Planejamento de Rotas – Parte I

SSC5955

Slides adaptados de Masahiro Ono - MIT

Sumário

- Problema de Planejamento de Rotas
- Kinodynamic path planning
- Abordagem para Planejamento de Rota
  - Programação Linear (PL)
  - Programação Inteira (PI)
  - Programação Linear Inteira Mista (PLIM)
- Exemplo
- Receding Horizon Control
- **MPC** (model-predictive control)

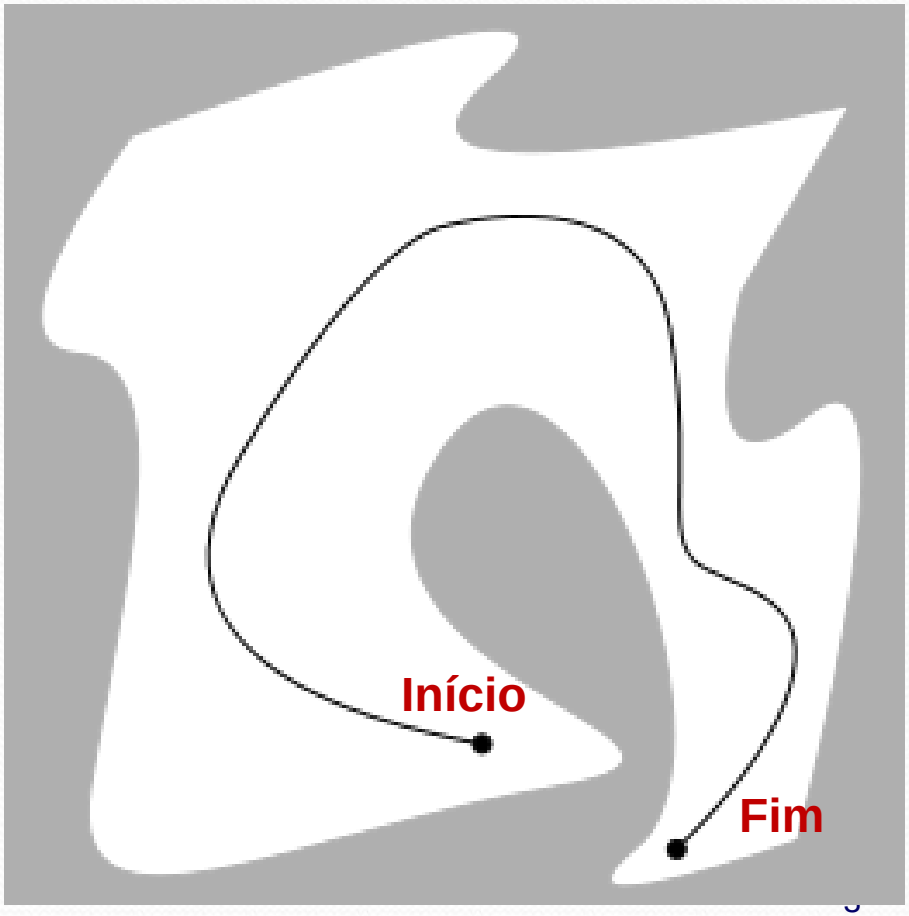
Problema de Planejamento de Rota

$$\min_{r} C(r)$$

$$s.t.$$

$$r \in R$$

***r*: rota**
***R*: Conjunto de rotas possíveis**
***C*: função de custo**



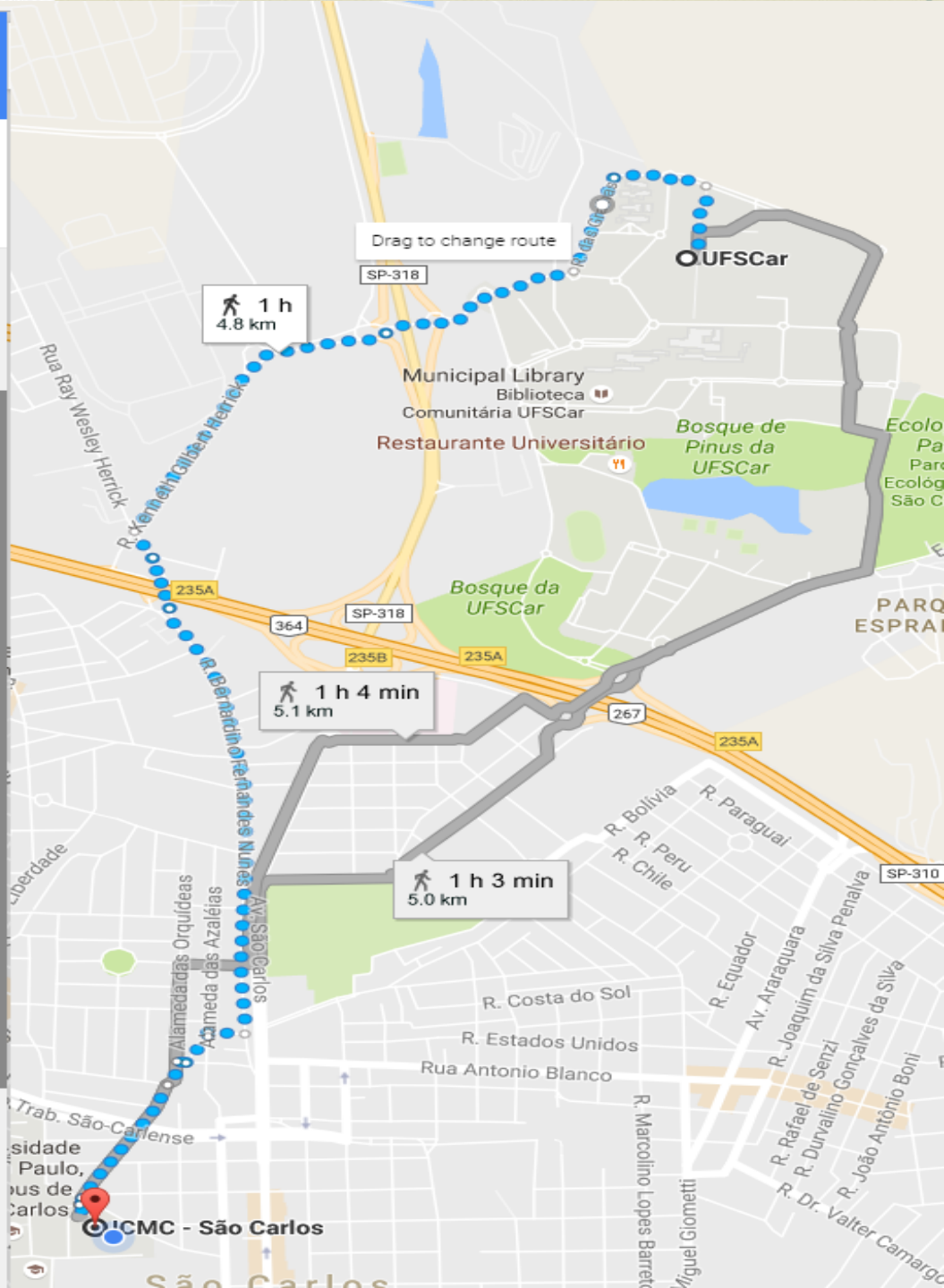
from UFSCar - Rodovia Washington Luís, 310, São Car...
ICMC - São Carlos - Avenida Trabalhador Sancarlen...

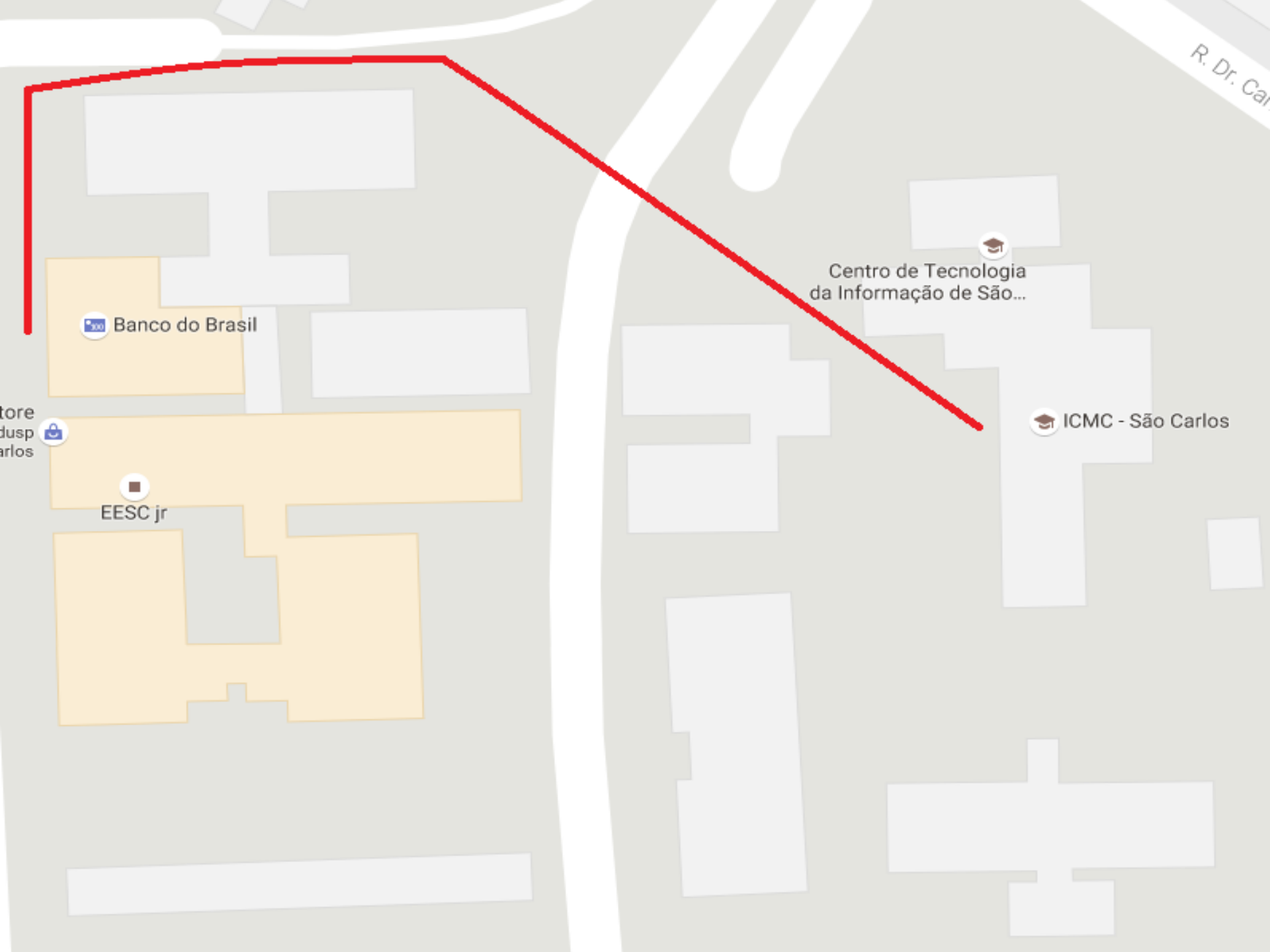
Back

1 h (4.8 km)

