

## 8 Compensação

### 8.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar e discutir algumas técnicas de projeto de S.L.I.T.'s. Entende-se por compensação a definição e o ajuste de dispositivos a serem incluídos no sistema a controlar, de forma que este atenda a um conjunto de especificações de projeto.

De maneira geral, uma das partes mais delicadas do projeto de sistemas de controle é definir adequadamente as especificações de desempenho, de tal sorte que o sistema resultante seja capaz de cumprir as finalidades a que se destina.

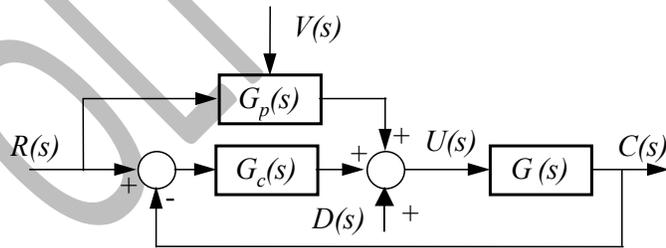
O projeto de sistemas de controle desenvolve-se, tipicamente, num esquema de tentativa e erro. Este processo pode conduzir, inclusive, a uma redefinição das especificações de projeto.

### 8.2 Pré-Compensadores

Dentre os propósitos de sistemas de controle, em geral está o de fazer com que a saída seja insensível à ação de distúrbios externos. Em situações nas quais se dispõe de um modelo matemático satisfatório desses distúrbios, o projetista pode recorrer a um esquema de controle conhecido por **pré-compensação** ou **pré-alimentação** ("feedforward" em inglês).

O princípio básico dos pré-compensadores consiste em utilizar as informações disponíveis a respeito das perturbações e da dinâmica da planta para obter uma estimativa da variável de controle. Cabe ao esquema de realimentação compensar apenas os desvios da saída com relação àquela resultante da ação do pré-compensador.

O diagrama de blocos ao lado apresenta a estrutura de um sistema de controle em malha fechada com pré-compensação.  $G_p(s)$  representa a Função de Transferência do pré-compensador;  $V(s)$  representa as variáveis medidas associadas aos distúrbios e  $D(s)$  os próprios distúrbios;  $G_c(s)$  denota a Função de Transferência do compensador no esquema de realimentação e  $G(s)$ , a Função de Transferência da planta.



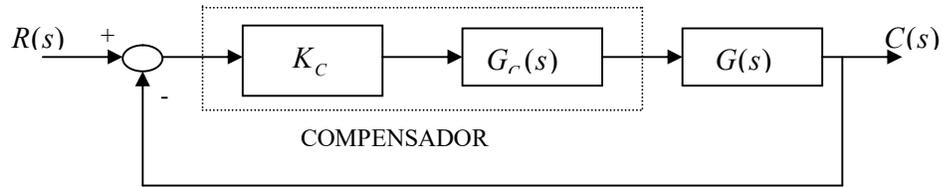
Note-se que a variável de controle  $U(s)$  é constituída por três parcelas: uma proveniente do bloco de pré-compensação  $G_p(s)$  e outra, do compensador da malha de realimentação  $G_c(s)$ .

Em muitos casos reais, principalmente quando a função de controle é desempenhada por um microcomputador, o bloco de pré-compensação pode ser de natureza não linear.

Um exemplo ilustrativo em que o controle por pré-compensação pode ser útil é o posicionamento dinâmico de embarcações. Neste caso, podemos utilizar medições de direção e intensidade de vento para, utilizando um modelo que forneça uma estimativa dos esforços sobre a embarcação, obter uma primeira aproximação para os empuxos a serem produzidos pelos propulsores. O controlador de malha de realimentação terá por função apenas corrigir os valores de empuxo acima, no sentido de compensar os inevitáveis erros de modelagem, assim como os demais efeitos não modelados (ondas e corrente marítima, por exemplo).

### 8.3 Compensador por Avanço de Fase

Vamos considerar um sistema de controle com compensação por avanço de fase com a seguinte estrutura:



em que:

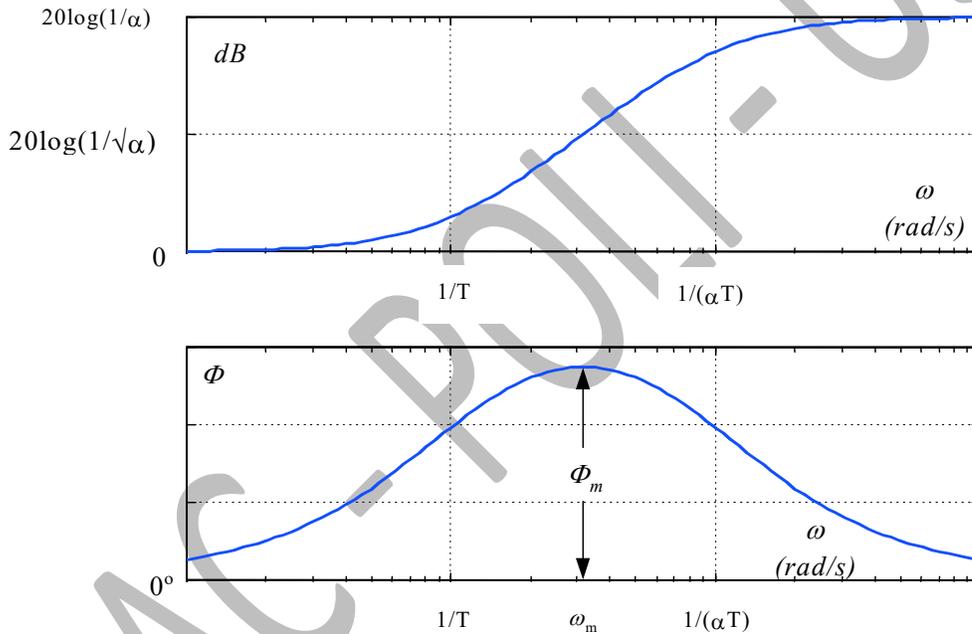
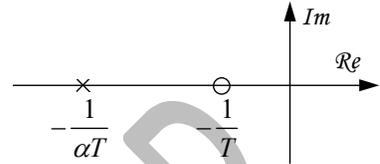
$$G_c(s) = \frac{1+sT}{1+s\alpha T} \quad (\alpha < 1)$$

Em geral, por razões construtivas,  $\alpha \geq 0,1$ .

O diagrama de polos e zeros de  $G_c(s)$  é indicado ao lado.

Note que, em baixas frequências, o ganho de  $G_c(s)$  é igual a 1 e o ganho do compensador é  $K_C$ .

Os Diagramas de Bode de  $G_c(s)$  são mostrados abaixo. Vê-se que o compensador produz um **avanço** de fase em **todas** as frequências.



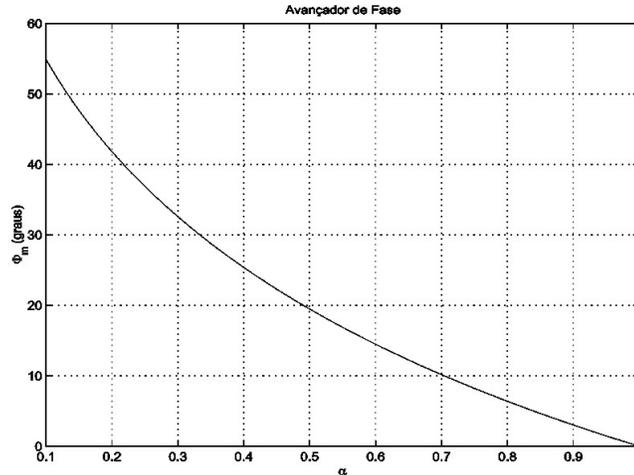
O Diagrama de Bode de ganho mostra que  $G_c(s)$  tem características de um **filtro passa-altas**.

