Instituto de Física da USP
Física Moderna I – 4300375
1º Semestre de 2014
Profª Márcia de Almeida Rizzutto

Exercício para Entrega no Dia 04/06

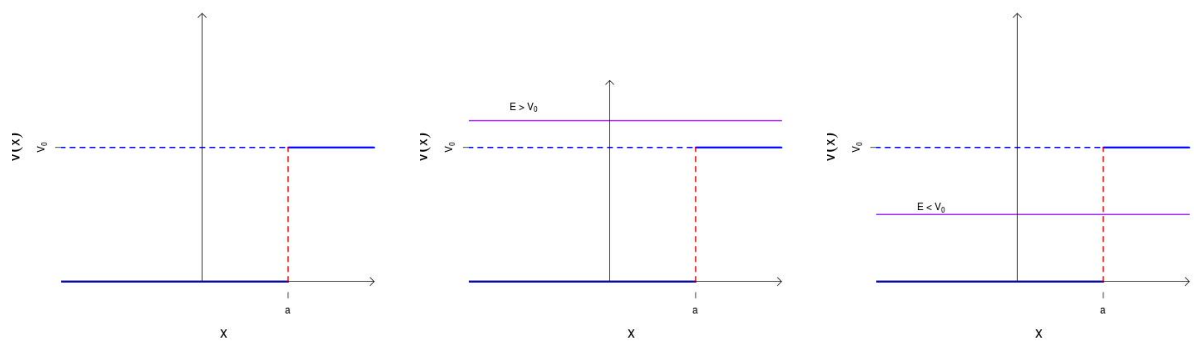
Considere uma partícula de massa m sujeita a um potencial

$$V(x,t) \equiv V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \\ V_0 & , \quad x \geq a \end{cases}$$

onde a é constante e $V_0 > 0$ é uma constante.

1

O gráfico deste potencial é dado por:



A equação de Schrödinger correspondente é:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$$

que pode ser separada se escrevemos $\Psi(x,t) = \psi(x)\exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)$. Nestas circunstâncias, teremos que:

$$\psi''(x) = -\frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2}\psi(x).$$

Na região em que $x < a$, $V(x) = 0$ e, portanto:

$$\psi''_{x<a}(x) = i^2\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_{x<a}(x) = i^2 k_0^2 \psi_{x<a}(x)$$

onde $k_0 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, que é a equação de uma partícula livre com número de onda k_0. A solução desta equação é dada por: $\psi_{x<a}(x) = A_1\exp(ik_0x) + B_1\exp(-ik_0x)$.
Na região em que $x > a$, $V(x) = V_0$

$$\psi''_{x<a}(x) = i^2\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}\psi_{x>a}(x) = \begin{cases} i^2k^2\psi_{x>a}(x) & , \quad \text{se } E > V_0 \\ \\ k^2\psi_{x>a}(x) & , \quad \text{se } E < V_0 \end{cases}$$

onde $k = \frac{\sqrt{2m|E-V_0|}}{\hbar}$, que é a equação de uma partícula livre com número de onda k, no primeiro caso, e a equação de um decaimento ou crescimento exponencial, no segundo caso. A solução desta equação é dada por:

$\psi_{x>a}(x) = A_2 \exp(ikx) + B_2 \exp(-ikx)$, no primeiro caso, e por $\psi_{x>a}(x) = A_2 \exp(kx) + B_2 \exp(-kx)$, no segundo caso. Unindo os resultados anteriores, obtém-se que para $E > V_0$

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} A_1 \exp i(k_0 x - \omega t) + B_1 \exp i(-k_0 x - \omega t) & , \quad \text{se } x < a \\ \\ A_2 \exp i(kx - \omega t) + B_2 \exp i(-kx - \omega t) & , \quad \text{se } x > a \end{cases}$$

onde $\omega = E/\hbar$. Já para o caso $E < V_0$, teremos que:

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} A_1 \exp i(k_0 x - \omega t) + B_1 \exp i(-k_0 x - \omega t) & , \quad \text{se } x < a \\ \\ A_2 \exp(kx - \omega t) + B_2 \exp(-kx - \omega t) & , \quad \text{se } x > a \end{cases} .$$

No ponto $x = a$ devem valer, no entanto, as propriedades de continuidade de $\psi(x)$ e $\psi'(x)$.