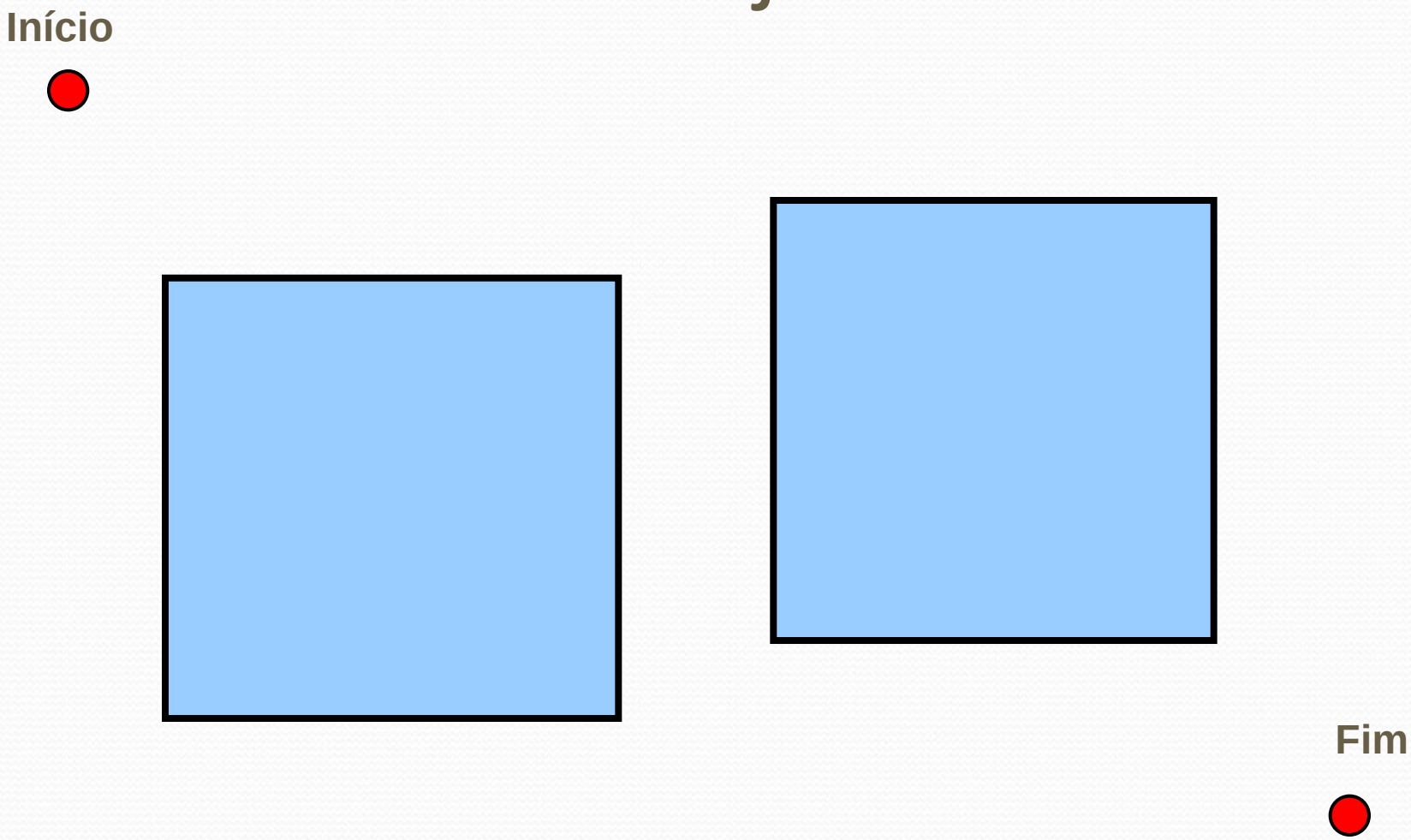
via R. Bernardino Fernandes Nunes

- Turn left toward R. das Gralhas
  Go through 1 roundabout
  250 m
- Continue onto R. das Gralhas
  300 m
- At the roundabout, take the 1st exit
  Go through 2 roundabouts
  550 m
- At the roundabout, take the 1st exit onto R. Kenneth Gilbert Herrick
  Go through 1 roundabout
  1.0 km
- Turn left onto Rua Ray Wesley Herrick
  94 m
- Slight right to stay on Rua Ray Wesley Herrick
  170 m
- Continue onto R. Bernardino Fernandes Nunes
  1.4 km
- Turn right toward Alameda das Azaléias
  92 m
- Turn left onto Alameda das Azaléias
  15 m
- Slight right to stay on Alameda das Azaléias
  98 m
- Turn right onto R. dos Jasmins
  24 m

