

Segundo Exercício-Trabalho

Rafael Wagner - 8540310

26 de outubro de 2016

1 Queda livre próximo da Terra considerando a força de Coriolis

Considere o movimento vertical em queda livre de uma partícula num ponto de latitude λ , sujeito à força gravitacional terrestre e abandonado do repouso de uma altura h . Sabendo que a aceleração efetiva da gravidade é g , que a velocidade angular da terra é ω , dirigida do Sul para o Norte e considerando o sistema de coordenadas S' (Terra) como mostra a figura, determine em função de h , λ , ω e g para os dois casos: Hemisfério Norte e Hemisfério Sul.

- (a) A aceleração de Coriolis, considerando $v_{z'} \gg v_{x'}$ e $v_{z'} \gg v_{y'}$
- (b) O tempo de queda.
- (c) A deflexão em relação à linha de prumo.

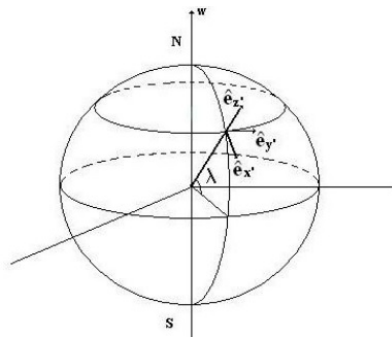


Figura 1: Representação tridimensional da Terra e os sistemas de coordenadas.

Solução:

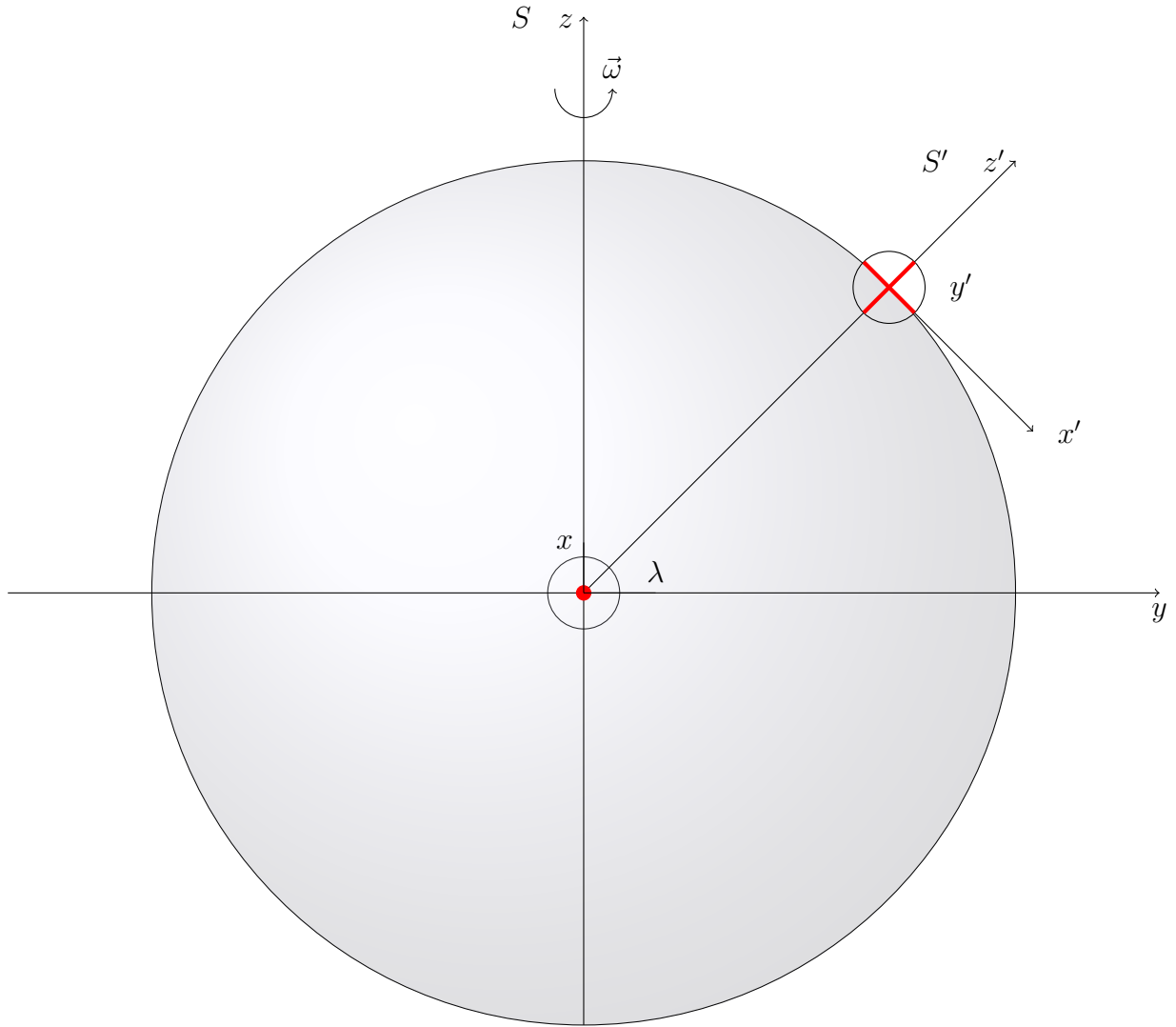


Figura 2: Representação da Terra com seus dois sistemas referenciais de interesse para o exercício: Um referencial S fixo em relação à mesma e um referencial S' situado em um ângulo de latitude λ fixo no chão que gira em torno da Terra com velocidade ω . O símbolo do círculo com um X representa o vetor entrando no papel com relação ao leitor; o círculo com um ponto (em vermelho) significa que o vetor da direção (no caso a direção x) está saindo do plano do papel.

A fórmula central da teoria é a relação de transformação para se obter a força $\vec{F}'$ em um referencial que roda e translada em relação a um outro referencial. De modo geral a relação é a seguinte

$$\vec{F}' = \vec{F} - m\vec{\ddot{R}} - m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times \vec{r} \quad (1)$$

Onde, na equação 1 temos que $\vec{F}$ é soma das forças externas, por exemplo, as forças conhecidas como peso, normal, atrito entre outras. Nesse problema nós temos que a equação 1 se torna, fundamentalmente:

$$\vec{F}' = -m\vec{g}_{eff} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (2)$$

Porque a rotação da terra é tomada aproximadamente constante e, também, porque a força da gravidade é muito maior do que a força centrífuga. Essa gravidade efetiva é escrita na notação do exercício simplesmente como $\vec{g}$, portanto escrevemos

$$\vec{g} = \vec{g}_{eff} \quad (3)$$

Agora, analisando, temos dois efeitos diferentes para cada hemisfério (Norte e Sul) isso porque, fundamentalmente, o vetor $\vec{\omega}$ se decompõe diferentemente em S' nesses dois casos. Para a decomposição desse vetor no Norte nós temos:

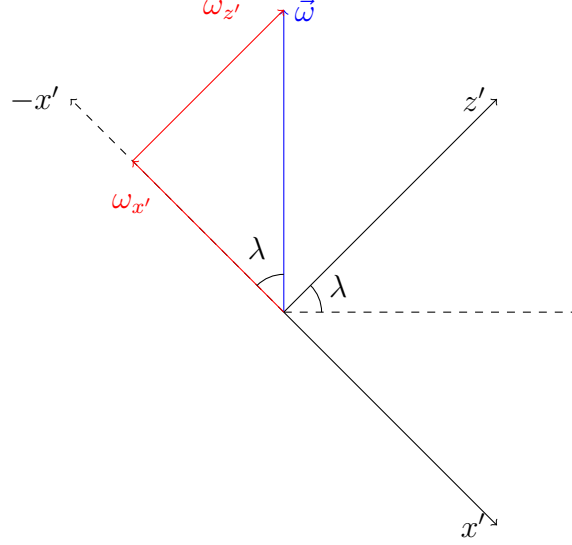


Figura 3: Decomposição do vetor de rotação no sistema S'

Da figura 3 nós obtemos claramente que

$$\begin{aligned} \cos(\lambda) &= \frac{\omega_{x'}}{\omega} \\ \sin(\lambda) &= \frac{\omega_{z'}}{\omega} \end{aligned} \quad (4)$$

Nesse caso teremos que $\vec{\omega}$ será dado por:

$$\vec{\omega}_{Norte} = \begin{pmatrix} -\omega \cos(\lambda) \\ 0 \\ \omega \sin(\lambda) \end{pmatrix}_{S'} \quad (5)$$

Para o Sul nós podemos fazer uma decomposição semelhante levando em consideração diferentes fatores e a decomposição correta nesse caso será:

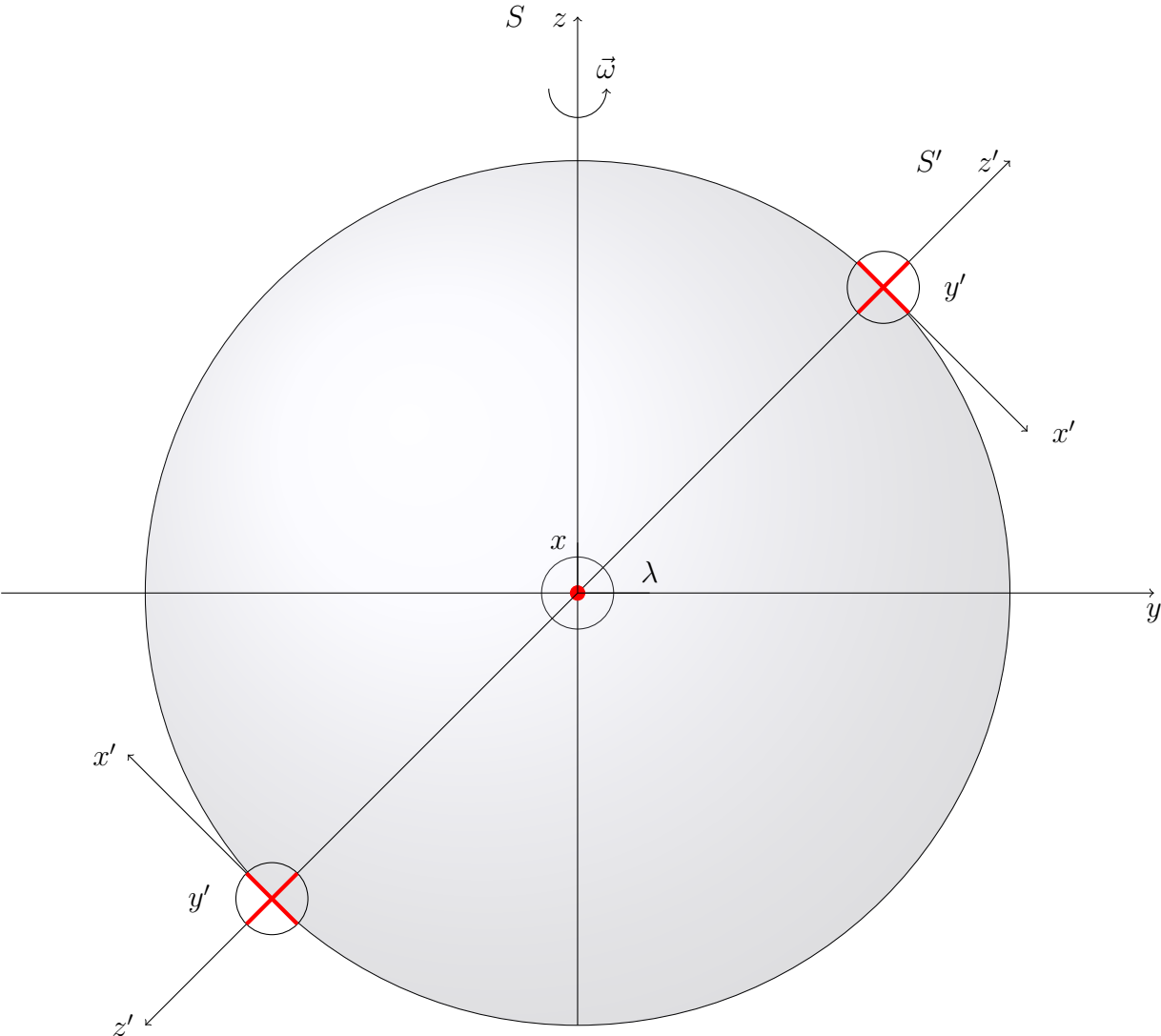


Figura 4: Esquema para entender como deve ser a decomposição do vetor $\vec{\omega}$ no caso do hemisfério Sul. Fazendo da mesma forma que na figura 3 tente observar a inversão de sinais: agora a decomposição para $\omega_{z'}$ estará na direção negativa enquanto que $\omega_{x'}$ estará na positiva.

$$\vec{\omega}_{Sul} = \begin{pmatrix} +\omega \cos(\lambda) \\ 0 \\ -\omega \sin(\lambda) \end{pmatrix}_{S'} \quad (6)$$

Desse modo podemos calcular a aceleração de Coriolis explicitamente. Se o corpo é abandonado do repouso de uma certa altura h então conhecemos explicitamente a sua velocidade no referencial S' . A mesma será dada por:

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix}_{S'} \quad (7)$$

Onde g é o módulo da gravidade efetiva, que é aproximadamente $9.8m/s^2$. Essa relação é a mesma independente do hemisfério. Portanto devemos ter que:

Para o hemisfério Norte:

$$\vec{a}_{Coriolis} = -2\vec{\omega}_{Norte} \times \vec{v}' = -2\det \begin{pmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{z}' \\ -\omega \cos(\lambda) & 0 & \omega \sin(\lambda) \\ 0 & 0 & -gt \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega g t \cos(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}_{S'} \quad (8)$$

Para o hemisfério Sul:

$$\vec{a}_{Coriolis} = -2\vec{\omega}_{Sul} \times \vec{v}' = -2\det \begin{pmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{z}' \\ \omega \cos(\lambda) & 0 & -\omega \sin(\lambda) \\ 0 & 0 & -gt \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ \omega g t \cos(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}_{S'} \quad (9)$$

Portanto obtemos as seguintes soluções

$$\vec{a}_{Coriolis}^{Norte} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega g t \cos(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}_{S'} \quad (10)$$

$$\vec{a}_{Coriolis}^{Sul} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\omega g t \cos(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}_{S'} \quad (11)$$

Agora estamos interessados no tempo de queda, e como vamos fazer o cálculo apenas usando a velocidade $v'_{z'}$, o tempo obtido será o mesmo nos dois hemisférios, isso porque $v'_{z'}$ é o mesmo nos dois hemisférios.

Para obter o tempo de queda basta integrarmos $v'_{z'}$ com relação ao tempo e iremos obter uma equação para z' :

$$z'(t) = h - g \frac{t^2}{2} \quad (12)$$

de modo que o tempo de queda t_Q se obtém da solução de $z'(t) = 0$. (Note que aqui as linhas **não são derivadas** mas são apenas para evidenciar em qual sistema de coordenadas estamos fazendo as contas! Isso é meio óbvio mas talvez possa ser alguma fonte de confusão porque estamos integrando e derivando. Na medida do possível derivadas com relação ao tempo serão representadas na notação de Newton).

$$z'(t) = h - g \frac{t^2}{2} = 0 \Leftrightarrow h = g \frac{t^2}{2} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (13)$$

Portanto

$$t_Q = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (14)$$

Por último o exercício pede que encontremos a deflexão com relação à linha de prumo. Isso significa que o corpo não cai perfeitamente vertical mas é defletido uma quantidade. Claramente essa quantidade é devida à rotação da Terra. Podemos ver que essa rotação produz uma força (de Coriolis) na direção y' (equações 10 e 11) sobre o Corpo em queda, de modo que ele vai sofrer um desvio nessa direção.

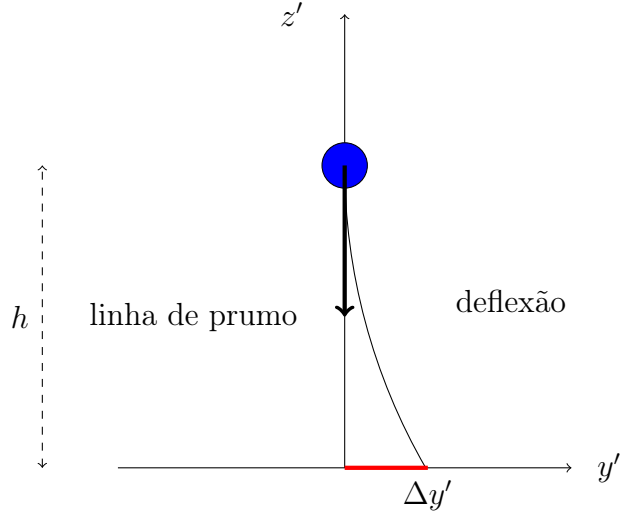


Figura 5: Figura que mostra a queda do corpo em relação à linha de prumo e a deflexão que queremos obter é $\Delta y'$.

A figura 5 ilustra o que vamos calcular e o evento físico em questão. Para tanto devemos resolver as equações do movimento para y' com a condição inicial $y'(0) = 0$ e então teremos que $\Delta y' = y'(t_Q)$ onde t_Q é dado pela equação 14.

A equação do movimento completo é dada pela equação 2.