Pode-se mostrar que o avanço máximo e a frequência em que ele ocorre são dados, respectivamente, por:

$$\Phi_m = \arcsen\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\alpha T}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot T}$$

O gráfico de  $\Phi_m$  em função de  $\alpha$  é mostrado na figura a seguir.



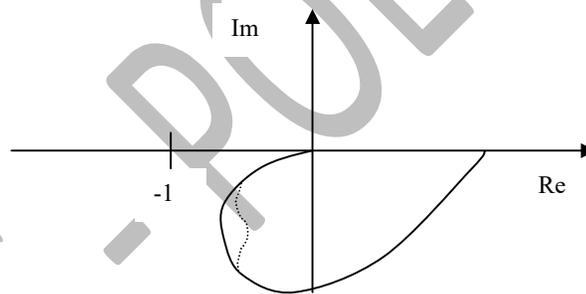
### Motivação

- **Via LGR**

A idéia é melhorar a resposta **transitória**, utilizando a propriedade empírica de que o zero do compensador "puxa" o LGR para a esquerda no plano complexo e, com isso, aumentam o amortecimento e a velocidade de resposta do sistema em malha fechada.

- **Via Resposta em Frequência**

A idéia é aumentar a MF, deformando o Diagrama de Nyquist no sentido anti-horário (isto é, avançando a fase) na região de frequências em torno da frequência de cruzamento do ganho ( $\omega_c$ ).



### Compensação por avanço de fase por meio do LGR

A abordagem de projeto utilizando o L.G.R. é recomendável quando as especificações são fornecidas por meio de parâmetros da resposta temporal (sobre-sinal máximo, tempo de subida, etc). A idéia básica é determinar os parâmetros do compensador de maneira que um par de polos dominantes pertença ao L.G.R. A localização desse par de polos dominantes é obtida de maneira a satisfazer as especificações da resposta transitória.

Os passos para o projeto de compensadores por avanço de fase são os seguintes:

- com base nas especificações de resposta transitória, determine as localizações dos polos dominantes em malha fechada;
- desenhe o L.G.R. e verifique se apenas um ajuste de ganho é suficiente para alocar os polos nas posições desejadas; caso contrário, calcule a deficiência de ângulo  $\Phi$  a ser suprida pelo compensador;
- determine as posições do polo e zero do compensador de maneira que este contribua com o ângulo  $\Phi$  requerido (e, eventualmente, exija o mínimo ganho adicional  $K_C$ );
- determine o ganho de malha aberta do sistema compensado por meio da condição de módulo do L.G.R..

**Exemplo:** Consideremos um servomecanismo baseado num motor CC controlado pela armadura com função de transferência:

$$G(s) = \frac{4}{s \cdot (s+2)}$$

Para realimentação unitária, o L.G.R. do sistema tem a forma ao lado. Para  $k = 4$ , os polos em malha fechada são:

$$s = -1 \pm j\sqrt{3}$$

Suponhamos que o sobre-sinal seja satisfatório ( $\xi = 0.5 \Rightarrow M_p \cong 16\%$ ), mas que o tempo de acomodação para tolerância de 2%:

$$t_s(2\%) = \frac{4}{\xi\omega_n} = 4 \quad s$$

seja excessivo e que se deseje reduzi-lo à metade.

Portanto, mantendo  $\xi$  fixo,  $\omega_n$  deve ser aumentado para:

$$\omega_n = 4 \quad rad/s,$$

de maneira que os polos desejados em malha fechada passarão a ser:

$$s = -\xi\omega_n \pm j \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega_n = -2 \pm j \cdot 2\sqrt{3}.$$

É imediato verificar que um simples ajuste de ganho não é suficiente para alocar os polos nessa posição.

Considerando que para  $s = -2 + j \cdot 2\sqrt{3}$ ,  $\arg(G(s)) = -210^\circ$ , temos que o compensador deve contribuir para a condição de fase com  $+30^\circ$ .

Podemos determinar graficamente infinitas posições do polo e zero do compensador que satisfazem este requisito. Uma delas (a que corresponde ao valor máximo de  $\alpha$ ) é a que tem o polo em  $s = -5.4$  e o zero em  $s = -2.9$ . Neste caso  $\alpha = 0.54 > 0.1$ .

O L.G.R. tem o aspecto esboçado ao lado.

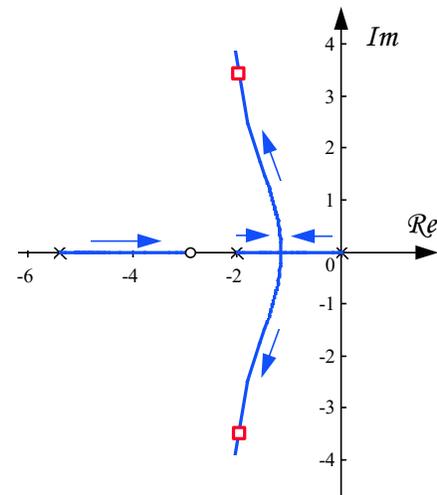
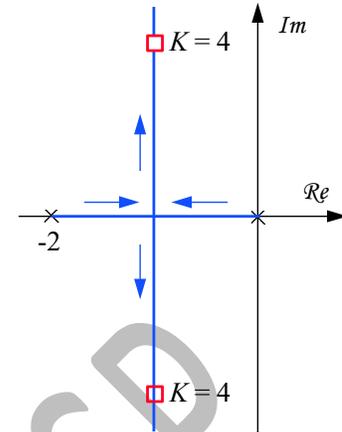
A condição de módulo para  $s = -2 + j \cdot 2\sqrt{3}$ :

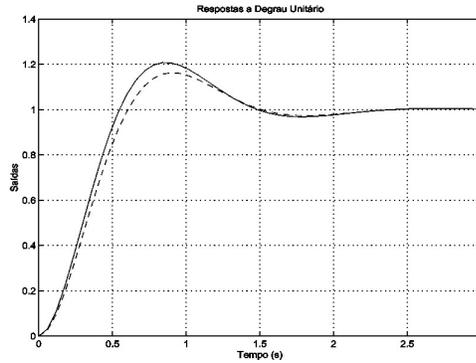
$$\left| \frac{k \cdot (s + 2.9)}{s \cdot (s + 2) \cdot (s + 5.4)} \right| = 1$$

permite determinar  $k = 18.7$ , onde

$$k = \frac{4K_c}{\alpha} \Rightarrow K_c = 2.51.$$

Pode-se verificar que, para este valor de  $k$ , o terceiro polo em malha fechada  $(-3,46)$ , localizado sobre o eixo real, está bastante próximo do zero do compensador, de maneira que seu efeito sobre a resposta transitória é pequeno e, portanto, está confirmada a hipótese implícita de que os polos complexos conjugados são os dominantes. Para ilustrar este fato, a figura abaixo mostra o gráfico da resposta a degrau unitário do sistema acima de 3a. ordem (linha cheia) e do sistema de 2a. ordem com os polos dominantes (linha tracejada).

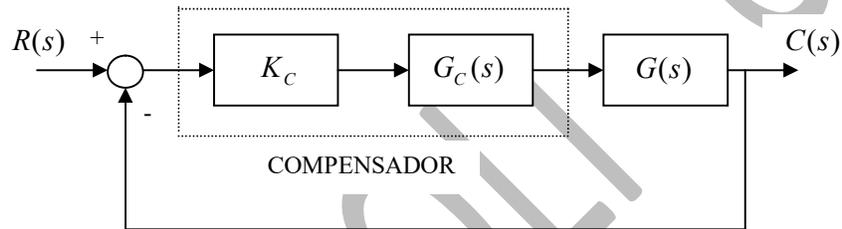




### Compensação por avanço de fase por meio da resposta em frequência

Esta abordagem é recomendável quando as especificações de projeto são fornecidas por meio de parâmetros associados à resposta em frequência do sistema (como, por exemplo, margem de ganho, margem de fase, etc).