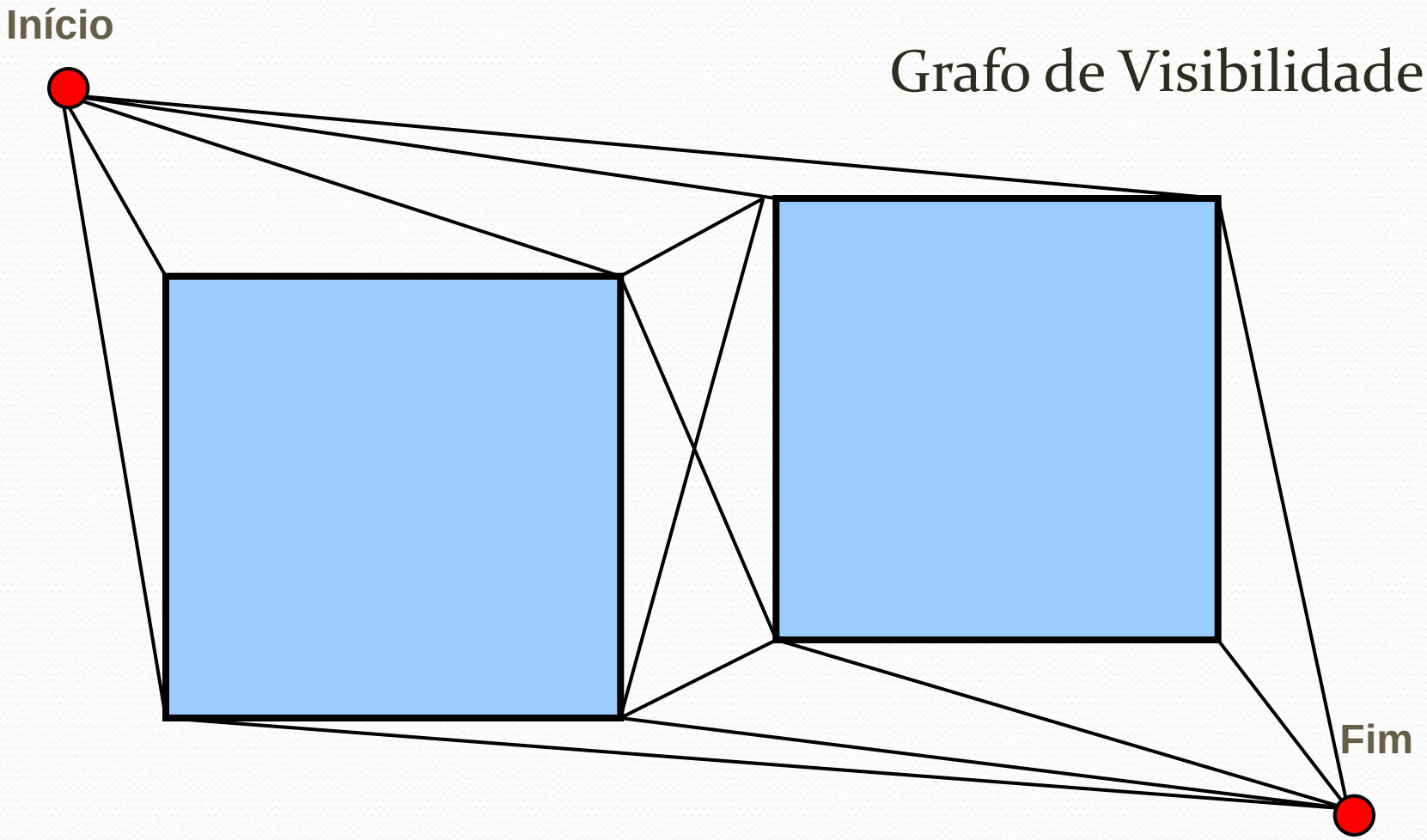



R. Dr. Ca
Centro de Tecnologia
da Informação de São...
Banco do Brasil
ICMC - São Carlos
tore
dusp
arlos
EESC jr

Problema de Planejamento de Rota

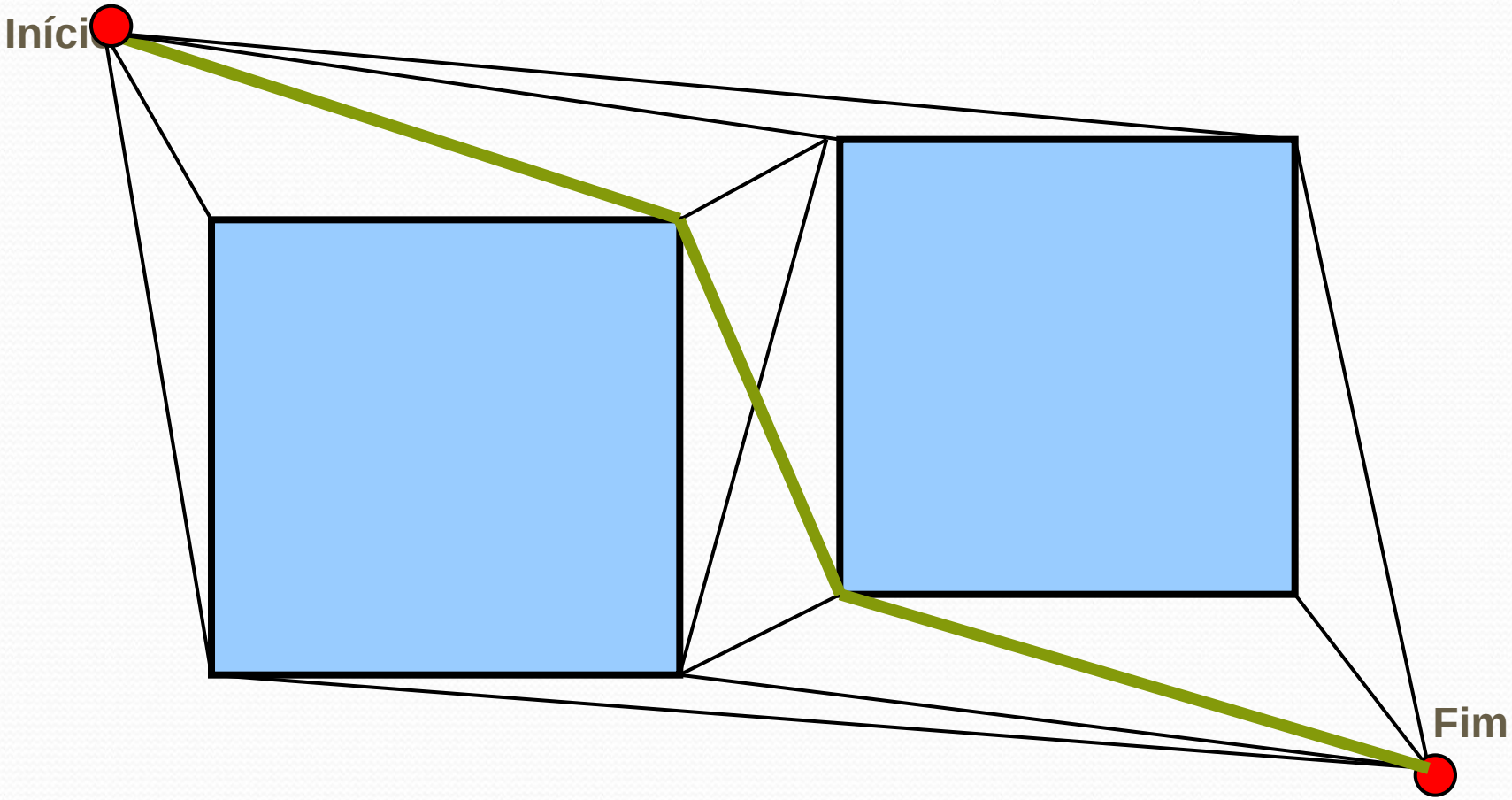


Problema de Planejamento de Rota

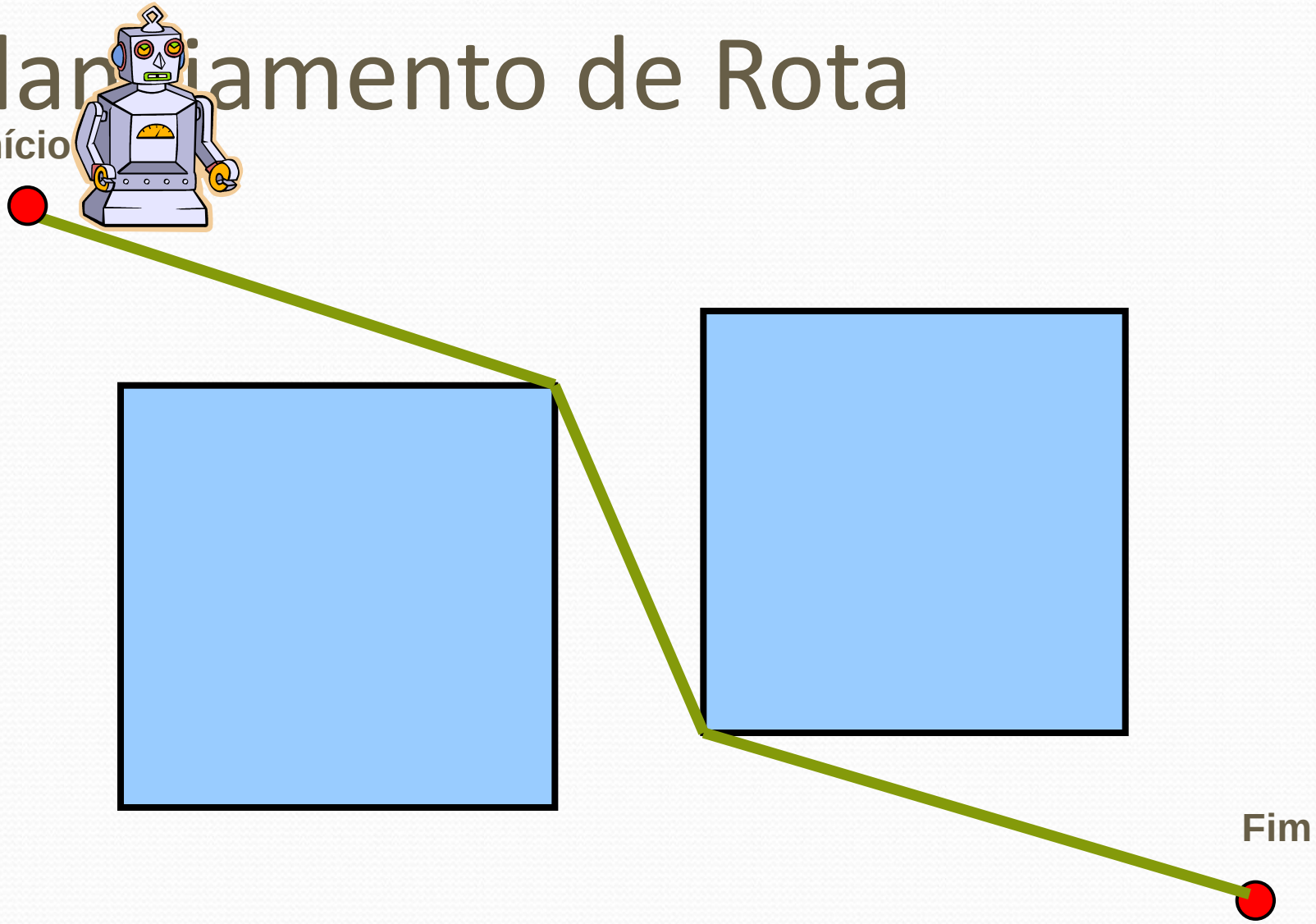


Planejamento de Rota

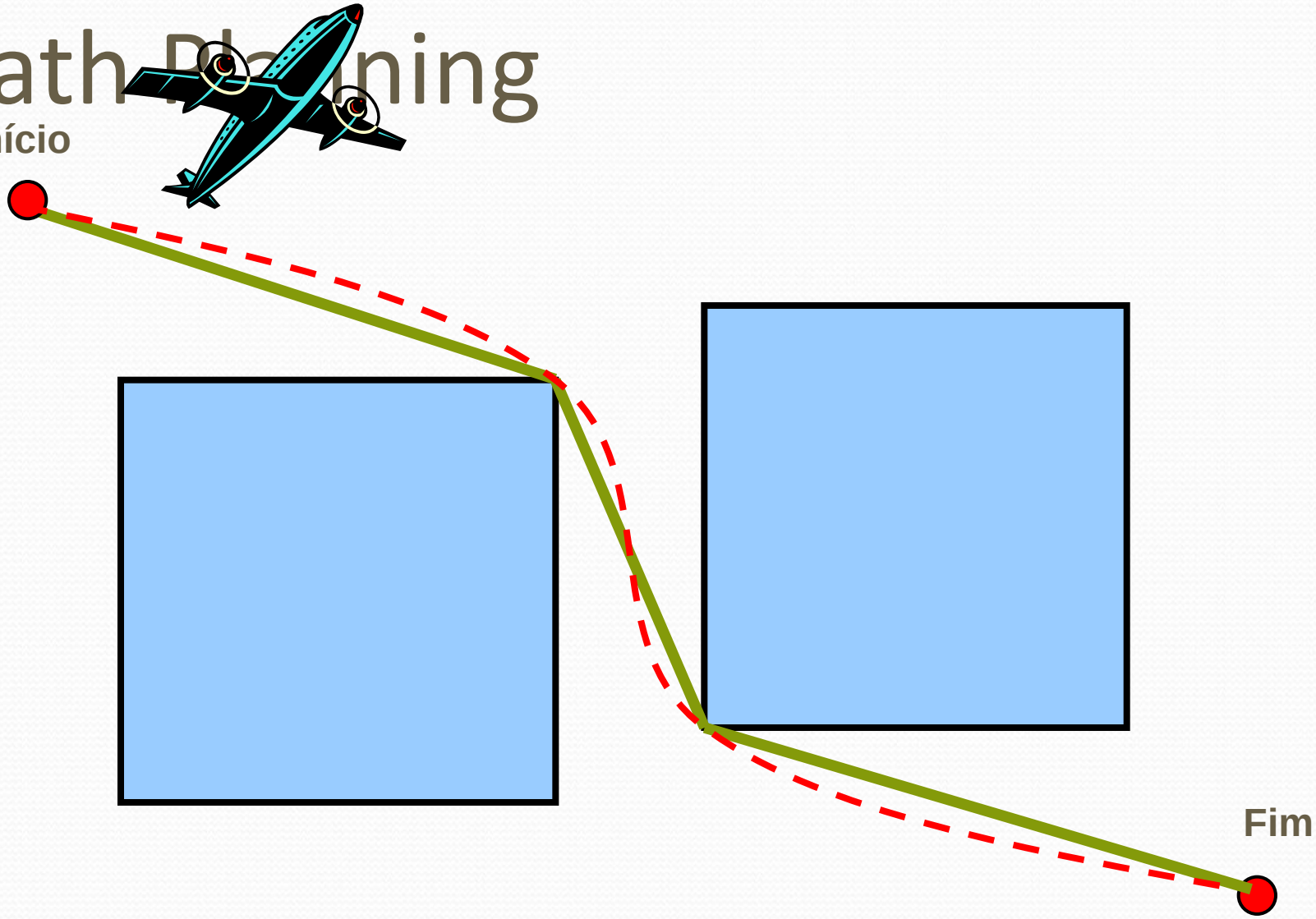
Grafo de Visibilidade + Algoritmo de Busca (Dijkstra, A*, etc)



Planejamento de Rota



Path Planning



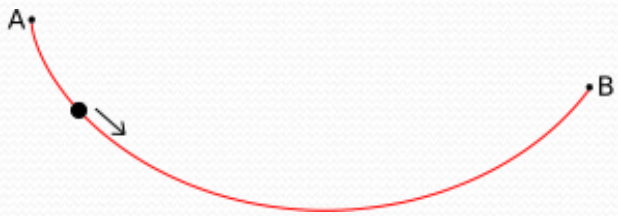
Kinodynamic Path Planning

- Veículos que executem uma trajetória em alta velocidade podem ter dificuldade para seguir a trajetória estabelecida.

- A dinânica do veículo precisa ser explicitamente considerada. Isso caracteriza o chamado *Kinodynamic path planning*.

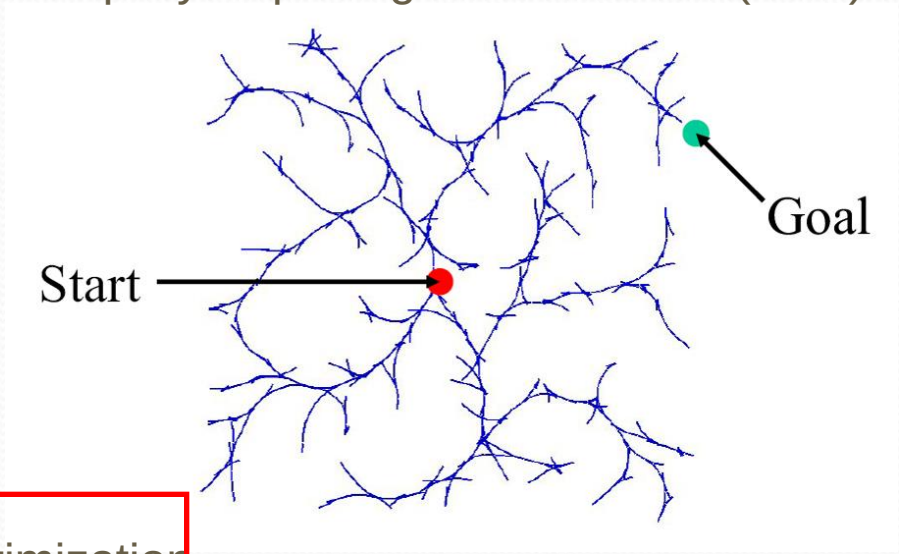
Kinodynamic Path Planning

Calculus of variations

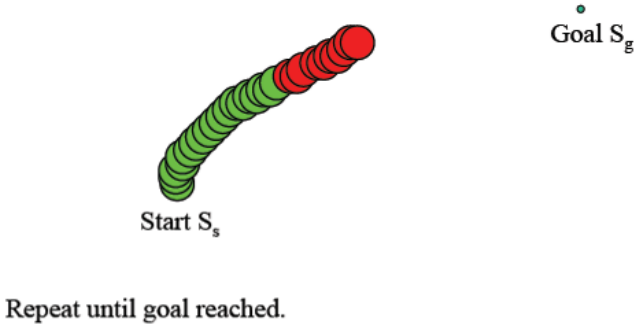


Brachistochrone curve

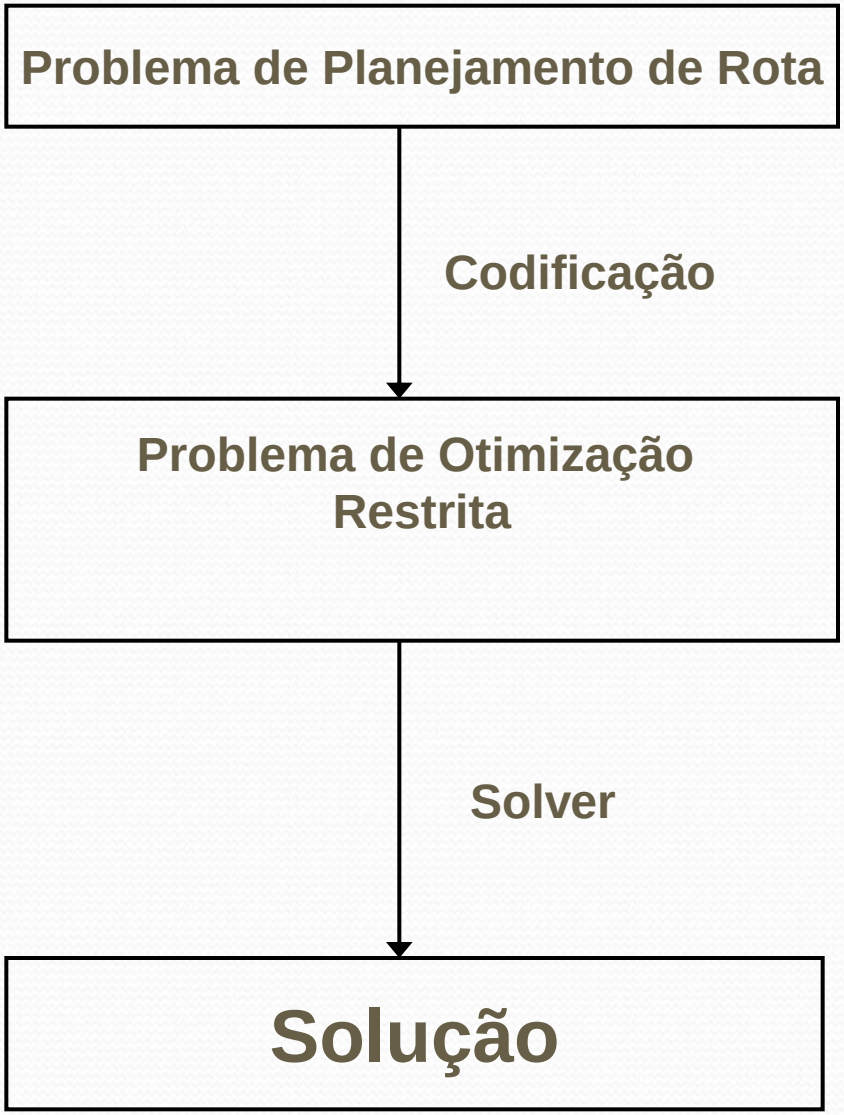
Rapidly-Exploring Random Tree (RRT)