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix}_{S'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}_{S'} + \vec{a}_{Coriolis} \quad (15)$$

Para o hemisfério Norte teremos que a equação ficará:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix}_{S'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}_{S'} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega g t \cos(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}_{S'} \quad (16)$$

donde a equação diferencial para y' é dada por

$$\ddot{y}' = 2\omega g t \cos(\lambda) \quad (17)$$

Que é uma equação diferencial simples, notando apenas que as condições iniciais para y' são $y'(0) = 0$ e $\dot{y}'(0) = 0$. resulta na seguinte solução:

$$y'(t) = \frac{1}{3}\omega g \cos(\lambda) t^3 \quad (18)$$

portanto obtemos que

$$\Delta y'_{Norte} = y'(t_Q) = \frac{1}{3}\omega g \cos(\lambda) \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2} \quad (19)$$

Para o hemisfério Sul ficamos com

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix}_{S'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}_{S'} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2\omega g t \cos(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}_{S'} \quad (20)$$

Procedindo da mesma maneira que no hemisfério Norte encontramos que

$$\Delta y'_{Sul} = y'(t_Q) = -\Delta y'_{Norte} \quad (21)$$

2 Lançamento de projétil à um ângulo α próximo da Terra considerando a força de Coriolis

Um projétil é arremessado na direção leste de um ponto da superfície terrestre localizado a uma latitude λ (hemisfério Norte) com uma velocidade de módulo v_0 e ângulo de inclinação em relação à horizontal α . Mostre que a deflexão lateral do projétil ao atingir o solo, onde ω é a frequência de rotação da Terra, é:

$$d = \frac{4v_0^3}{g^2} \omega \sin(\lambda) \sin^2(\alpha) \cos(\alpha) \quad (22)$$

Se o alcance do projétil for R_0 para o caso $\omega = 0$, mostre que a variação devido à rotação da Terra será:

$$\Delta R = \sqrt{\frac{2R_0^3}{g}} \omega \cos(\lambda) \left(\cot^{1/2}(\alpha) - \frac{1}{3} t g^{3/2}(\alpha) \right) \quad (23)$$

Solução:

Agora, para esse segundo problema, primeiro devemos resolvero sistema de equações para uma velocidade diferente da velocidade dada no primeiro exercício. Notemos que a física do problema é como descrita na figura 6.

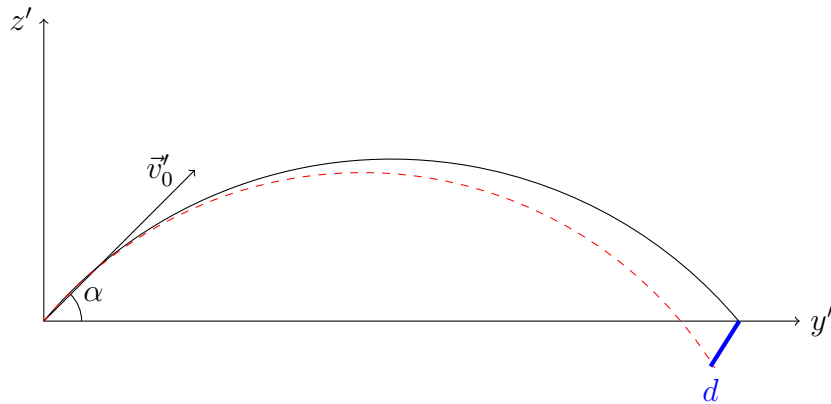


Figura 6: O projétil sendo lançado e sofrendo um desvio devido à força de Coriolis

O corpo é lançado da origem (no chão, portanto todas as posições são inicialmente nulas) na direção de y' (portanto a velocidade inicial na direção x' é nula), porém ao invés de produzir a trajetória comum (linha preta da figura 6) ela sofre uma deflexão d na direção x' e é essa deflexão que o exercício pede que encontremos. Na verdade, pela segunda parte do exercício vemos que também existe uma deflexão em y' dada por ΔR onde o R_0 seria a trajetória sem Coriolis (linha preta na figura 6) e ΔR a diferença entre o y' obtido pela linha tracejada e pela linha cheia.