Consideremos o sistema com realimentação unitária representado pelo diagrama abaixo.



Notar que:

- i)  $K_c$  desloca o gráfico de ganho de  $G(s)$  e não altera a fase;
- ii) como  $G_c(s)$  aparece multiplicando  $K_c G(s)$ , seus efeitos são aditivos tanto no ganho (em dB!), como na fase;
- iii)  $G_c(s)$  não altera o ganho de malha aberta em baixas frequências e o aumenta em altas;
- iv)  $G_c(s)$  praticamente não altera a fase de malha aberta para frequências distantes de  $\omega_m$  e, nas vizinhanças desta, introduz um acréscimo (avanço) na fase.

O procedimento de projeto consiste nos seguintes passos:

- i. determine o ganho  $K_c$  a fim de satisfazer as especificações referentes a erro estacionário;
- ii. usando esse valor de  $K_c$ , obtenha a margem de fase do sistema não compensado;
- iii. determine o ângulo de avanço de fase necessário  $\Phi_m$  a ser fornecido pelo compensador;
- iv. determine o fator de atenuação  $\alpha$  por meio da equação:

$$\text{sen}(\Phi_m) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

- v. obtenha a frequência  $\omega_m$  onde o ganho do sistema não compensado vale  $-20 \log(1/\sqrt{\alpha})$ . Esta deve ser a nova frequência onde o ganho é 0 dB;
- vi. calcule  $T$  utilizando a equação:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot T}$$

- vii. determine as frequências de canto do compensador  $\frac{1}{T}$  e  $\frac{1}{\alpha T}$ .

**Exemplo:** Consideremos a planta com Função de Transferência

$$G(s) = \frac{4}{s \cdot (s+2)}$$

As especificações de projeto são:

- erro estacionário para entrada rampa unitária não superior a 0.05 s;
- margem de fase de, no mínimo, 50°.

Como primeiro passo do procedimento de projeto, temos:

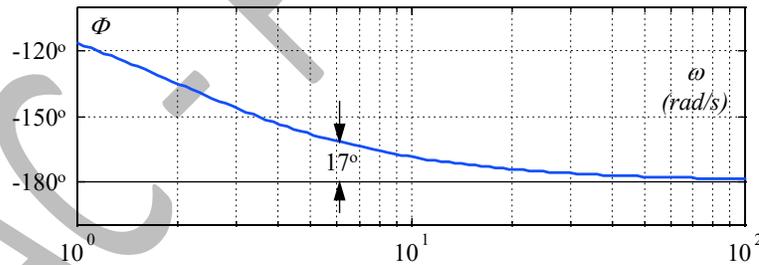
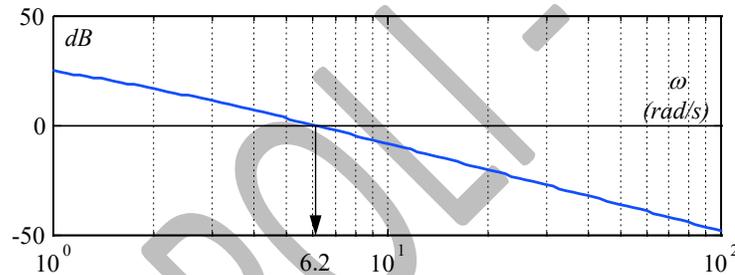
$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{s \cdot K_c \cdot G_c(s) \cdot G(s)} \right] \leq 0.05 \Rightarrow K_c \geq 10$$

Adotemos, pois, o valor mínimo:

$$K_c = 10 .$$

Esboçamos os Diagramas de Bode de  $K_c \cdot G(s)$ :

$$K_c \cdot G(j\omega) = \frac{40}{j\omega \cdot (j\omega + 2)} = \frac{20}{j\omega \cdot (j \cdot 0.5\omega + 1)}$$



Daí resultam:

$$MG = +\infty \text{ e } MF = 17^\circ$$

Para que tenhamos uma margem de fase de 50° é, portanto, necessário providenciar um avanço:

$$\Phi_m = 33^\circ .$$

Para isso, é necessário que

$$\alpha = 0.3 ,$$

e, por consequência,

$$20 \log(1/\sqrt{\alpha}) = 5.3 .$$

Note que, se reduzirmos o valor de  $K_c$ , podemos conseguir a margem de fase desejada. No entanto, assim procedendo, a especificação relativa ao erro estacionário é violada.

À direita da frequência  $1/T$ , o ganho de malha é aumentado e, portanto, o Diagrama de Bode do ganho se desloca na vertical para cima. Por esta razão, a frequência de cruzamento de  $0 \text{ dB}$  se desloca para a direita, o que significa que o compensador deverá, na verdade, fornecer um avanço de fase maior que  $33^\circ$ . Suponhamos então que:

$$\Phi_m = 38^\circ$$

Daí resulta que:

$$\text{sen } \Phi_m = 0.616 = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

e, portanto,

$$\alpha = 0.24$$

Para este valor de  $\alpha$ :

$$-20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) = -6.3 \text{ dB}$$

e, do Diagrama de Bode do sistema não compensado, obtemos a frequência  $\omega_m$ :

$$\omega_m = 9 \text{ rad/s}$$

e, portanto:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}} \Rightarrow T = 0.227 \text{ s}$$

Logo:

$$\frac{1}{T} = 4.41 \text{ s}^{-1}, \quad \frac{1}{\alpha T} = 18.4 \text{ s}^{-1} \text{ e } \alpha T = 0.054 \text{ s}.$$

Dessa maneira, o compensador deve ter Função de Transferência:

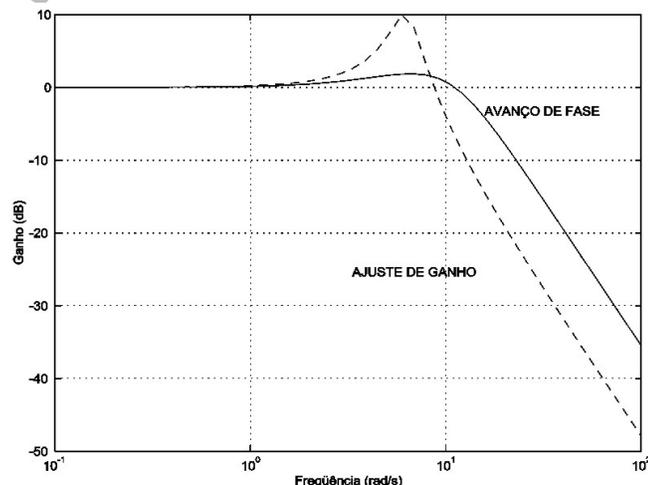
$$K_c G_c(s) = 10 \frac{0.227s + 1}{0.054s + 1}$$

Traçando os Diagramas de Bode do sistema compensado, verificamos que:

$$MG = +\infty \text{ e } MF \cong 50^\circ$$

A frequência correspondente ao ganho  $0 \text{ dB}$  passou de  $6.3 \text{ rad/s}$  para  $9 \text{ rad/s}$ , o que significa que o sistema compensado terá uma maior velocidade de resposta.

Uma outra maneira de constatar este fato é comparando as respostas em frequência em malha fechada para o sistema sem o compensador (apenas com o ajuste de ganho - linha tracejada) e com o compensador por avanço de fase (linha contínua). Veja a figura abaixo.



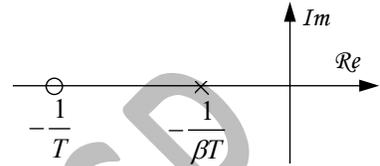
Nota-se um aumento visível na banda passante do sistema do primeiro para o segundo caso. Além disso, observa-se que o pico de ressonância do sistema compensado é menor do que o pico do sistema sem o compensador, o que está em conformidade com o aumento da margem de fase (de  $17^\circ$  para  $50^\circ$ ) proporcionado pela compensação.