Constrained Optimization



Abordagem para Planejamento de Rota



Abordagem para Planejamento de Rota

<u>Problema de Otimização</u>

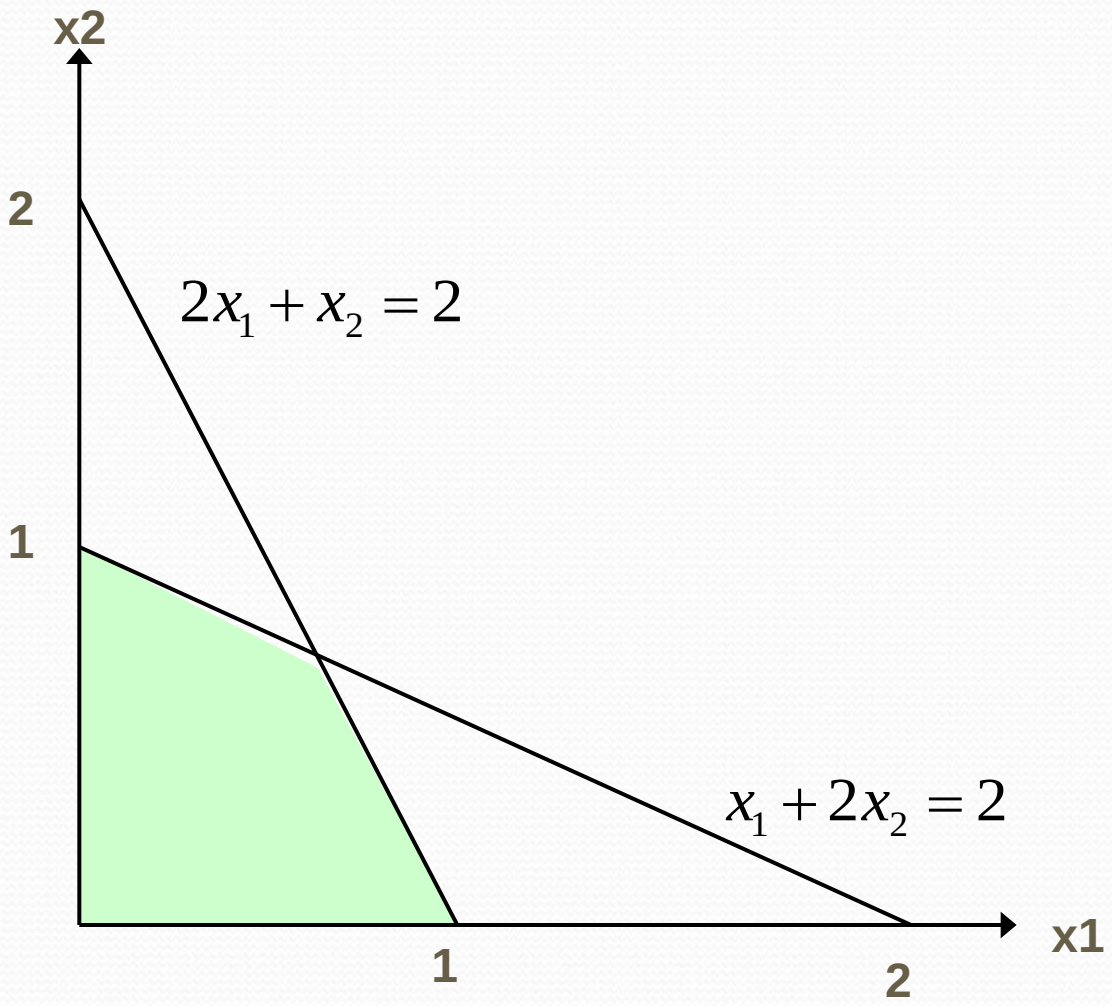
- Otimização Convexa
  - Programação geométrica
  - Otimização Canônica
    - Programação Linear
    - Programação Quadrática
    - …
  - Programação Não linear
- Otimização Não Converxa
  - Programação Inteira
  - Programação Inteira Mista
    - Programação Linear Inteira Mista
    - ….

Programação Linear (PL)

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

$$s.t. \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

Programação Linear (PL)



$$\min_{x_1, x_2} x_1 + x_2$$

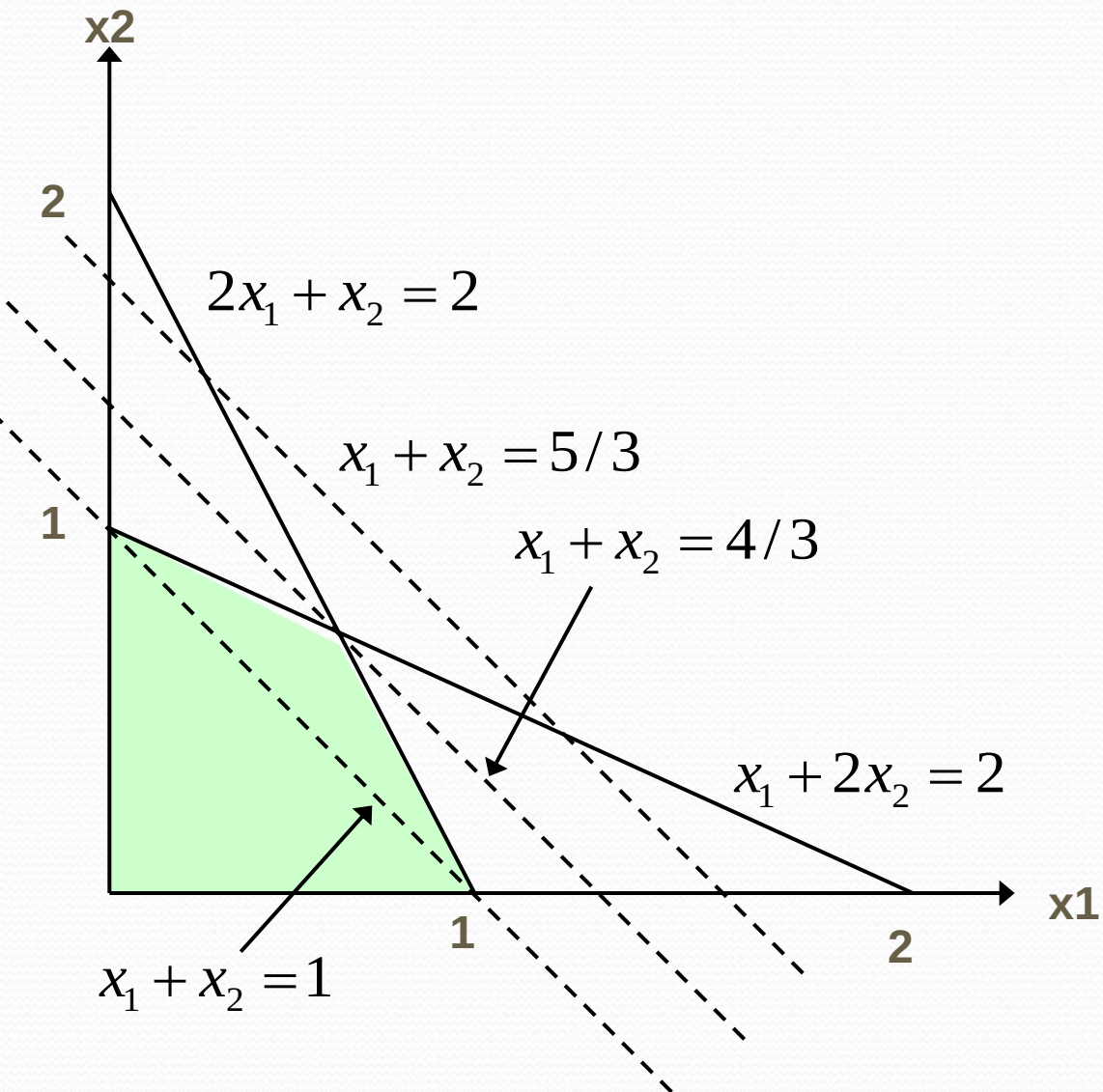
$$s.t.$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Programação Linear (PL)



$$\min_{x_1, x_2} x_1 + x_2$$

$$s.t.$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Solution: (2/3, 2/3)

Programação Linear

- Forma mais simples de otimização restrita.
- Aplicação em diversos problemas
  - Nutrição Animal
  - Operação de linhas aéreas
  - Planejamento de rotas
- Soluções obtidas em tempo polinomial
  - Algoritmo de Karmarkar (1984)
- Solver comercial disponível
  - ILOG CPLEX

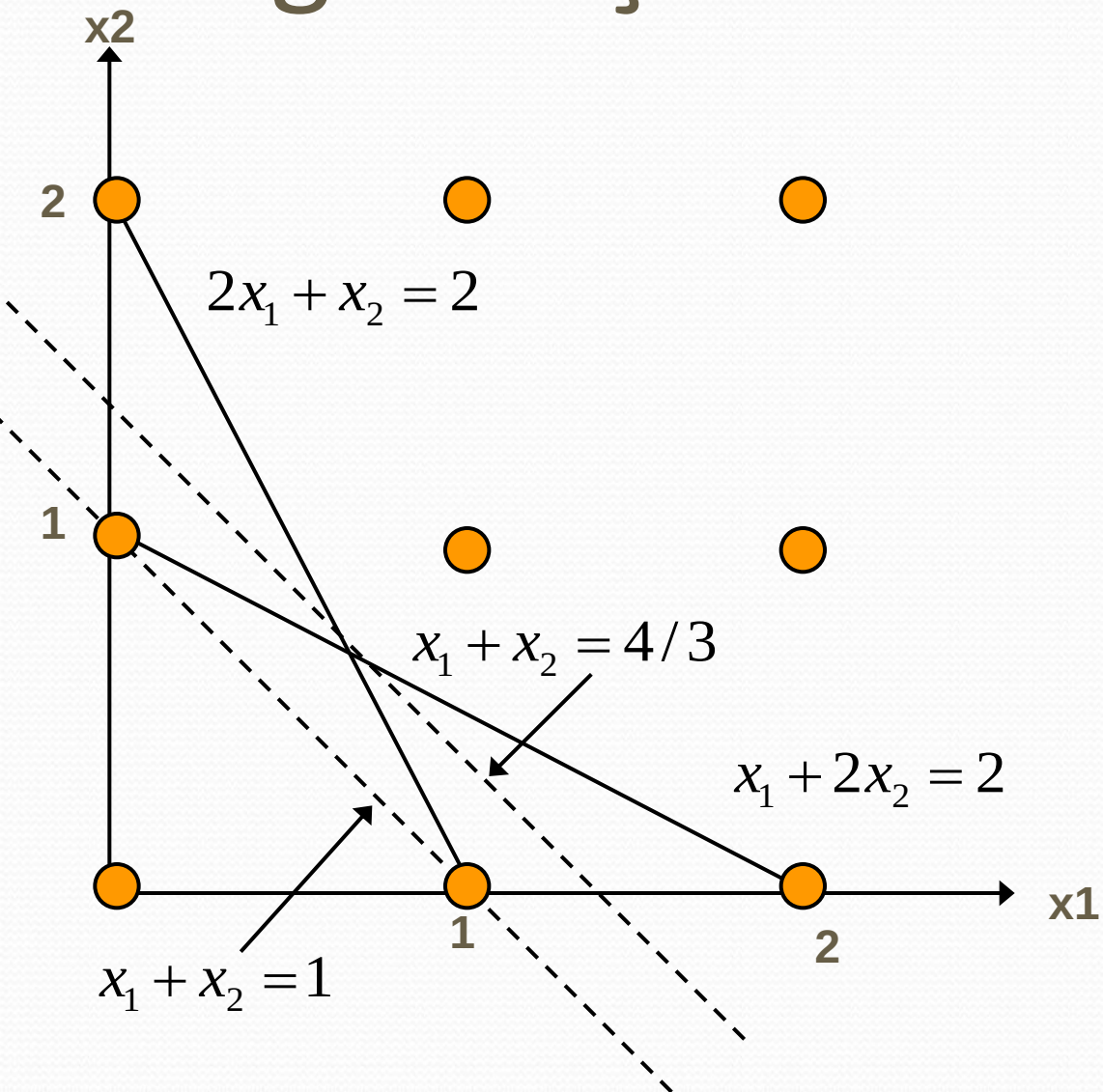
Programação Inteira (PI)