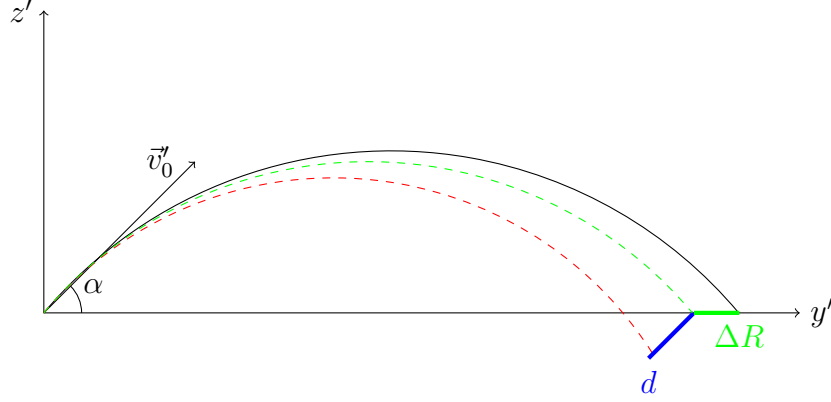


Figura 7: O projétil sendo lançado e sofrendo os dois desvios que o exercício pede para que obtenhamos: d e ΔR

A nova velocidade, dependente do tempo, é a velocidade determinada pelo lançamento de um projétil no plano $Oy'z'$:

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \cos(\alpha) \\ v_0 \sin(\alpha) - gt \end{pmatrix}_{S'} \quad (24)$$

Nesse caso teremos a seguinte força de Coriolis:

$$\begin{aligned} \vec{F}' &= -2m\vec{\omega}_{Norte} \times \vec{v}' = -2m \cdot \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\omega \cos(\lambda) & 0 & \omega \sin(\lambda) \\ 0 & v_0 \cos(\alpha) & v_0 \sin(\alpha) - gt \end{pmatrix} = \\ &= -2m \begin{pmatrix} -v_0 \omega \cos(\alpha) \sin(\lambda) \\ \omega \cos(\lambda) (v_0 \sin(\alpha) - gt) \\ -v_0 \omega \cos(\alpha) \cos(\lambda) \end{pmatrix}_{S'} = \begin{pmatrix} 2mv_0 \omega \cos(\alpha) \sin(\lambda) \\ -2m \omega \cos(\lambda) (v_0 \sin(\alpha) - gt) \\ 2mv_0 \omega \cos(\alpha) \cos(\lambda) \end{pmatrix}_{S'} \end{aligned} \quad (25)$$

Que resulta no seguinte sistema de equações (2):

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = 2mv_0 \omega \cos(\alpha) \sin(\lambda) \\ m\ddot{y}' = -2mv_0 \omega \sin(\alpha) \cos(\lambda) + 2m\omega g \cos(\lambda) t \\ m\ddot{z}' = 2mv_0 \omega \cos(\alpha) \cos(\lambda) - g \end{cases} \quad (26)$$

Agora, para obter a deflexão d em x' precisamos obter $x'(t)$ integrando a primeira equação e aplicando as condições de contorno ($x'(0) = 0$ e $\dot{x}'(0) = 0$). Com isso a equação para x' ficará:

$$x'(t) = v_0 \omega \cos(\alpha) \sin(\lambda) t^2 \quad (27)$$

Agora, também queremos obter o tempo que leva para o projétil cair. Esse tempo de queda t_Q é obtido resolvendo $z'(t) = 0$. Integrando a equação para z' nós obtemos

$$\dot{z}' = \dot{z}'(0) + 2v_0\omega\cos(\alpha)\cos(\lambda)t - gt = v_0\sin(\alpha) + 2v_0\omega\cos(\alpha)\cos(\lambda)t - gt \quad (28)$$

E, como $z'(0) = 0$ teremos que

$$z'(t) = v_0\sin(\alpha)t + v_0\omega\cos(\alpha)\cos(\lambda)t^2 - g\frac{t^2}{2} \quad (29)$$

Agora fazemos

$$z'(t) = 0 \quad (30)$$

Ou seja

$$v_0\sin(\alpha) + v_0\omega\cos(\alpha)\cos(\lambda)t - g\frac{t}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$t(2v_0\omega\cos(\alpha)\cos(\lambda) - g) = -2v_0\sin(\alpha) \Rightarrow$$

$$t = t_Q = \frac{2v_0\sin(\alpha)}{g - 2v_0\omega\cos(\alpha)\cos(\lambda)} \quad (31)$$

Se agora considerarmos que o termo da gravidade influencia completamente o comportamento da equação 31 teremos um tempo de queda

$$t_Q^{aproximado} = \frac{2v_0\sin(\alpha)}{g} \quad (32)$$

Portanto podemos obter d que será

$$d = x'(t_Q^{aproximado}) = v_0\omega\cos(\alpha)\sin(\lambda) \left(\frac{2v_0\sin(\alpha)}{g} \right)^2 \quad (33)$$