Por fim, note-se que, como o sistema é de fase mínima e as margens de ganho ( $+\infty$ ) e fase ( $50^\circ$ ) são ambas positivas, a malha fechada é estável.

## 8.4 Compensador por Atraso de Fase

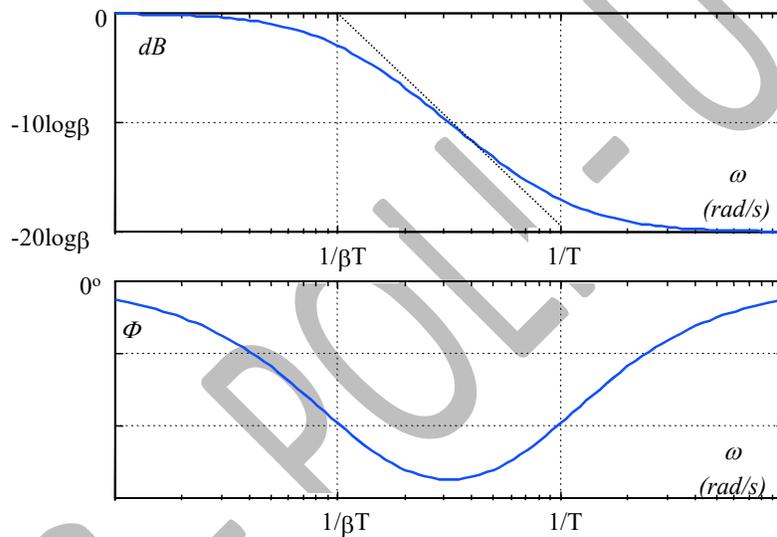
Compensadores por atraso de fase têm Função de Transferência do tipo:

$$G_c(s) = \frac{sT + 1}{s\beta T + 1} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (1 < \beta \leq 10)$$



O diagrama de polos e zeros de  $G_c(s)$  é indicado ao lado.

Os Diagramas de Bode de  $G_c(s)$  estão esboçados abaixo.



Vê-se que o compensador produz um **atraso** de fase em **todas** as frequências. Apesar do nome do compensador, o efeito do atraso de fase não é útil para a compensação – como se verá adiante, o que se aproveita do compensador é, de fato, a alteração do ganho.

Nota-se também que  $G_c(s)$  tem características de um **filtro passa-baixas**.

### Compensação por atraso de fase por meio do LGR

Suponhamos o caso em que um sistema de controle apresenta resposta transitória satisfatória, mas sua resposta estacionária precisa ser melhorada.

A idéia básica da compensação neste caso consiste em aumentar o ganho real (ganho em baixas frequências) do sistema sem alterar sensivelmente o L.G.R. nas vizinhanças dos polos dominantes de malha fechada.

Para evitar uma variação apreciável no L.G.R. nessa região, a contribuição angular do compensador para a condição de fase deve ser pequena ( $5^\circ$  é um valor típico). Para garantir esta característica, basta alocar o polo e o zero do compensador próximos entre si.

Assim procedendo, se designarmos por  $\bar{s}$  um dos polos dominantes em malha fechada. Como esse ponto obrigatoriamente pertence ao LGR, a condição de ganho é:

$$\left| K_c G_c(\bar{s}) G(\bar{s}) \right| = \left| K_c \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\bar{s} + \frac{1}{T}}{\bar{s} + \frac{1}{\beta T}} G(\bar{s}) \right| \cong \left| \frac{K_c}{\beta} G(\bar{s}) \right| = 1 ,$$

já que

$$\left| \bar{s} + \frac{1}{T} \right| \cong \left| \bar{s} + \frac{1}{\beta T} \right| ,$$

pois os polos do compensador são supostos próximos entre si.

Consideremos agora o caso em que o bloco  $G_c(s)$  está **ausente**. A condição de ganho do LGR é dada por

$$\left| K'_c G(\bar{s}) \right| = 1 .$$

Da análise acima, concluímos que, com o bloco  $G_c(s)$ , o ganho de malha resulta aumentado de um fator  $\beta$ , pois

$$\frac{K_c}{\beta} \cong K'_c .$$

Como os polos dominantes praticamente não se alteram, as características da resposta transitória se mantêm também inalteradas.

Por outro lado, como o ganho de malha em baixas frequências do compensador  $K_c G_c(s)$  também aumenta pelo fator  $\beta$  (note que, em baixas frequências, o ganho de  $G_c(s)$  é 1), o erro estacionário é reduzido pelo mesmo fator  $\beta$ .

Para que  $\beta$  seja significativamente maior que 1 e o polo e o zero do compensador ainda permaneçam próximos entre si, só existe uma possibilidade: ambos, polo e zero, devem se localizar próximos à origem.

O projeto de compensadores por atraso de fase pode ser descrito por meio dos seguintes passos:

- i. desenhe o L.G.R. para o sistema não compensado e, com base nas especificações da resposta transitória, localize os polos dominantes de malha fechada sobre o L.G.R.;
- ii. determine o ganho utilizando a condição do módulo;
- iii. calcule o erro estacionário de interesse para o problema;
- iv. determine o fator de redução do erro necessário para satisfazer as especificações;
- v. escolha o polo e o zero do compensador de maneira a produzir a redução requerida no erro estacionário sem, contudo, alterar sensivelmente o L.G.R. nas vizinhanças dos polos dominantes;
- vi. desenhe o L.G.R. para o sistema compensado;
- vii. utilizando a condição de módulo, recalcule o ganho para que os polos dominantes de malha fechada se localizem nas posições desejadas.

**Exemplo:** Consideremos o sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+1) \cdot (s+2)}$$

Quer-se projetar um compensador de forma que, em malha fechada, os polos dominantes do sistema tenham coeficiente de amortecimento  $\xi=0,5$  e o erro estacionário para entrada rampa unitária seja de no máximo 0,2s.

Fechando a malha com realimentação unitária e considerando apenas o ganho  $k'_c$  no ramo direto, o L.G.R. do sistema tem o aspecto indicado na figura ao lado.

Para que o coeficiente de amortecimento dos polos dominantes seja  $\xi=0,5$ , o gráfico do LGR indica que se deve escolher  $k'_c=1,06$ . Neste caso, os polos dominantes são  $s = -0,33 \pm j \cdot 0,58$  e a frequência natural não amortecida é  $\omega_n = 0,67 \text{ rad/s}$ .

Contudo, o erro estacionário para entrada rampa unitária é:

$$e(\infty) = \frac{1}{\frac{1,06}{2}} = 1,89s$$

Mantendo a resposta transitória virtualmente inalterada, deseja-se reduzir o erro para

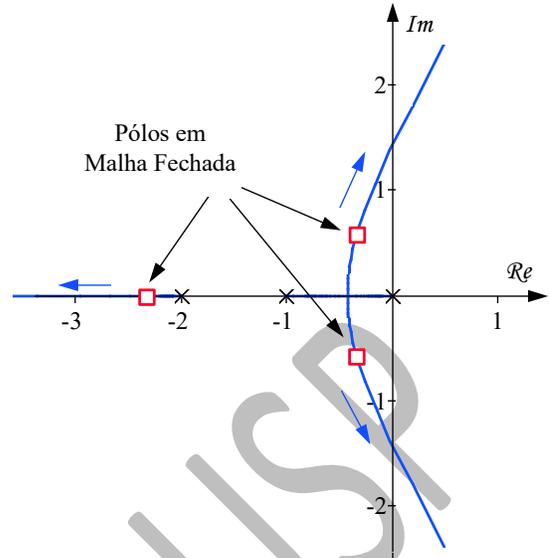
$$e(\infty) = 0,2s .$$

Com essa especificação, observa-se que o fator de redução de erro é de 9,45. Vamos adotar então:

$$\beta = 10$$

Escolhendo o polo e o zero de  $G_c(s)$ , respectivamente, em  $s = -0,01$  e  $s = -0,1$ , tem-se:

$$G_c(s) = \frac{1}{10} \cdot \frac{s+0,1}{s+0,01}$$



Os L.G.R.'s para o sistema compensado (linha contínua) e não compensado (linha tracejada) estão esboçados na figura ao lado.