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}$$

$$s.t. \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

onde **x** é inteiro

Programação Inteira(PI)



$$\min_{x_1, x_2} x_1 + x_2$$

$$s.t.$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

x_1 e x_2 são inteiros

Solution: (1, 0) and (0,1)

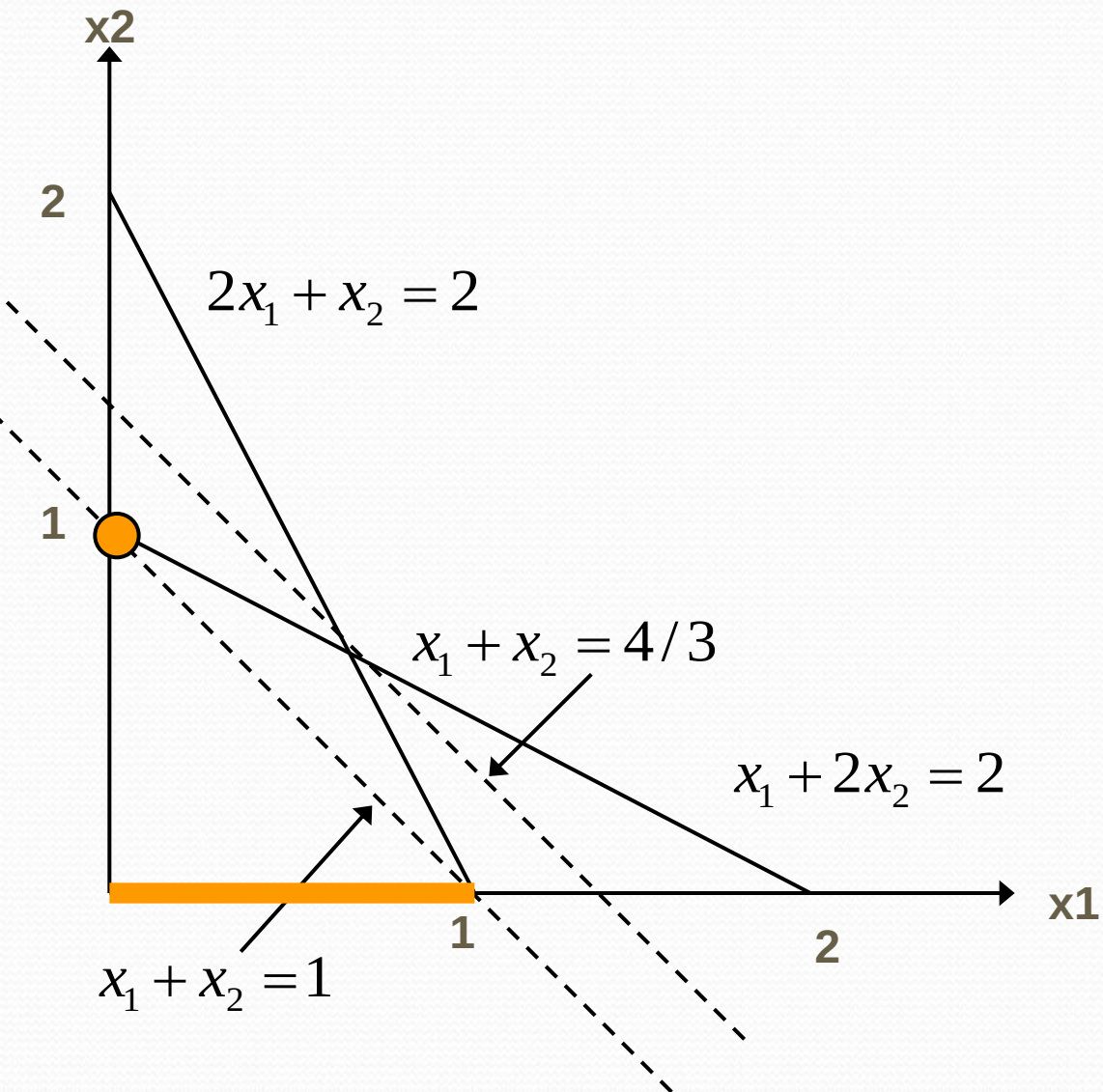
Programação Linear Inteira Mista (PLIM)

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}$$

$$s.t. \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

onde alguma componente de x é inteira

Programação Linear Inteira Mista (PLIM)



$$\min_{x_1, x_2} x_1 + x_2$$

$$s.t.$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

x_2 é inteira

Solution: (1, 0) and (0,1)

Programação Linear Inteira Mista (PLIM)

- Formulação geral: praticamente todo problema pode ser aproximado e formulado como um MILP
- Tempo exponencial para resolver:
  - Branch and bound
  - Exponencial no número de variáveis inteiras
- Solver comercial disponível
  - ILOG CPLEX

Exemplo

- Veículo autônomo em um cenário bidimensional

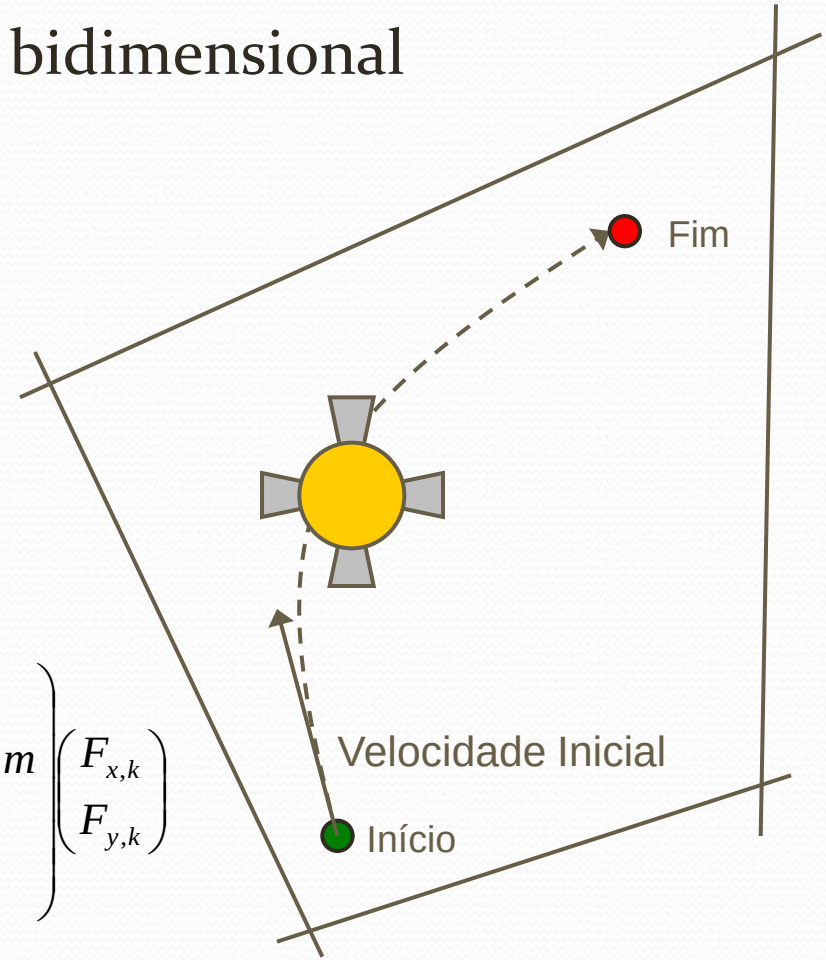
Dinâmicas

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_x\\ F_y\end{pmatrix}$$

$$|F_x|\le F_{\max},|F_y|\le F_{\max}$$ (Thrust limits)

Dinâmica discreta no tempo

$$\begin{pmatrix}x_{k+1}\\ y_{k+1}\\ \dot{x}_{k+1}\\ \dot{y}_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\Delta t&0\\ 0&1&0&\Delta t\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\\ \dot{x}_k\\ \dot{y}_k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.5\Delta t^2/m&0\\ 0&0.5\Delta t^2/m\\ \Delta t/m&0\\ 0&\Delta t/m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{x,k}\\ F_{y,k}\end{pmatrix}$$



$$\boxed{x_{t+1} = Ax_t + Bu_t}$$

Exemplo

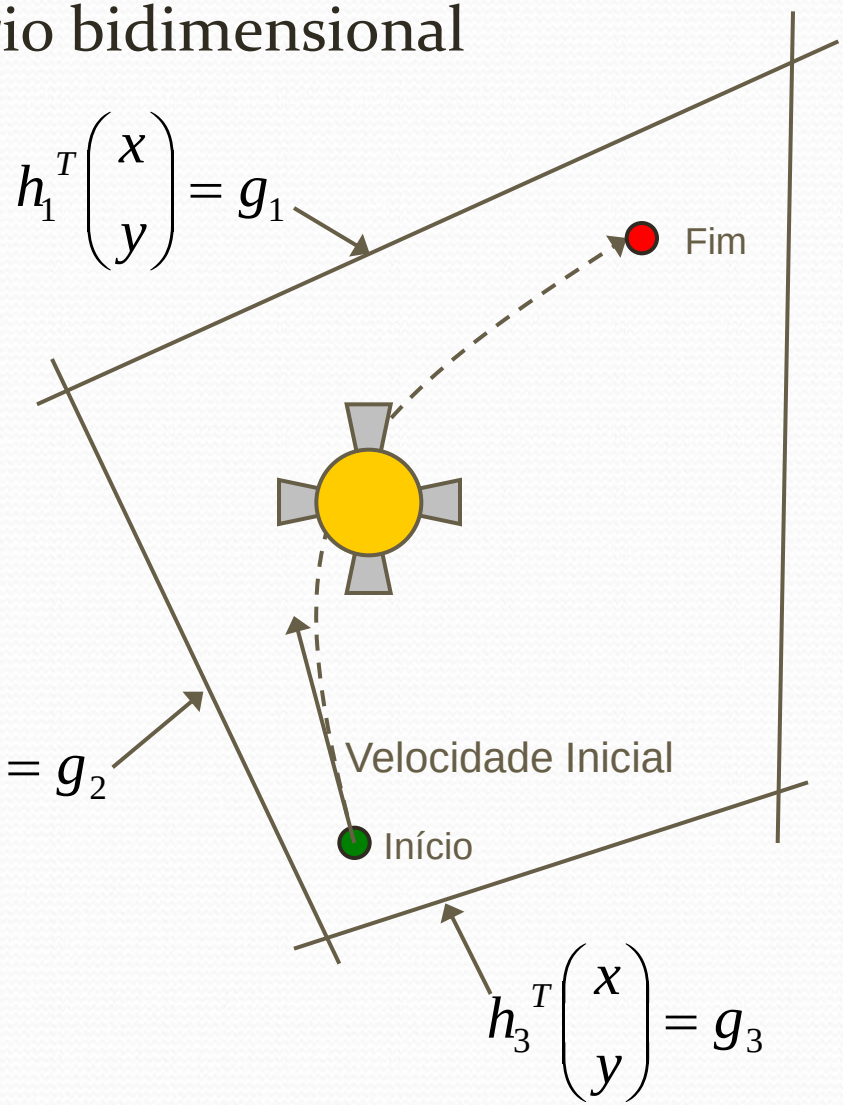
- Veículo autônomo em um cenário bidimensional