Portanto concluímos que

$$d = \frac{4v_0^3}{g^2}\omega\sin(\lambda)\sin^2(\alpha)\cos(\alpha) \quad (34)$$

Agora, para obtermos a deflexão em y' devemos resolver essa equação diferencial. Nesse caso procedemos por integrações diretas com relação ao tempo na parte de y' no sistema 26. Nesse caso teremos que:

$$\dot{y}' = \dot{y}'(0) - 2v_0\omega\sin(\alpha)\cos(\lambda)t + \omega g\cos(\lambda)t^2 = v_0\cos(\alpha) - 2v_0\omega\sin(\alpha)\cos(\lambda)t + \omega g\cos(\lambda)t^2 \quad (35)$$

Portanto temos que

$$y'(t) = v_0\cos(\alpha)t - v_0\omega\sin(\alpha)\cos(\lambda)t^2 + \frac{1}{3}\omega g\cos(\lambda)t^3 \quad (36)$$

Se colocarmos $\omega = 0$ então $t_Q = t_Q^{aproximado}$ e $y'(t) = v_0 \cos(\alpha)t$ donde obtemos que

$$y'(t_Q^{aproximado})^{\omega=0} = R_0 = v_0 \cos(\alpha) t_Q^{aproximado} = v_0 \cos(\alpha) \left(\frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \right) \quad (37)$$

$$R_0 = \frac{2v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g} \quad (38)$$

Agora vem a parte complicada (na minha opinião complicadíssima) em que devemos obter a relação desejada. Para isso, o grande segredo é usar uma aproximação para a relação 31 de modo que apenas tenhamos ω . Se notarmos, o valor $R = y'(t_Q)$ possui termos em ordens maiores de ω entretanto R_0 e a relação que queremos demonstrar de ΔR possui apenas um termo linear em ω . Esse é um forte indício de que nos cálculos devemos desconsiderar termos de ordem superior em ω . Essa também se mostra uma aproximação relevante tendo em vista que $\omega \approx 7 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ de modo que termos de ordem superior se tornam muito pequenos. Com isso, podemos fazer uma segunda aproximação, agora linear em ω , da equação 31:

$$t_Q = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g - 2v_0 \omega \cos(\alpha) \cos(\lambda)} \approx \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \left(1 + \frac{2v_0 \omega \cos(\alpha) \cos(\lambda)}{g} \right) = \bar{t}_Q^{aproximado} \quad (39)$$

Notação: agora escrevi $\bar{t}_Q^{aproximado}$ para diferenciar esse novo tempo de queda dos tempos de queda da equação 31 (sem aproximação nenhuma) e da equação 32 (aproximação para $\omega = 0$). Desculpe se a notação ficou muito poluída. Para obter a relação 39 usamos a aproximação para $x \ll 1$

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x \quad (40)$$

Desse modo podemos escrever

$$\begin{aligned} R = y'(\bar{t}_Q^{aproximado}) &= v_0 \cos(\alpha) \left(\frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \left(1 + \frac{2v_0 \omega \cos(\alpha) \cos(\lambda)}{g} \right) \right) \\ &\quad - v_0 \omega \sin(\alpha) \cos(\lambda) \left(\frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \left(1 + \frac{2v_0 \omega \cos(\alpha) \cos(\lambda)}{g} \right) \right)^2 + \\ &\quad \frac{1}{3} \omega g \cos(\lambda) \left(\frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \left(1 + \frac{2v_0 \omega \cos(\alpha) \cos(\lambda)}{g} \right) \right)^3 \end{aligned} \quad (41)$$

Agora, olhando cuidadosamente para essa última expressão, lembrando que os termos com ω^n para $n \geq 2$ serão desconsiderados para a segunda e terceira parte da equação apenas o valor 1 sobrevive pois quaisquer outros valores irão resultar em termos que estamos desprezando. Para ficar claro o que eu fiz eu vou colocar um 0 no lugar dos termos que eu desconsiderarei, entretanto é importante que isso seja apenas uma aproximação didática (e um pouco de preguiça de abrir todas essas contas).