O ganho necessário para os polos dominantes de malha fechada do sistema compensado apresentarem o mesmo coeficiente de amortecimento daqueles associados ao sistema não compensado pode ser calculado utilizando-se a condição de módulo:

$$k = 0,98 .$$

Nota-se que este valor pouco difere de 1,06, que era o valor de  $k'_c$  antes de se considerar o compensador na malha.

Mas:

$$k = \frac{1}{10} \cdot K_c = 0,98 \quad ,$$

de onde resulta que

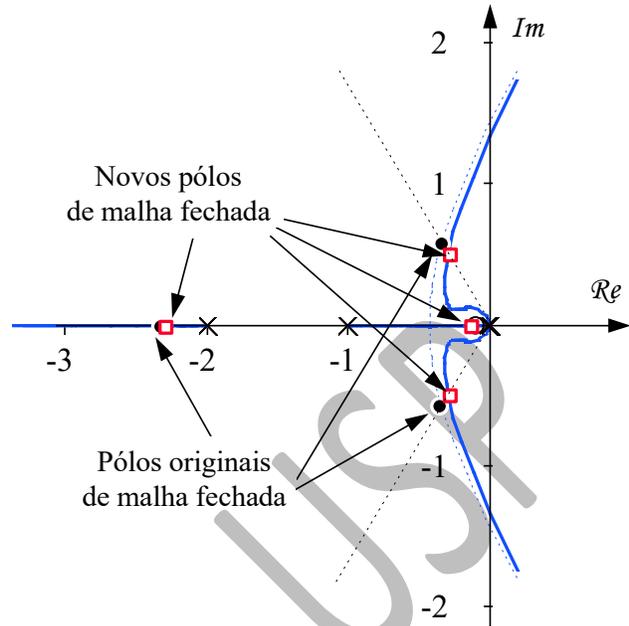
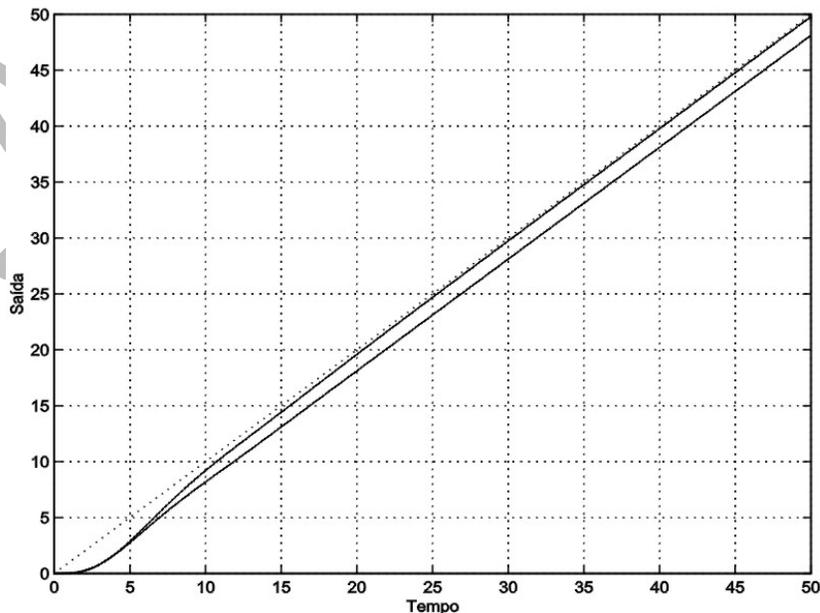
$$K_c = 9,8 .$$

Pode-se verificar facilmente que o erro estacionário para entrada rampa unitária é:

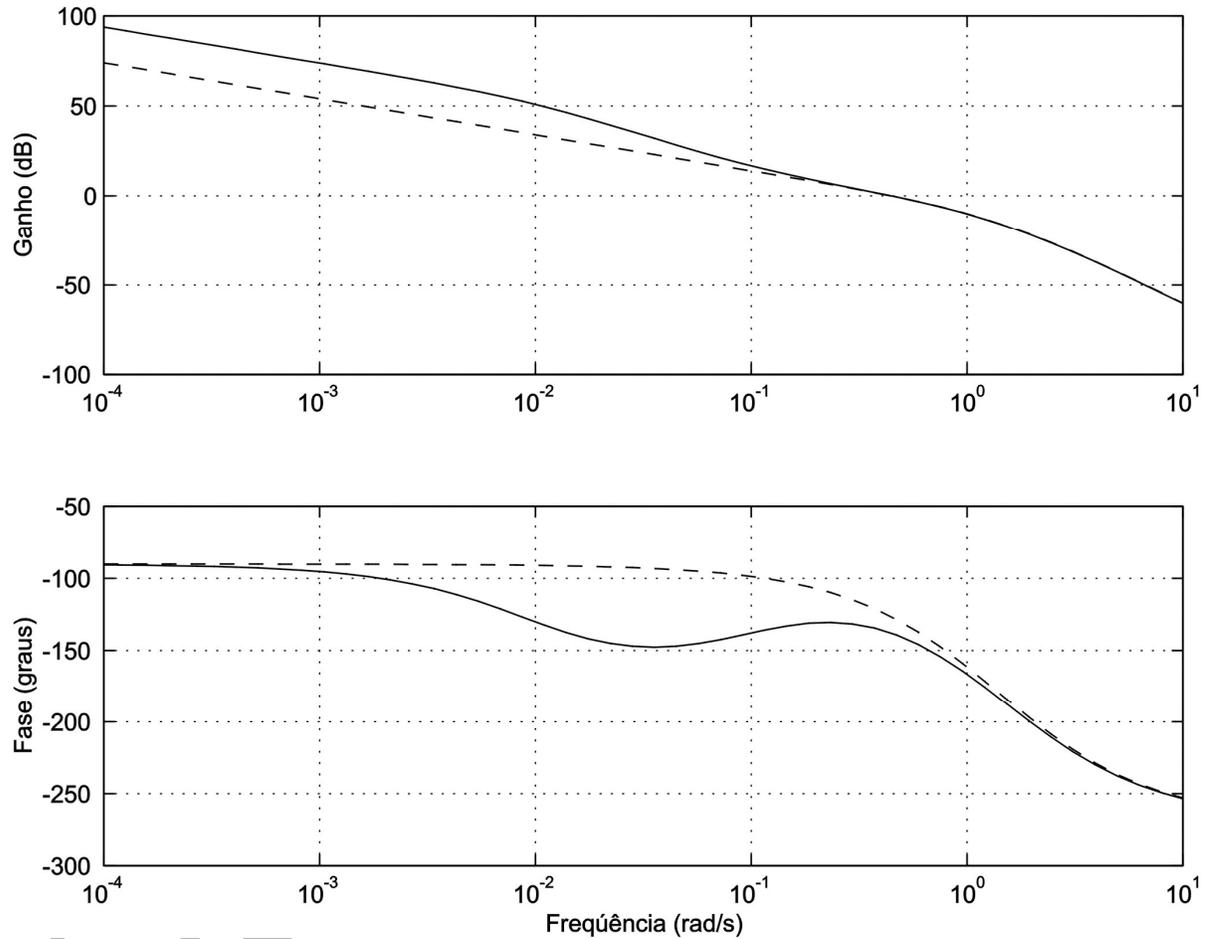
$$e(\infty) = \frac{1}{\frac{9,8}{2}} = 0,204s ,$$

podendo-se considerar assim satisfeita a especificação.