Restrições espaciais:
Veículo precisa estar dentro da região

$$\bigwedge_{n=1}^{4} h_n^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq g_n$$

or

$$\mathbf{Hx} \leq \mathbf{g}$$



Exemplo

- Formulação usando Programação Linear (LP)

$$\min_{\mathbf{x}_{1:N},\mathbf{u}_{1:N}} C(\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_N)$$ **Custo**

$$s.t.$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (k = 0,1,\cdots N-1)$$ **Dinâmicas**

$$\mathbf{H}\mathbf{x}_\mathbf{k} \leq \mathbf{g} \quad (k = 0,1,\cdots N)$$ **Restrições espaciais**

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{\text{start}}$$ **Posição inicial**

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_{\text{goal}}$$ **Posição final**

$$-\mathbf{u}_{\max} \leq \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}_{\max} \quad (k = 0,1,\cdots N-1)$$ **Limites de empuxo**

$$\mathbf{x}_k \equiv \begin{pmatrix} x_k & y_k & \dot{x}_k & \dot{y}_k \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{u}_k \equiv \begin{pmatrix} F_{x,k} & F_{y,k} \end{pmatrix}^T$$

Exemplo

- Qual função de custo utilizar?
  - Exemplo: mínimo esforço no controle

$$C(\mathbf{x_1}\cdots\mathbf{x}_N,\mathbf{u_1}\cdots\mathbf{u}_{N-1}) = \sum_{k=1}^{N-1}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\left|\mathbf{u}_k\right| = \sum_{k=1}^{N-1}\left|F_{x,k}\right| + \left|F_{y,k}\right|$$

  - Truques

$$\min|u| \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &\min u^+ + u^- \\ &u = u^+ - u^- \\ &u^+ \geq 0, u^- \geq 0, \end{aligned} \quad \textbf{ou} \quad \begin{aligned} &\min v \\ &v \geq u, v \geq -u, \end{aligned}$$

Receding Horizon Control

$$\min_{\mathbf{x}_{1:N},\mathbf{u}_{1:N}} C(\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_N)$$

$$s.t.$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (k = 0,1,\cdots N-1)$$

$$\mathbf{H}\mathbf{x}_\mathbf{k} \le \mathbf{g} \quad (k = 0,1,\cdots N)$$

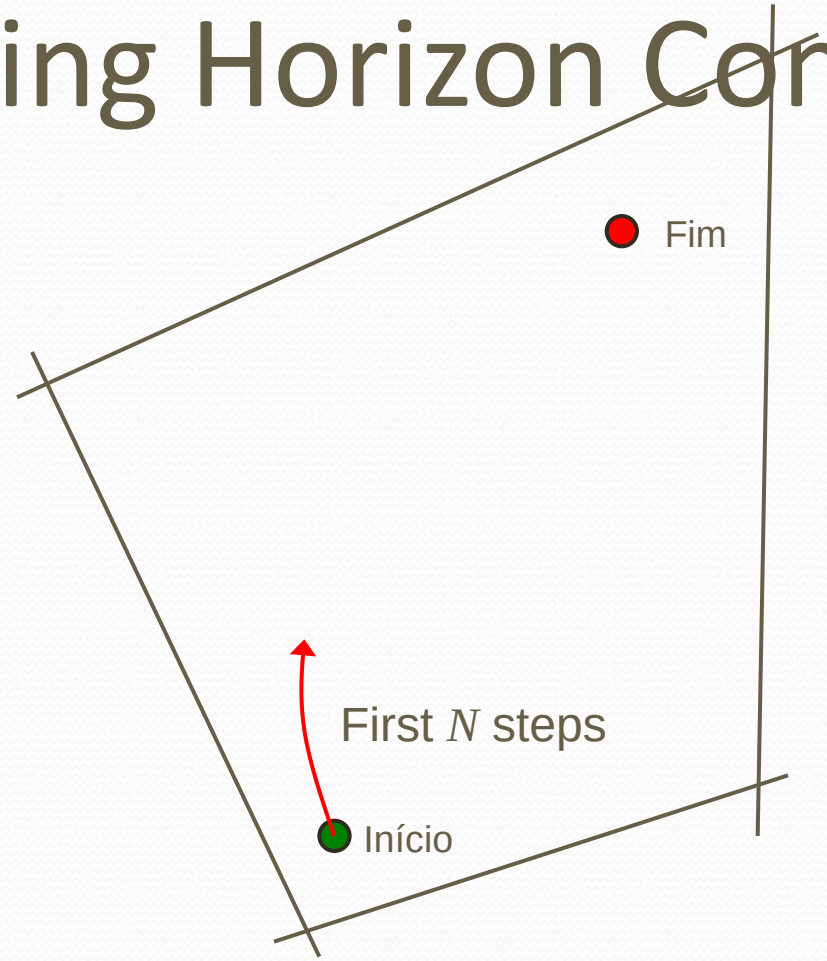
$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{\text{start}}$$

Não é uma boa ideia fixar N (horizonte de tempo)

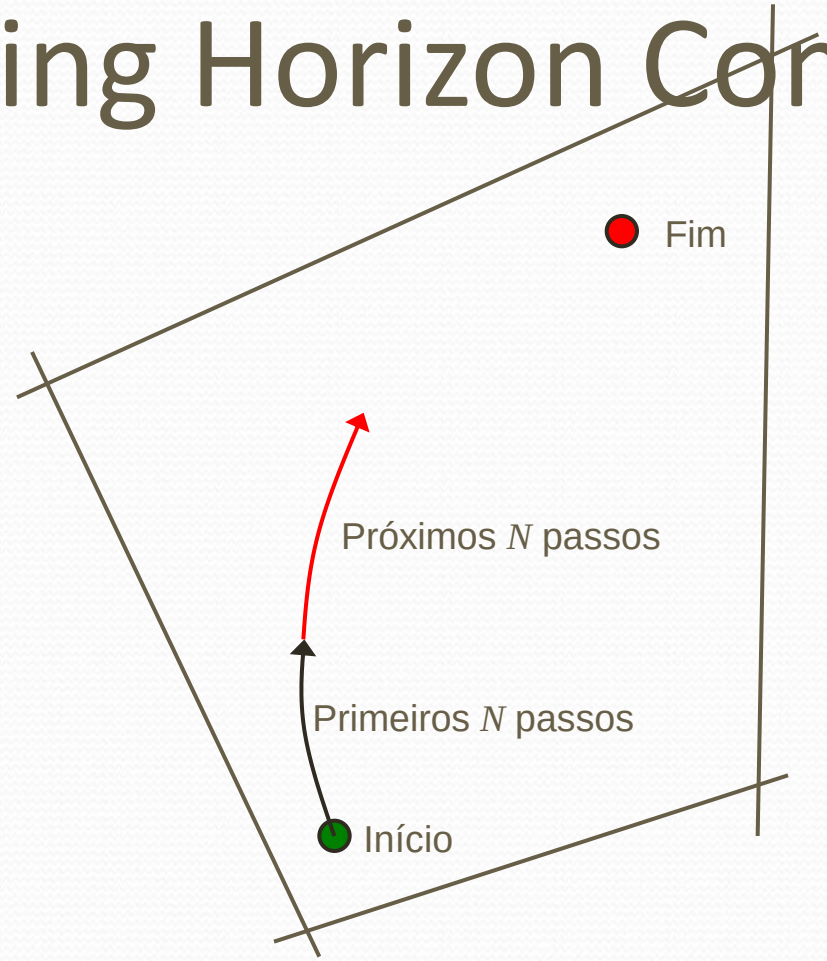
$$\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_{\text{goal}}$$

$$-\mathbf{u}_{\max} \le \mathbf{u}_k \le \mathbf{u}_{\max} \quad (k = 0,1,\cdots N-1)$$

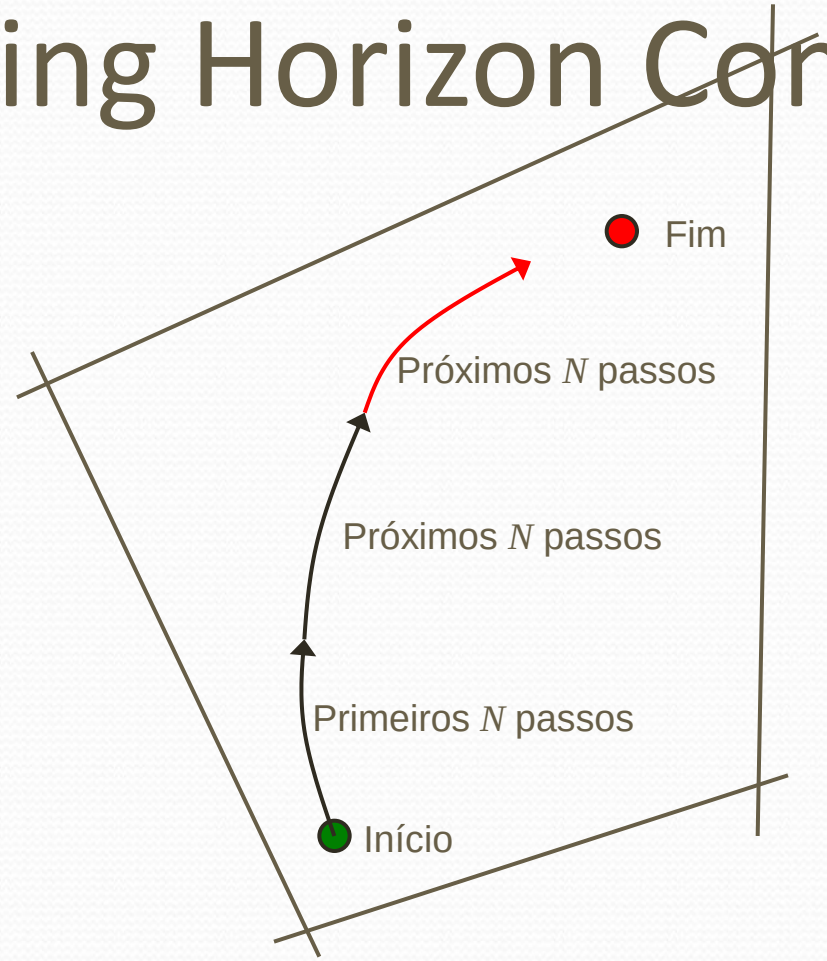
Receding Horizon Control



Receding Horizon Control



Receding Horizon Control (RHC)



RHC - Formulação Matemática

$$\min_{\mathbf{x}_{1:N},\mathbf{u}_{1:N}} C(\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_N) + \underline{f(\mathbf{x}_N)}$$

Custo

Custo para chegar ao fim

$$s.t.$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (k = 0,1,\cdots N-1)$$

Dinâmica

$$\mathbf{H}\mathbf{x}_\mathbf{k} \leq \mathbf{g} \quad (k = 0,1,\cdots N)$$

Restrições espaciais

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{\text{start}}$$

Posição e velocidade iniciais

$$\cancel{\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_{\text{goal}}}$$

Posição e velocidade finais

$$-\mathbf{u}_{\max} \leq \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}_{\max} \quad (k = 0,1,\cdots N-1)$$

