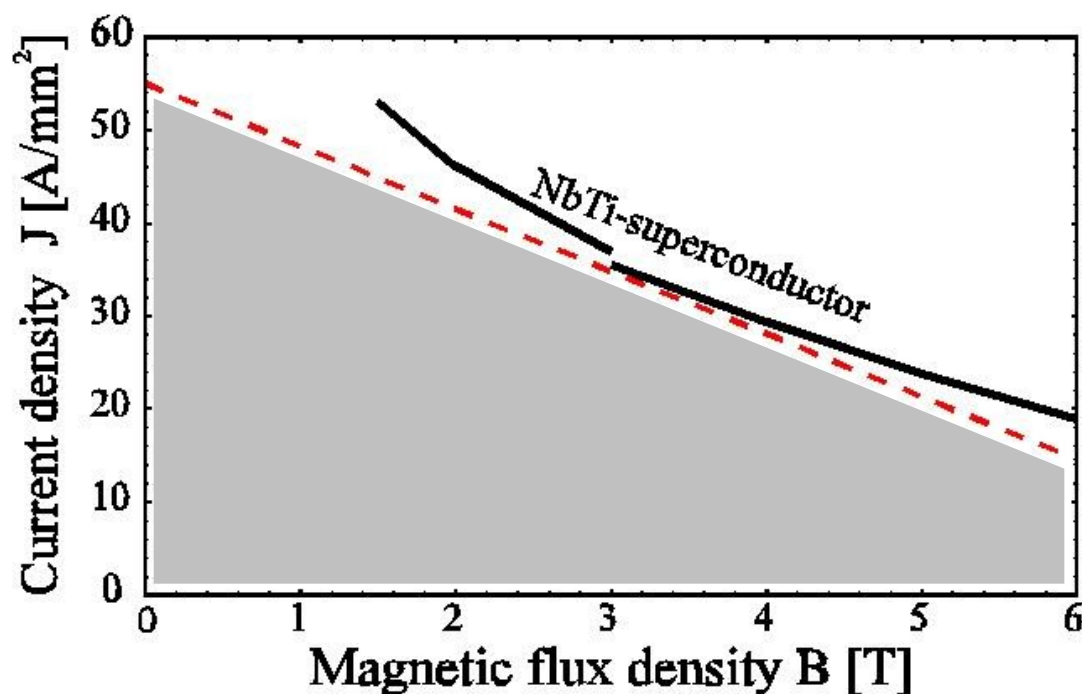


Fig. 8 – Curva Limite do Supercondutor



## TEAM 22: 3ª Condição

$$|J| < (-6.4 |B| + 54.0) A / mm^2$$

$$J = 22.5 A / mm^2 \quad |B| < 4.92T$$

$$F_{B_{\max}} = \text{Max}[(B_{\max} - 4.92), 0]$$



## TEAM 22: Função Objetivo

- A partir das 3 Condições chegou-se a Função Objetivo que se deseja minimizar

$$OF = \underbrace{\frac{|Energia - E_{ref}|}{E_{ref}}}_{1^a \text{ Condição}} + \underbrace{\frac{B_{stray}^2}{B_{norm}^2}}_{2^a \text{ Condição}} + \underbrace{15 * \text{Max}[(B_{max} - 4.92), 0]}_{3^a \text{ Condição}}$$

PENALIDADE



# Análise

- A análise deve ser sempre feita observando-se quatro aspectos:
  - Função objetivo
  - Energia
  - $B_{\text{stray}}^2$
  - $B_{\text{max}}$



## Resultados – Multiquadrics

Tabela 8. Melhor resultado conhecido [10]

$R_2$ [mm]	$h_2/2$ [mm]	$d_2$ [mm]	Função Objetivo	Energia [MJ]	$B_{\text{stray}}^2$ [T <sup>2</sup> ]
3080	239	394	$8,808 \times 10^{-2}$	180,0277	$7,9138 \times 10^{-7}$

Tabela 9. Melhores valores encontrados em relação aos quatro valores de  $h$ .