Além dos polos dominantes, o sistema em malha fechada tem dois outros polos: o primeiro, situado em  $s = -0.12$ , está bastante próximo do zero do compensador e, por essa razão, praticamente não tem influência sobre a resposta transitória; o segundo, situado em  $s = -2.31$ , está suficientemente afastado do eixo imaginário (comparando-se com os polos dominantes) de forma que sua contribuição para a resposta transitória se extingue rapidamente. A figura abaixo mostra a resposta a rampa dos sistemas em malha fechada – a linha cheia corresponde ao sistema compensado, a pontilhada, ao sistema com apenas o ganho ajustado e a tracejada, à rampa unitária de referência. Como se observa, as respostas são praticamente indistinguíveis durante o transitório, mas o erro estacionário foi reduzido sensivelmente.



Para completar este tópico, apresentam-se a seguir os Diagramas de Bode para o sistema apenas com o ajuste de ganho (linha tracejada) e para o sistema compensado (linha contínua). Como se pode observar, o compensador por atraso de fase neste caso produz um aumento de ganho em baixas frequências, o que causa a melhora requerida no erro estacionário. O atraso de fase se localiza predominantemente numa região de frequências abaixo da frequência de cruzamento do ganho e, portanto, a margem de fase do sistema se reduz pouco. Como tanto a frequência de cruzamento do ganho como a margem de fase se mantém praticamente inalteradas, a resposta transitória do sistema em malha fechada não se altera significativamente.



### ***Compensação por atraso de fase por meio da resposta em frequência***

Encarado sob o ponto de vista de sua resposta em frequência, o papel básico de um compensador por atraso de fase é prover atenuação em altas frequências de modo a melhorar a margem de fase do sistema (ou, alternativamente, mantendo a MF, aumentar o ganho em baixas frequências). O atraso de fase, propriamente, não é utilizado para efeito de compensação.

O projeto de compensadores por atraso de fase por meio da resposta em frequência pode ser descrito pelos seguintes passos:

- i. determine o ganho de forma a satisfazer a especificação referente a erro estacionário;
- ii. usando esse valor de ganho, trace os Diagramas de Bode do sistema não compensado e determine as margens de ganho e fase;
- iii. se a especificação relativa à margem de fase não estiver satisfeita, determine a frequência na qual a defasagem da função de transferência de malha é igual a  $-180^\circ + MF$ , onde  $MF$  é a margem de fase

desejada acrescida de  $5^\circ$  a  $12^\circ$  (para neutralizar o atraso de fase introduzido pelo compensador). Escolha esta frequência como sendo aquela em que o ganho deverá valer  $0 \text{ dB}$ ;

- iv. escolha a frequência de canto  $\omega = 1/T$  (correspondente ao zero do compensador) de uma oitava a uma década **abaixo** da frequência de cruzamento de  $0 \text{ dB}$  fixada no passo anterior;
- v. determine a atenuação necessária para fazer com que o ganho  $0 \text{ dB}$  corresponda à frequência fixada no passo (iv);
- vi. determine  $\beta$  considerando que a atenuação obtida no passo anterior é  $-20 \log(\beta)$ ;
- vii. calcule a frequência de canto  $\omega = \frac{1}{\beta T}$  associada ao polo do compensador.

**Exemplo:** Seja o sistema com Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+1) \cdot (0.5s+1)}$$

Deseja-se fechar a malha com realimentação unitária de forma que o erro estacionário para rampa unitária seja de  $0.2 \text{ s}$  e a margem de fase seja de, no mínimo,  $40^\circ$ .

O primeiro passo do procedimento de projeto consiste em determinar o valor do ganho  $K_c$  de forma a atender a especificação de erro estacionário:

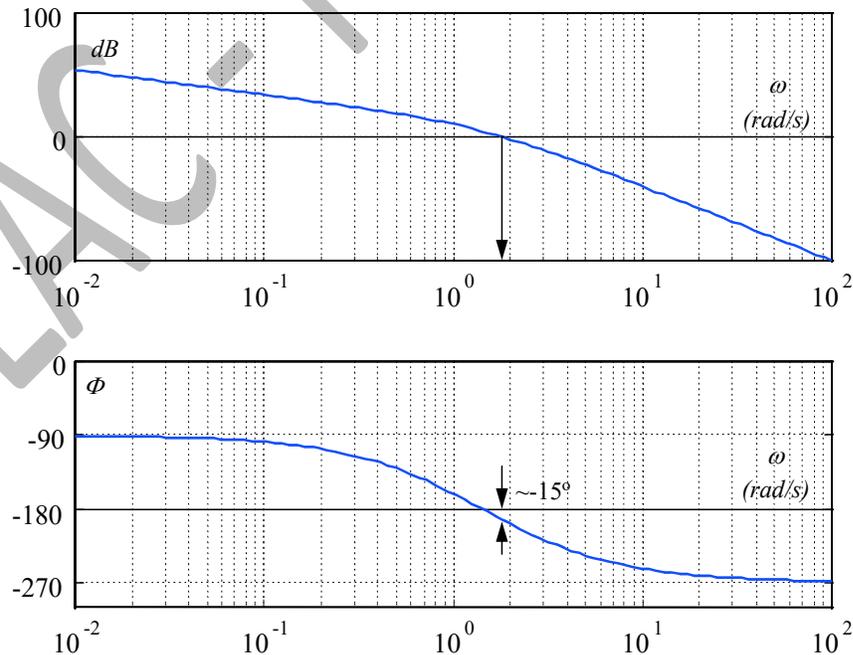
$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{s \cdot G(s)} \right] = \frac{1}{K_c} \leq 0,2 \quad \Rightarrow \quad K_c \geq 5$$

Adotemos o valor mínimo para  $K_c$ :

$$K_c = 5$$

Com este valor de  $K_c$ , construímos os Diagramas de Bode de

$$K_c G(s) = \frac{5}{j\omega \cdot (j\omega+1) \cdot (j \cdot 0.5\omega+1)}$$



Observa-se que, para o sistema sem compensação:

$$MF \cong -15^\circ$$

o que significa que o sistema em malha fechada é instável uma vez que o sistema é de **fase mínima**.

Como a frequência correspondente a  $40^\circ$  de margem de fase está por volta de  $0.7 \text{ rad/s}$ , a frequência de cruzamento de  $0 \text{ dB}$  para o sistema compensado não deverá diferir muito deste valor. Escolhemos então a frequência de canto  $\omega = 1/T$  como sendo de  $0.1 \text{ rad/s}$ , resultando, portanto,

$$T = 10 \text{ s.}$$

Tendo em vista que esta frequência de canto não está suficientemente distante da frequência de cruzamento de  $0 \text{ dB}$ , a influência da defasagem introduzida pelo compensador não é desprezível e, por isto, adicionamos  $12^\circ$  à margem de fase requerida e obtemos:

$$MF = 52^\circ$$

A defasagem de  $-180^\circ + 52^\circ = -128^\circ$  para o sistema não compensado se dá numa frequência de aproximadamente  $0.5 \text{ rad/s}$ .

