**MAP5729 - Introdução à Análise Numérica**

**1º Semestre de 2014 - Lista de Exercícios**

**Exercício 1** Suponha que $|e_k|$ satisfaz a desigualdade

$$|e_{k+1}| \leq (1 + hL)|e_k| + D,$$

onde $h$, $L$ e $D$ são constantes positivas e $0 \leq kh \leq b$. Mostre que

$$|e_k| \leq D\frac{(1 + hL)^k - 1}{hL} + (1 + hL)^k|e_0| \leq \frac{D}{hL}(e^{Lb} - 1) + e^{Lb}|e_0|.$$

**Exercício 2** Deduza a fórmula geral para os métodos Runge-Kutta com dois estágios de ordem 2. Derive o método poligonal melhorado e o método de Heun como casos particulares. Mostre que um método Runge-Kutta com dois estágios não pode ter ordem 3.

**Exercício 3** Suponha que $f(x, y)$ é contínua em $[a, b] \times R$ e satisfaz a condição de Lipschitz para $y$ nesta região, com constante de Lipschitz $L$. Mostre que a função incremento $\Phi(x, y, h)$ do método de Heun é contínua em $D = [a, b] \times R \times [0, h_0]$, e que ela satisfaz a condição de Lipschitz para $y$ na região $D$. Apresente um majorante para a constante de Lipschitz de $\Phi$.

**Exercício 4** O problema de valor inicial

$$y' = -2y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4, \quad y(0) = \frac{1}{8}$$

tem a solução exata

$$y(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^4.$$

Use o método de Euler com passos $h = 2^{-p}$, $p = 1, 2, \ldots, 8$ para aproximar $y(1)$. Verifique que não apenas $\lim_{h\to 0} \frac{e(1,h)}{h}$, mas também $\lim_{h\to 0} \frac{e(1,h)}{h^2}$ parece existir. Isto contradiz a teoria?

**Exercício 5** Considere a equação diferencial $y' = \lambda y$, onde $\lambda$ é constante (real ou complexa). Se usarmos um método Runge-Kutta explícito com $m$ estágios, as aproximações são claculadas por uma expressão da forma

$$\eta_{k+1} = F(h\lambda)\eta_k.$$

(a) Mostre que $F(\mu)$ é um polinômio de grau $m$ em $\mu$;

(b) Se o método tem ordem $p$ ($p \leq m$), quais são os coeficientes de $\mu^j$, $0 \leq j \leq p$? Justifique.

**Exercício 6** A solução do sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

representa a circunferência de raio 1 parametrizada pelo ângulo $t$. Por que? O método de Euler é um método ruim para aproximar a solução do sistema acima. De fato, as aproximações formam uma espiral. Por que? Mostre que o método do trapézio fornece uma aproximação qualitativamente melhor. Como você explica este fato em termos de regiões de estabilidade absoluta?

**Exercício 7** Verifique se o método de passo múltiplo linear

$$\eta_{k+1} = \eta_{k-3} + \frac{h}{3}[8f_k - 4f_{k-1} + 8f_{k-2}]$$

é convergente.

**Exercício 8** Considere o método de passo múltiplo linear

$$\eta_{k+2} - (1+a)\eta_{k+1} + a\eta_k = \frac{h}{2}[(3-a)f_{k+1} - (1+a)f_k].$$

Mostre que o método tem ordem 2 e é zero-estável quando $a = 0$, e que ele tem ordem 3 mas não é zero-estável quando $a = -5$. O que se pode afirmar sobre a convergência em cada caso?

**Exercício 9** O método de passo múltiplo linear

$$\eta_{k+1} - \eta_{k-1} = \frac{h}{2}[f_{k-1} + 2f_k + f_{k+1}]$$

para a equação $y' = f(x, y)$ é obtido da fórmula dos trapézios com duas repetições no intervalo $[x_{k-1}, x_{k+1}]$.

a) Qual é a ordem do método?

b) O método é zero-estável?

c) O método é absolutamente estável?

d) Quando $f(x, y) = -y$, as aproximações $\eta_k$ sempre decaem?

e) O método é convergente quando $h$ tende a zero?

**Exercício 10** Determine a solução geral das seguintes equações de diferença lineares:

a) $y_{k+2} = y_{k+1} + y_k$.

b) $y_{k+m} - y_k = 0$, $m = 1, 2, \ldots$

Apresente também a solução de a) com $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$ (seqüência de Fibonacci).