$h$	$R_2$ [mm]	$h_2/2$ [mm]	$d_2$ [mm]	Função Objetivo	Energia [MJ]	$B_{\text{stray}}^2$ [T <sup>2</sup> ]	$B_{\text{max}}$ [T]
0,01	3130	353,04	250,04	0,10825	177,78	$8,6305 \times 10^{-7}$	3,9944
0,1	3130	353,13	250,14	0,10812	177,82	$8,6399 \times 10^{-7}$	3,995
1	3130,1	353,42	250,43	0,10771	177,95	$8,6678 \times 10^{-7}$	3,997
10	2870,8	354,97	301,65	0,15023	162,74	$4,8895 \times 10^{-7}$	4,869
10	3270,1	502,96	151,77	0,30161	175,57	$2,4931 \times 10^{-6}$	4,0467
10	3398,8	502,76	149,54	0,15637	182,10	$1,3022 \times 10^{-6}$	4,111



## Resultados - Gaussianas

Tabela 10. Melhores pontos encontrados em relação aos quatro valores de  $\sigma$ .

$\sigma$	$R_2$ [mm]	$h_2/2$ [mm]	$d_2$ [mm]	Função Objetivo	Energia [J]	$B_{\text{stray}}^2$ [T <sup>2</sup> ]	$B_{\text{max}}$ [T]
10	2870	353	300	0,15231	161,97	$4,690 \times 10^{-7}$	4,8446
20	3130	503	199,78	0,36009	180	$3,241 \times 10^{-6}$	3,7203
30	2870	353	300	0,15231	180	$1,774 \times 10^{-6}$	3,8817
40	3000	950,97	101,32	0,059389	180	$5,337 \times 10^{-7}$	3,8303
50	2999	654,06	144,58	0,054645	180	$4,918 \times 10^{-7}$	3,7485





# Resultados

Tabela 11. Tabela Comparativa – Problema do SMES.

		$R_2$ [mm]	$h_2/2$ [mm]	$D_2$ [mm]	Função Objetivo	Energia [MJ]	$B_{\text{stray}}^2$ [T <sup>2</sup> ]	$B_{\text{max}}$ [T]
Função Objetivo	Multiquadrics	3130	353,13	250,14	0,10812	177,82	$8,6399 \times 10^{-7}$	3,995
	<b>Gaussianas</b>	<b>2999</b>	<b>654,06</b>	<b>144,58</b>	<b>0,054645</b>	<b>180</b>	<b><math>4,918 \times 10^{-7}</math></b>	<b>3,7485</b>
	Splines	2698,9	802,53	253,16	0,10703	175,08	$7,1462 \times 10^{-7}$	3,9819
	Kriging	3134	355.75	256.17	0,098178	180	$8.8360 \times 10^{-7}$	4,0339
Energia	Multiquadrics	3398,8	502,76	149.54	0,15637	182,10	$1,3022 \times 10^{-6}$	4,111
	<b>Gaussianas</b>	<b>2999</b>	<b>654,06</b>	<b>144,58</b>	<b>0,054645</b>	<b>180</b>	<b><math>4,918 \times 10^{-7}</math></b>	<b>3,7485</b>
	Splines	2698,9	802,53	253,16	0,10703	175,03	$7,1462 \times 10^{-7}$	3,9819
	<b>Kriging</b>	<b>3134</b>	<b>355.75</b>	<b>256.17</b>	<b>0,098178</b>	<b>180</b>	<b><math>8.8360 \times 10^{-7}</math></b>	<b>4,0339</b>
$B_{\text{stray}}^2$	Multiquadrics	2870,8	354,97	301,65	0,15023	162,74	$4,8895 \times 10^{-7}$	4,869
	Gaussianas	2870	353	300	0,15231	161,97	$4,690 \times 10^{-7}$	4,8446
	<b>Splines</b>	<b>3003,6</b>	<b>204</b>	<b>197,86</b>	<b>0,33293</b>	<b>123.66</b>	<b><math>1,7947 \times 10^{-7}</math></b>	<b>4,5812</b>
	Kriging	2846.5	1147.3	69.96	0,18389	158.63	$5.8641 \times 10^{-7}$	3,5059



# Resultados

Tabela 12. Classificação das Funções de Aproximação em relação a cada requisito.