Limites de empuxo

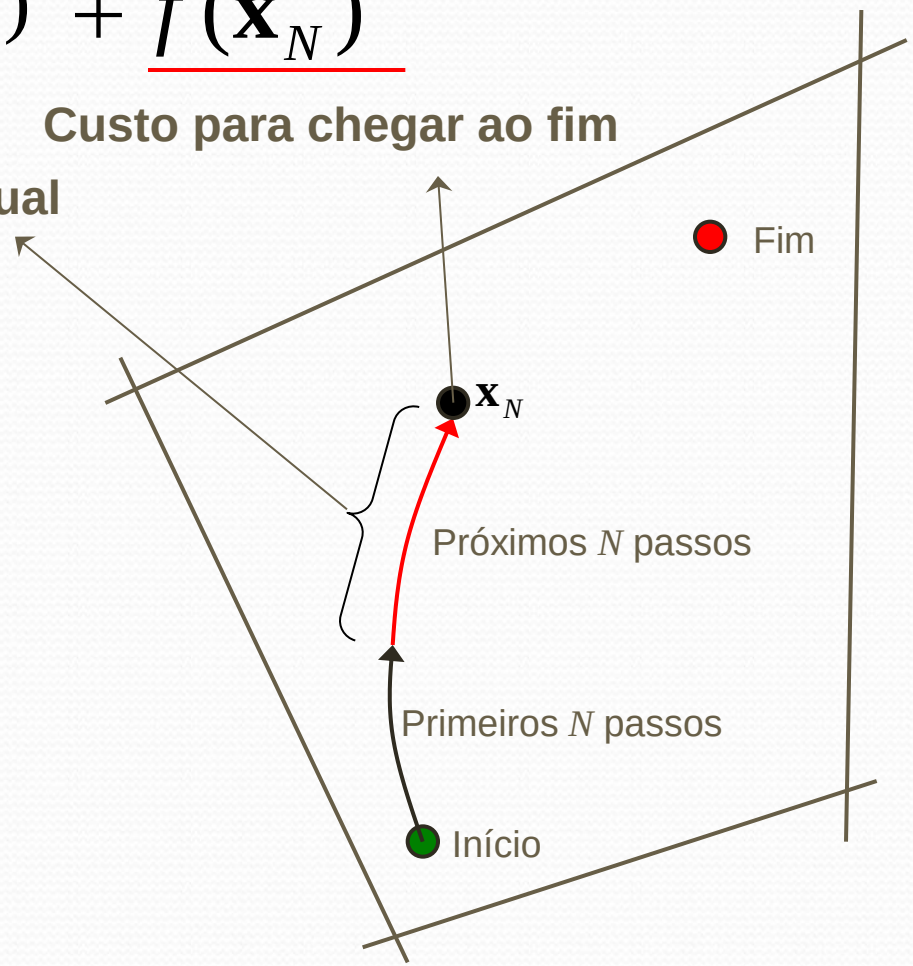
$$\mathbf{x}_k \equiv \begin{pmatrix} x_k & y_k & \dot{x}_k & \dot{y}_k \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{u}_k \equiv \begin{pmatrix} F_{x,k} & F_{y,k} \end{pmatrix}^T$$

RHC - Custo para chegar ao fim

Estimativa do custo do estado final ao Fim

$$\min_{\mathbf{x}_{1:N},\mathbf{u}_{1:N}} \underbrace{J(\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_N)}_{\text{Função de custo}} + \underbrace{f(\mathbf{x}_N)}_{\text{Custo para chegar ao fim}}$$

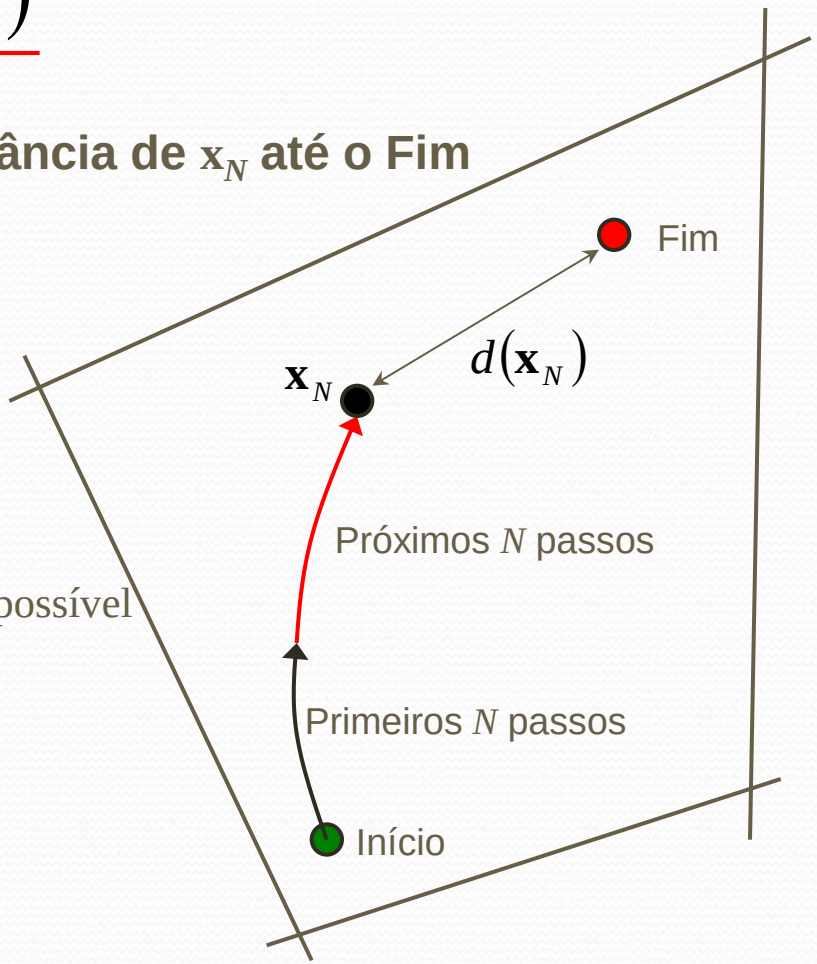
= custo do segmento de rota atual



- Custo para chegar ao fim guia a rota até o fim.
- Similar a função heurística do algoritmos A*.

RHC - Custo para chegar ao fim

$$\min_{\mathbf{x}_{1:N},\mathbf{u}_{1:N}} \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T \left|\mathbf{u}_k\right|}_{\text{Esforço de controle ao longo da rota}} + c \cdot \underbrace{d\left(\mathbf{x}_N\right)}_{\text{Distância de } \mathbf{x}_N \text{ até o Fim}}$$



c: peso relativo entre esforço de controle e distância

c=0 : veículo não se move

c=+infinity : veículo se direciona ao Fim o mais rápido possível

RHC - Aproximação do Cálculo da Distância

- Problema:

$$d(\mathbf{x}_N) = \sqrt{(x_N - x_{Goal})^2 + (y_N - y_{Goal})^2} \longleftarrow$$

Não Linear!!!

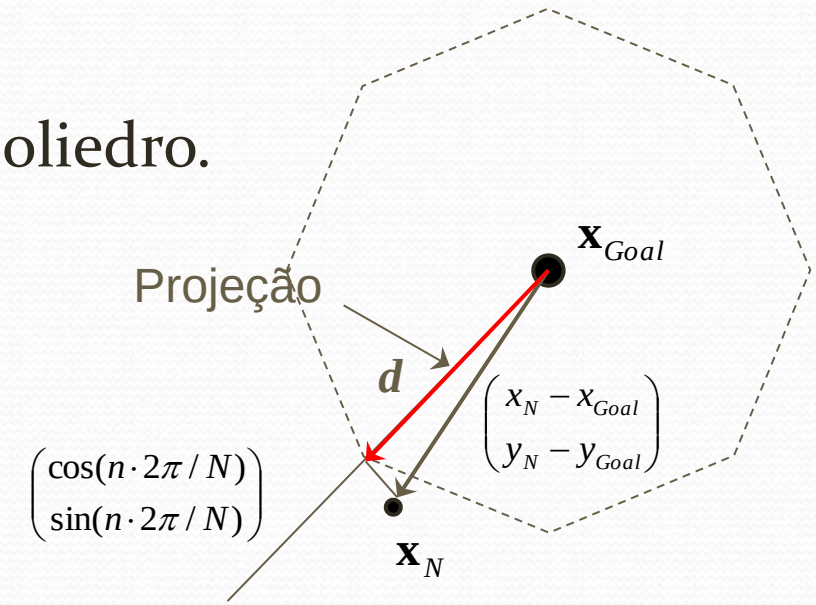
- Truque.
  - Ideia: aproximar o círculo pelo poliedro.

$$\min \sqrt{(x_N - x_{Goal})^2 + (y_N - y_{Goal})^2}$$

Aproximação

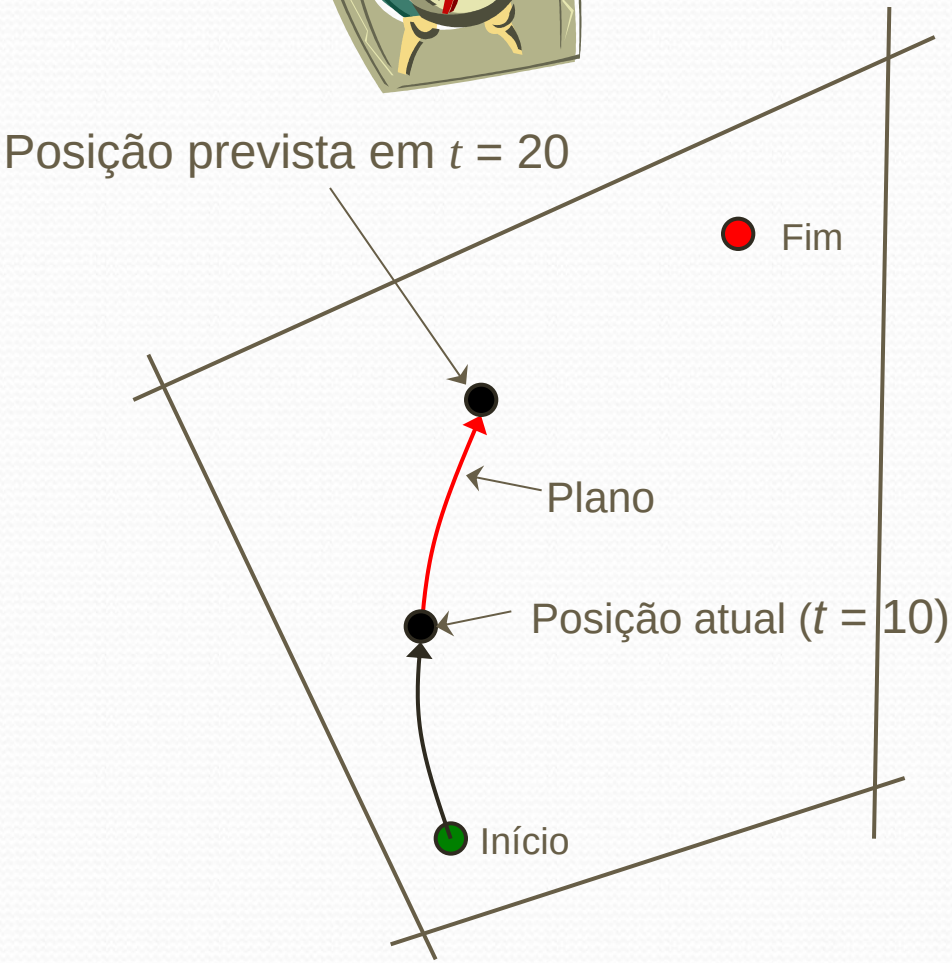
$$\min d$$

$$d \geq \begin{pmatrix} \cos(n \cdot 2\pi / N) \\ \sin(n \cdot 2\pi / N) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_N - x_{Goal} \\ y_N - y_{Goal} \end{pmatrix} \qquad (n = 1, 2, \cdots N)$$