Para que a curva de ganho passe por  $0 \text{ dB}$  nesta nova frequência, o compensador deve fornecer uma atenuação de  $-20 \text{ dB}$  e, portanto,

$$\beta = 10 .$$

Note, a esse respeito, que:

$$G_c(s) = \frac{sT+1}{s \cdot \beta T+1}$$

e, portanto, em altas frequências,

$$|G_c(j\omega)| \cong \frac{1}{\beta} .$$

Com isso, fica definida a segunda frequência de canto do compensador:

$$\omega = \frac{1}{\beta T} = 0.01 \text{ rad/s}$$

e a Função de Transferência  $G_c(s)$  fica:

$$G_c(s) = \frac{1}{10} \cdot \frac{s+0.1}{s+0.01}$$

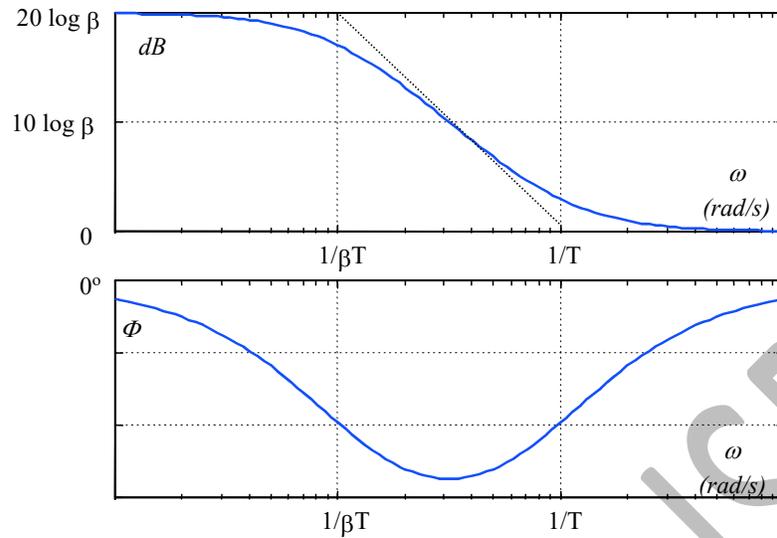
Se desenharmos os Diagramas de Bode do sistema compensado, verificaremos que a frequência de cruzamento de  $0 \text{ dB}$  caiu de  $1.9 \text{ rad/s}$  para  $0.45 \text{ rad/s}$ , o que representa uma perda de velocidade da resposta.

Vejamos agora um ponto de vista alternativo da compensação por atraso de fase. Consideremos o caso em que se deseja manter a margem de fase, a banda passante, enfim, a resposta transitória e, ao mesmo tempo, melhorar a resposta estacionária.

Suponhamos que se escolha o ganho  $K_C$  do compensador como sendo

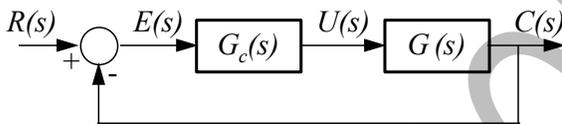
$$K_C = \beta .$$

Neste caso, a resposta em frequência do compensador  $K_C G_c(s)$  tem o aspecto ilustrado pelos Diagramas de Bode abaixo.



Portanto, se impusermos que a frequência  $1/T$  está suficientemente abaixo da frequência de cruzamento do ganho (digamos, 1 década), teremos fixado o valor de  $T$ . O parâmetro  $\beta$  será dado então pela especificação do erro estacionário; ou, em outras palavras, o valor de  $\beta$  é que determina o grau de melhora da resposta estacionária.

## 8.5 Compensadores PID



Nesta seção, trataremos de sistemas de controle com a estrutura indicada ao lado, onde  $G(s)$  e  $G_c(s)$  são, respectivamente, as Funções de Transferência da planta e do compensador.

Os controladores PID são caracterizados por Funções de transferência do tipo:

$$G_c(s) = K_p \cdot \left[ 1 + \frac{1}{s \cdot T_i} + s \cdot T_d \right]$$

onde  $T_i$  é chamado tempo de "reset" e  $T_d$ , tempo derivativo ou "rate time".

No domínio do tempo, supondo a condição inicial do integrador nula,

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \dot{e}(t) \right]$$

O termo de natureza **integral** tem a característica de fornecer uma saída não nula após o sinal de erro ter sido zerado. Este comportamento é consequência do fato de que a saída depende dos valores passados do erro e não do valor atual. Em outras palavras, erros passados "carregam" o integrador num determinado valor, o qual persiste mesmo que o erro se torne nulo. Esta característica tem como consequência que distúrbios constantes podem ser rejeitados com erro nulo já que, diferentemente do que ocorre com controladores proporcionais, aqui não é necessário que o erro seja não nulo para dar origem a um controle que cancele o efeito do distúrbio.

Assim, a principal razão para a presença do termo de natureza integral é reduzir ou eliminar erros estacionários. Note que a esse termo corresponde um polo na origem da Função de Transferência de malha e, conseqüentemente, o aumento do **tipo** do sistema. Em contrapartida, esse benefício geralmente é obtido às custas de uma redução da estabilidade ou do amortecimento do sistema. Para se convencer deste fato, construa o LGR para alguns sistemas simples com controladores proporcionais e, em seguida, examine o que ocorre quando se adiciona um polo na origem à Função de Transferência de malha.

O termo **derivativo** tem o papel de aumentar o amortecimento e, em geral, melhorar a estabilidade de um sistema. Intuitivamente, a ação do termo derivativo pode ser entendida quando consideramos um controlador PD num instante em que o erro é momentaneamente nulo, mas sua taxa de variação, não. Nesse caso, o termo proporcional não terá contribuição alguma sobre a saída, mas o termo derivativo, sim; este último tem assim o papel de fazer com que o

controlador se **antecipe** à ocorrência de erro. Essa característica de tornar o controlador sensível à taxa de variação do erro tem claramente o efeito de aumentar o amortecimento do sistema.

A combinação dos termos de natureza proporcional, integral e derivativa é normalmente utilizada para se obter um grau aceitável de redução de erro estacionário, simultaneamente com boas características de estabilidade, amortecimento e velocidade de resposta.

Os compensadores PID são os mais comuns nas aplicações industriais.

Para ilustrar a discussão anterior, estudemos um exemplo simples utilizando o LGR.

**Exemplo:** Consideremos uma planta com Função de Transferência

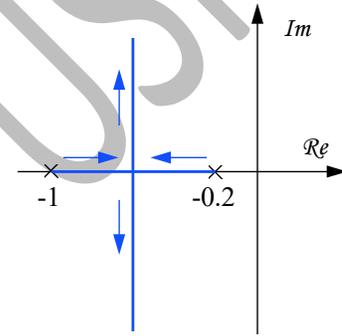
$$G(s) = \frac{1}{(s + 0.2) \cdot (s + 1)}$$

e analisemos o sistema em malha fechada resultante para controladores de quatro tipos: proporcional, PI, PD e PID. Utilizemos para a análise o LGR.

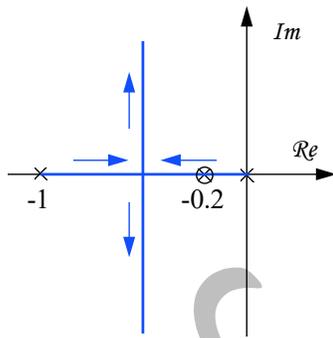
**Controlador proporcional:**

$$G_c(s) = K_p$$

Este sistema é de tipo 0 e, portanto, para que o erro estacionário para entrada degrau seja pequeno, é necessário que o ganho  $K_p$  do controlador seja suficientemente grande. Ganhos elevados, contudo, têm como consequência a existência de polos complexos conjugados e, portanto, de respostas altamente oscilatórias (veja figura ao lado).



**Controlador PI:**



$$G_c(s) = K_p \cdot \left[ 1 + \frac{1}{s \cdot T_i} \right]$$

Escolhendo  $T_i = 5$ , o zero do compensador coincide com o polo da planta situado em  $s = -0.2$ .

A inclusão do polo na origem, proveniente do integrador, transformou o sistema em de tipo 1. Com isso, o erro estacionário para entrada degrau é nulo, independentemente do valor do ganho. Note, porém, que, quando comparado com o caso do controlador proporcional, o L.G.R. se deslocou para a direita.