	Função Objetivo	Energia	$B_{\text{stray}}^2$
1º	Gaussianas	Gaussianas e Kriging	Splines
2º	Kriging	-	Gaussianas
3º	Splines	Multiquadrics	Multiquadrics
4º	Multiquadrics	Splines	Kriging



# Conclusão

- Eficiência das Funções de Aproximação
- Menor Versatilidade das Splines
- Amostras menores podem eventualmente ser eficientes
- Usou-se análise de sensibilidade nas Funções Radiais de Base.
- TEAM 22:  $d_2$  e  $h_2$  são os parâmetros que mais sofrem com o processo de aproximação da função objetivo.



## Para resolução

- Problema 22
- Definição do Problema
- <http://www.compumag.org/jsite/images/stories/TEAM/problem22.pdf>



- Problema
  - 8 parâmetros
  - $H_2$ ,  $D_2$  e  $R_2$  valores ótimos
  - $H_1$ ,  $R_1$ ,  $D_1$ ,  $J_1$  e  $J_2$  são as possíveis variáveis.
  - Cada sub-problema terá 3 variáveis



# Os Sub-problemas

- Sub-problema 1: Variáveis ( $H_1$ ,  $D_1$  e  $R_1$ ).  $J_1$  e  $J_2$  no valor ótimo e Cálculo de  $B_{\max}$  na Bobina 2
- Sub-problema 2: Variáveis ( $H_1$ ,  $D_1$  e  $J_1$ ).  $R_1$  e  $J_2$  no valor ótimo e Cálculo de  $B_{\max}$  na Bobina 2
- Sub-problema 3: Variáveis ( $H_1$ ,  $J_1$  e  $R_1$ ).  $D_1$  e  $J_2$  no valor ótimo e Cálculo de  $B_{\max}$  na Bobina 2
- Sub-problema 4: Variáveis ( $J_1$ ,  $D_1$  e  $R_1$ ).  $H_1$  e  $J_2$  no valor ótimo e Cálculo de  $B_{\max}$  na Bobina 2
- Sub-problema 5: Variáveis ( $J_2$ ,  $D_1$  e  $R_1$ ).  $H_1$  e  $J_1$  no valor ótimo e Cálculo de  $B_{\max}$  na Bobina 1
- Sub-problema 6: Variáveis ( $J_2$ ,  $D_1$  e  $R_1$ ).  $H_1$  e  $J_1$  no valor ótimo e Cálculo de  $B_{\max}$  na Bobina 2
- Valores ótimos:

	$R_1$	$R_2$	$h_1/2$	$h_2/2$	$d_1$	$d_2$	$J_1$	$J_2$
	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[MA/m <sup>2</sup> ]	[MA/m <sup>2</sup> ]
results	1.5703	2.0999	0.7846	1.4184	0.5943	0.2562	17.3367	-12.5738



# Procedimento

- Duas opções:
  - Resolve-se o problema de otimização diretamente com MEF.
  - Ou
  - Cada variável terá cinco valores distintos. Forma-se uma base com 125 pontos (5x5x5). Faz-se uma interpolação da função objetivo.
- A escolha é sua.
- Passa-se a etapa de Otimização. Qual método? A escolha é novamente sua.



- A função objetivo vale:

$$OF = \underbrace{\frac{|Energia - E_{ref}|}{E_{ref}}}_{1^a \text{ Condição}} + \underbrace{\frac{B_{stray}^2}{B_{norm}^2}}_{2^a \text{ Condição}} + \underbrace{15 * \text{Max}[(B_{max} - B_{adm}), 0]}_{3^a \text{ Condição}}$$

PENALIDADE

- Logo deve-se calcular Energia, Btray e Bmax nos 125 pontos.
- O valor de  $B_{adm}$  deve ser calculado para cada sub-problema porque dependerá de J1 ou J2.
- Dicas: 1) criar três funções de aproximação; uma para cada condição. 2) o valor da penalidade da restrição pode (deve) ser alterada.