2

Tratamos, primeiramente, do caso $E > V_0$. A partícula vem de $-\infty$ o que significa que não deve haver onda que vá no sentido regressivo na região $x > a$. Portanto, $B_2 = 0$. Assim, a função de onda se torna:

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} A_1 \exp i(k_0 x - \omega t) + B_1 \exp i(-k_0 x - \omega t) & , \quad \text{se } x < a \\ \\ A_2 \exp i(kx - \omega t) & , \quad \text{se } x > a \end{cases}$$

e sua derivada em x é:

$$\Psi'(x,t) = \begin{cases} ik_0 A_1 \exp i(k_0 x - \omega t) - ik_0 B_1 \exp i(-k_0 x - \omega t) & , \quad \text{se } x < a \\ \\ ikA_2 \exp i(kx - \omega t) & , \quad \text{se } x > a \end{cases}$$

na qual aplicamos as condições de continuidade, impondo que $\Psi_{x<a}(a,t) = \Psi_{x>a}(a,t)$

$$A_1 \exp i(k_0 a - \omega t) + B_1 \exp i(-k_0 a - \omega t) = A_2 \exp i(ka - \omega t)$$

donde, eliminando a parte temporal, obtemos:

$$\rightarrow A_1 \exp(ik_0 a) + B_1 \exp(-ik_0 a) = A_2 \exp(ika)$$

e que $\Psi'_{x<a}(a,t) = \Psi'_{x>a}(a,t)$

$$ik_0 A_1 \exp i(k_0 a - \omega t) - ik_0 B_1 \exp i(-k_0 a - \omega t) = ikA_2 \exp i(ka - \omega t)$$

novamente, eliminando a parte temporal:

$$\rightarrow k_0 A_1 \exp(ik_0 a) - k_0 B_1 \exp(-ik_0 a) = kA_2 \exp(ika)$$

Desse modo, temos duas equações:

$$A_1 \exp(ik_0 a) + B_1 \exp(-ik_0 a) = A_2 \exp(ika) \tag{1}$$
$$k_0 A_1 \exp(ik_0 a) - k_0 B_1 \exp(-ik_0 a) = kA_2 \exp(ika) \tag{2}$$

Realizando as operações $k_0(1) + (2)$ e $k(1) - (2)$ obtemos:

$$\begin{aligned} 2k_0 A_1 \exp(ik_0 a) &= (k_0 + k) A_2 \exp(ika) \\ \rightarrow A_2 &= \frac{2k_0 \exp(i[k_0 - k]a)}{k_0 + k} A_1 \\ 2k_0 B_1 \exp(-ik_0 a) &= (k_0 - k) A_2 \exp(ika) \\ \rightarrow B_1 &= \frac{(k_0 - k)\exp(-i[k_0 + k]a)}{2k_0} A_2 = \frac{(k_0 - k)\exp(-i[k_0 + k]a)}{\cancel{2k_0}} \frac{\cancel{2k_0} \exp(i[k_0 - k]a)}{k_0 + k} A_1 \\ &= \frac{k_0 - k}{k_0 + k} \exp(-2ika) A_1 \end{aligned}$$

Desse modo, calculamos os coeficientes de transmissão e reflexão:

$$T = \frac{v}{v_0}\frac{\|A_2\|^2}{\|A_1\|^2} = \frac{\hbar k/m}{\hbar k_0/m}\frac{4k_0 k\|\exp(i[k_0-k]a)\|^2}{(k_0+k)^2}\frac{\|A_1\|^2}{\|A_1\|^2} = \frac{4k_0 k}{k_0^2+2kk_0+k^2}$$

$$R = \frac{\|B_1\|^2}{\|A_1\|^2} = \frac{(k_0-k)^2\|\exp(-2ika)\|^2}{(k_0+k)^2}\frac{\|A_1\|^2}{\|A_1\|^2} = \frac{k_0^2-2kk_0+k^2}{k_0^2+2kk_0+k^2}$$

onde o fator $\frac{v}{v_0}$ é necessário, pois as partículas se movem mais lentamente na região $x > a$. Como se trata de uma partícula livre com $\psi(x) = e^{i(kx-\omega t)}$,

$$\hat{p}\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = \hbar k\psi(x)$$

o que significa que os $\psi(x)$ são autoestados de $\hat{p}$ com autovalor $\hbar k$. Desse modo, o valor esperado p do momento pode ser calculado:

$$p = \psi^*(x)\hat{p}\psi(x) = \psi^*(x)\left(-i\hbar(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = \hbar k.$$

Isto implica que para uma partícula livre composta de apenas uma onda plana, o momento é bem definido. Então $v = \hbar k/m$. Assim, segue claramente que $R + T = 1$. Isto significa que a soma das probabilides de transmissão e reflexão, somadas, tem de resultar em 1 - ou seja, a partícula deve ser conservada.