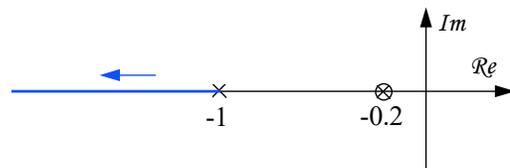
Sugere-se que o leitor examine outras alternativas quanto ao valor de  $T_i$  e note que as observações acima se mantêm válidas em sua essência.

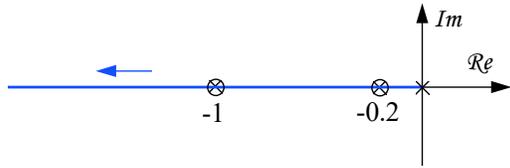
**Controlador PD:**

$$G_c(s) = K_p \cdot [1 + s \cdot T_d]$$

Suponhamos, por exemplo, que  $T_d = 5$ , de maneira que o zero do compensador coincide com o polo  $s = -0.2$  da planta.

Neste caso, o sistema é do tipo 0, apresentando pois erro estacionário finito para entrada degrau. No entanto, mesmo que se trabalhe com valores de ganho elevados para que esse erro seja reduzido, a resposta do sistema sempre tem caráter superamortecido.



**Controlador PID:**

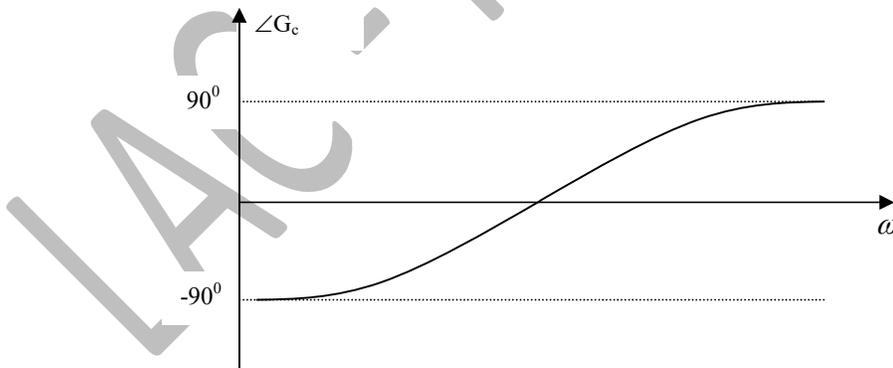
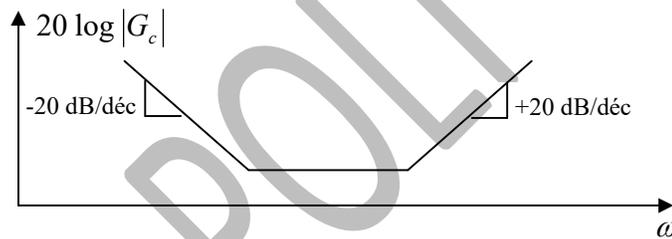
$$G_c(s) = K_p \cdot \left[ 1 + \frac{1}{s \cdot T_i} + s \cdot T_d \right]$$

Suponhamos que  $T_d = 0.833$  e  $T_i = 6.0$ , de maneira que os zeros do compensador se situam nos pontos  $s = -0.2$  e  $s = -1.0$ , cancelando assim os polos de malha aberta da planta.

O sistema resultante é de tipo 1, apresentando pois erro estacionário nulo para entrada degrau para valores arbitrários de ganho. Além disso, a sua resposta é sempre superamortecida.

Nota-se assim, que o controlador PID reúne as boas características dos controladores PI e PD neste exemplo particular.

Os Diagramas de Bode dos compensadores PID têm o aspecto típico ilustrado abaixo. Nota-se assim claramente que os compensadores apresentam características de avanço/atraso.



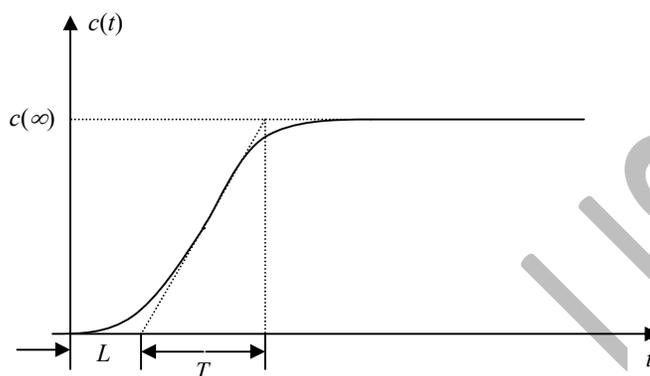
No caso em que o modelo da planta é conhecido, para sintonizar o compensador PID podem-se aplicar as técnicas usuais de projeto (LGR - conforme ilustrado pelo exemplo visto acima - e resposta em frequência).

Quando o modelo da planta não é bem conhecido, os parâmetros do compensador podem ser escolhidos utilizando-se o método de Ziegler-Nichols. Este método, apesar de concebido no início da década de 40, ainda é muito usado em aplicações industriais.

Há duas regras baseadas na resposta experimental do sistema e que visam a obter uma taxa de decaimento em torno de 25% (na prática, o sobressinal resulta entre 40% e 60% na maioria dos casos).

### Primeira Regra do Método de Ziegler-Nichols

Esta regra se aplica apenas no caso em que a resposta a degrau da planta em malha aberta tem o aspecto indicado na figura abaixo, típica de um sistema de primeira ordem com atraso.



$L$  e  $T$  são chamados na literatura, respectivamente, de tempo de retardo e "constante de tempo" (esta, indevidamente). Os valores dos parâmetros do compensador devem ser escolhidos conforme indicado na tabela a seguir.

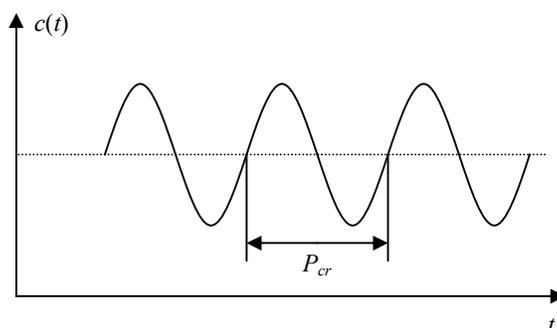
Tipo do Compensador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$T/L$	$\infty$	$0$
PI	$0.9T/L$	$L/0.3$	$0$
PID	$1.2T/L$	$2L$	$0.5L$

Para o compensador PID é imediato verificar que sua função de transferência resulta:

$$G_c(s) = 0.6T \frac{\left(s + \frac{1}{L}\right)^2}{s}$$

### Segunda Regra do Método de Ziegler-Nichols

Para aplicar esta regra, inicialmente, considera-se o sistema em malha fechada com um controlador proporcional (isto é,  $T_i = \infty$  e  $T_d = 0$ ). Suponhamos que, aumentando-se o ganho  $K_p$ , a saída resulte oscilatória e que, quando o ganho atinge um determinado valor, a saída exibe oscilações não amortecidas (se isto não ocorre, o método não se aplica!). Seja  $P_{cr}$  o período dessas oscilações e  $K_{cr}$  o valor do ganho.



Para este método, os valores dos parâmetros do compensador são dados na tabela a seguir.

Tipo do Compensador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0.45K_{cr}$	$P_{cr}/1.2$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Para o compensador PID, sua função de transferência resulta

$$G_C(s) = 0,075 K_{cr} P_{cr} \frac{(s + 4/P_{cr})^2}{s}$$

É óbvio que, de maneira geral, a aplicação desta regra requer cuidados, uma vez que a ocorrência de oscilações não amortecidas indica que o sistema está na iminência de **perder a estabilidade**. Operar o sistema nesta condição pode ser inaceitável em certas aplicações como, por exemplo, para sintonizar controladores de reatores nucleares ou pilotos automáticos de aviões!