Note que do lado de fora temos ω e dentro temos algo do tipo $(1+b\omega)^2$ onde b é uma constante. Nesse caso teremos que $\omega(1+b\omega)^2 = \omega(1+2b\omega+b^2\omega^2) = \omega + 2b\omega^2 + b^2\omega^3 \approx \omega$ portanto eu estou escrevendo didaticamente $\omega(1+b\omega)^2 \approx \omega(1+0)^2$ para que fique evidente os termos que eu desconsiderarei. Desculpe se parecer confuso, de qualquer modo posso a qualquer momento abrir essas contas e esclarecer esses resultados na monitoria.

$$\begin{aligned}
R = y'(\bar{t}_Q^{aproximado}) &= v_0 \cos(\alpha) \left(\frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \left(1 + \frac{2v_0 \omega \cos(\alpha) \cos(\lambda)}{g} \right) \right) \\
&\quad - v_0 \omega \sin(\alpha) \cos(\lambda) \left(\frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} (1 + 0) \right)^2 + \\
&\quad \frac{1}{3} \omega g \cos(\lambda) \left(\frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} (1 + 0) \right)^3
\end{aligned} \tag{42}$$

Desse modo ficamos com

$$R = \frac{2v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g} + \frac{4v_0^3 \omega \sin(\alpha) \cos^2(\alpha) \cos(\lambda)}{g^2} - \frac{4v_0^3 \omega \sin^3(\alpha) \cos(\lambda)}{g^2} + \frac{8v_0^3 \omega \sin^3(\alpha) \cos(\lambda)}{3g^2} \tag{43}$$

$$R = R_0 + \frac{4v_0^3 \omega \sin(\alpha) \cos^2(\alpha) \cos(\lambda)}{g^2} - \frac{4v_0^3 \omega \sin^3(\alpha) \cos(\lambda)}{g^2} + \frac{8v_0^3 \omega \sin^3(\alpha) \cos(\lambda)}{3g^2} \tag{44}$$

$$R - R_0 = \Delta R = \frac{4v_0^3 \omega \sin(\alpha) \cos(\lambda)}{g^2} \left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) + \frac{2}{3} \sin^2(\alpha) \right) \tag{45}$$

$$R - R_0 = \Delta R = \frac{4v_0^3 \omega \sin(\alpha) \cos(\lambda)}{g^2} \left(\cos^2(\alpha) - \frac{1}{3} \sin^2(\alpha) \right) \tag{46}$$

Agora

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2R_0^3}{g}} \omega \cos(\lambda) &= \sqrt{\frac{2 \left(\frac{2v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g} \right)^3}{g}} \omega \cos(\lambda) = \frac{4v_0^3 \cos^{3/2}(\alpha) \sin^{3/2}(\alpha) \omega \cos(\lambda)}{g^2} = \\
&= \frac{4v_0^3 \omega \cos(\lambda) \sin(\alpha) \cos^{3/2}(\alpha) \sin^{1/2}(\alpha)}{g^2} = \frac{4v_0^3 \omega \sin(\alpha) \cos(\lambda)}{g^2} (\cos^{3/2}(\alpha) \sin^{1/2}(\alpha))
\end{aligned} \tag{47}$$

Portanto temos que

$$\frac{4v_0^3 \omega \sin(\alpha) \cos(\lambda)}{g^2} = \sqrt{\frac{2R_0^3}{g}} \omega \cos(\lambda) \frac{1}{\cos^{3/2}(\alpha) \sin^{1/2}(\alpha)} \tag{48}$$

Logo

$$\Delta R = \frac{4v_0^3 \omega \sin(\alpha) \cos(\lambda)}{g^2} \left(\cos^2(\alpha) - \frac{1}{3} \sin^2(\alpha) \right) \Rightarrow \tag{49}$$

$$\Delta R = \sqrt{\frac{2R_0^3}{g}} \omega \cos(\lambda) \frac{1}{\cos^{3/2}(\alpha) \sin^{1/2}(\alpha)} \left(\cos^2(\alpha) - \frac{1}{3} \sin^2(\alpha) \right) \tag{50}$$

$$\Delta R = \sqrt{\frac{2R_0^3}{g}} \omega \cos(\lambda) \left(\frac{\cos^{1/2}(\alpha)}{\sin^{1/2}(\alpha)} - \frac{\sin^{3/2}(\alpha)}{3\cos^{3/2}(\alpha)} \right) \tag{51}$$

Donde, finalmente, obtivemos a relação que desejávamos:

$$\Delta R = \sqrt{\frac{2R_0^3}{g}} \omega \cos(\lambda) \left(\cot^{1/2}(\alpha) - \frac{1}{3} t g^{3/2}(\alpha) \right) \quad (52)$$