3

Tratamos, agora, do caso $E < V_0$. A probabilidade, portanto, não pode divergir em $+\infty$. Logo, $A_2 = 0$.

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} A_1 \exp i(k_0 x - \omega t) + B_1 \exp i(-k_0 x - \omega t) & , \quad \text{se } x < a \\ B_2 \exp(-kx - i\omega t) & , \quad \text{se } x > a \end{cases}$$

e sua derivada em x é:

$$\Psi'(x,t) = \begin{cases} ik_0 A_1 \exp i(k_0 x - \omega t) - ik_0 B_1 \exp i(-k_0 x - \omega t) & , \quad \text{se } x < a \\ kB_2 \exp(-kx - i\omega t) & , \quad \text{se } x > a \end{cases}$$

na qual aplicamos as condições de continuidade, impondo que $\Psi_{x<a}(a,t) = \Psi_{x>a}(a,t)$

$$A_1 \exp i(k_0 a - \omega t) + B_1 \exp i(-k_0 a - \omega t) = B_2 \exp(-ka - i\omega t)$$

donde, eliminando a parte temporal, obtemos:

$$\to A_1 \exp(ik_0 a) + B_1 \exp(-ik_0 a) = B_2 \exp(-ka)$$

e que $\Psi'_{x<a}(a,t) = \Psi'_{x>a}(a,t)$

$$ik_0 A_1 \exp i(k_0 a - \omega t) - ik_0 B_1 \exp i(-k_0 a - \omega t) = -kB_2 \exp(-ka - i\omega t)$$

novamente, eliminando a parte temporal:

$$\to k_0 A_1 \exp(ik_0 a) - k_0 B_1 \exp(-ik_0 a) = ikA_2 \exp(-ka)$$

Desse modo, temos duas equações:

$$A_1 \exp(ik_0 a) + B_1 \exp(-ik_0 a) = B_2 \exp(-ka) \tag{3}$$
$$k_0 A_1 \exp(ik_0 a) - k_0 B_1 \exp(-ik_0 a) = ikB_2 \exp(-ka) \tag{4}$$

Realizando as operações $k_0(3) + (4)$ e $k(3) - (4)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
2k_0 A_1 \exp(ik_0 a) &= (k_0 + ik) B_2 \exp(-ka) \\
\to B_2 &= \frac{2k_0 \exp(ka)\exp(ik_0 a)}{k_0 + ik} A_1 \\
2k_0 B_1 \exp(-ik_0 a) &= (k_0 - ik) B_2 \exp(-ka) \\
\to B_1 &= \frac{(k_0 - ik)\exp(ik_0 a)\exp(-ka)}{2k_0} B_2 = \frac{(k_0 - ik)\exp(ik_0 a)\cancel{\exp(-ka)}}{\cancel{2k_0}} \frac{\cancel{2k_0}\cancel{\exp(ka)}\exp(ik_0 a)}{k_0 + ik} A_1 \\
&= \frac{k_0 - ik}{k_0 + ik} \exp(i2k_0 a) A_1
\end{aligned}$$

Desse modo, calculamos os coeficientes de transmissão e reflexão:

$$T = 0$$

$$R = \frac{\|B_1\|^2}{\|A_1\|^2} = \frac{\|k_0 - ik\|^2 \|\exp(i2k_0 a)\|^2}{\|k_0 + ik\|^2} \frac{\|A_1\|^2}{\|A_1\|^2} = \frac{k_0^2 + k^2}{k_0^2 + k^2} = 1$$

Onde T é zero pois não há onda plana após $x > a$. Desse modo, segue claramente que $R + T = 1$. Isto significa que a partícula, apesar de ter uma probabilidade não nula na região $x > a$, ela apenas penetra a barreira, sendo totalmente refletida.