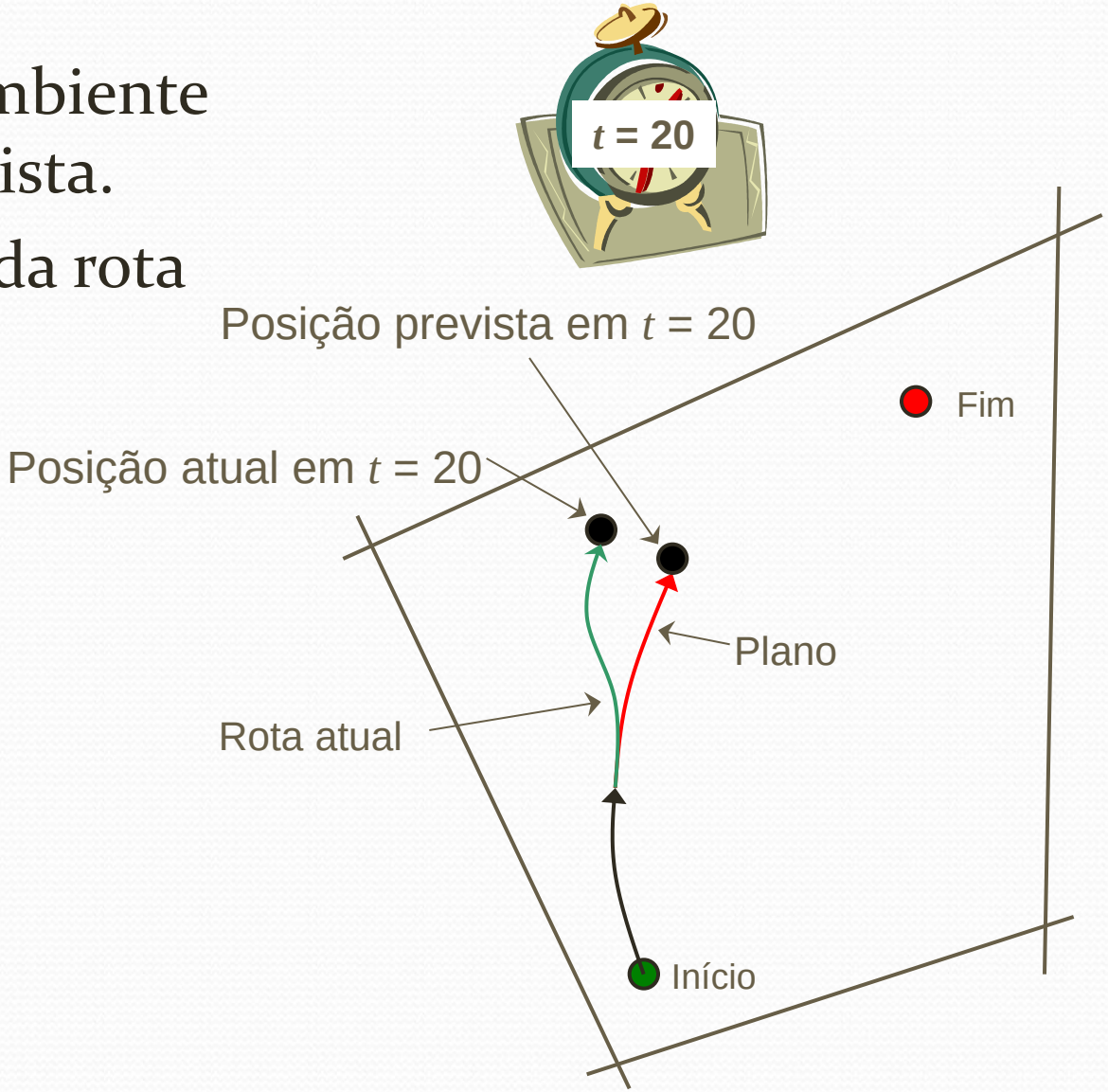
Exemplo RHC

- 10 segundos depois....



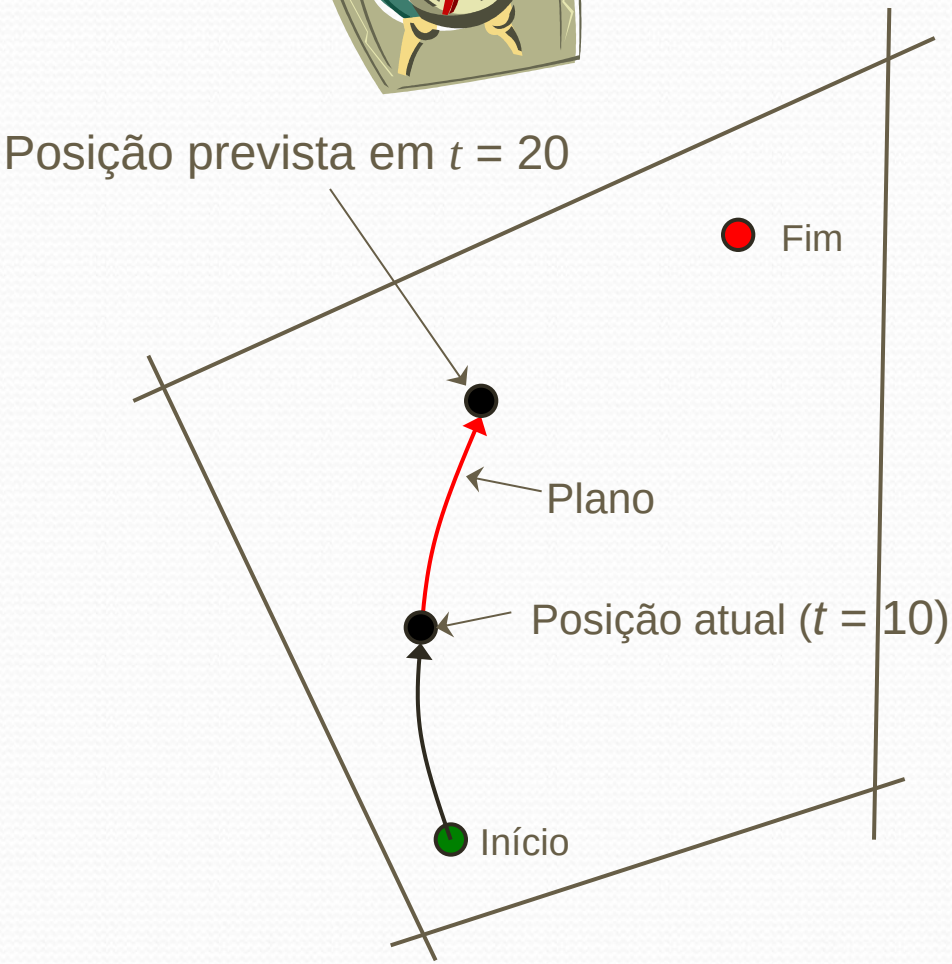
Exemplo RHC

- As incertezas do ambiente alteram a rota prevista.
- A rota atual difere da rota planejada



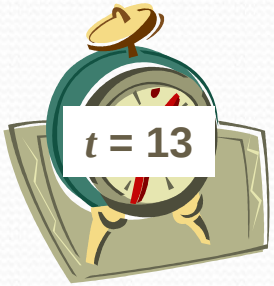
Horizonte de Planejamento > Horizonte de Execução

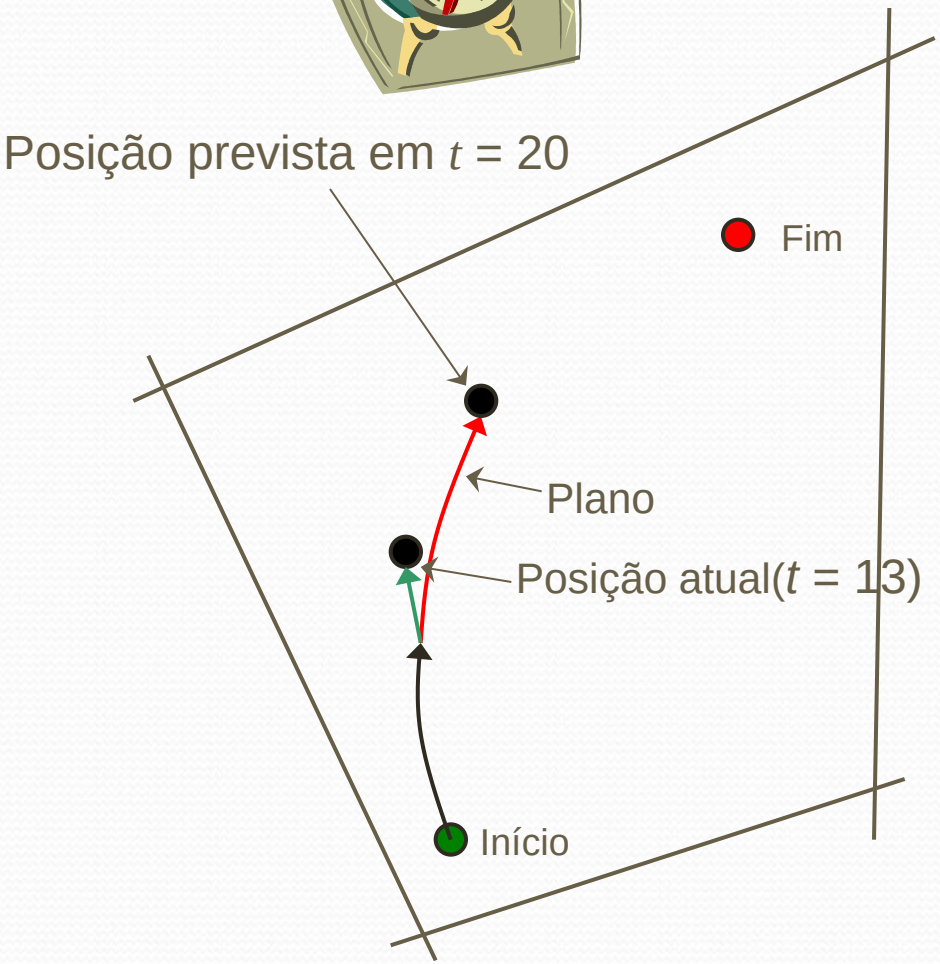
- 3 segundos mais tarde....



Horizonte de Planejamento > Horizonte de Execução

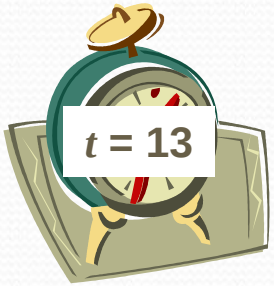
- 3 segundos mais tarde....
- Um pouco distante da rota planejada

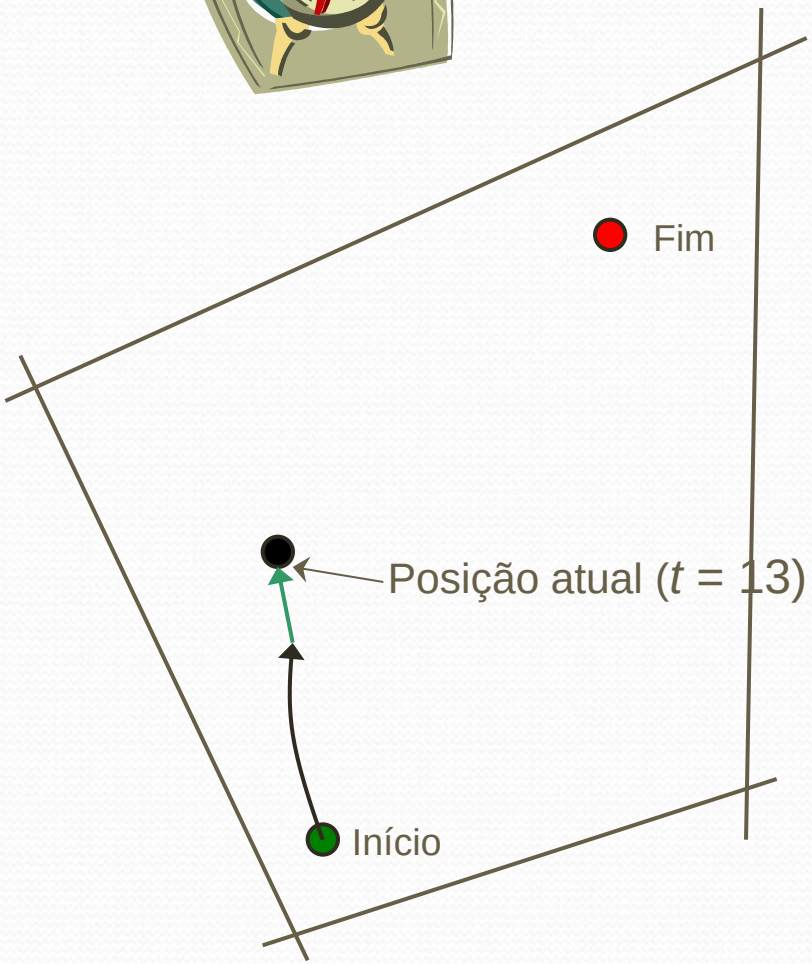




Horizonte de Planejamento > Horizonte de Execução

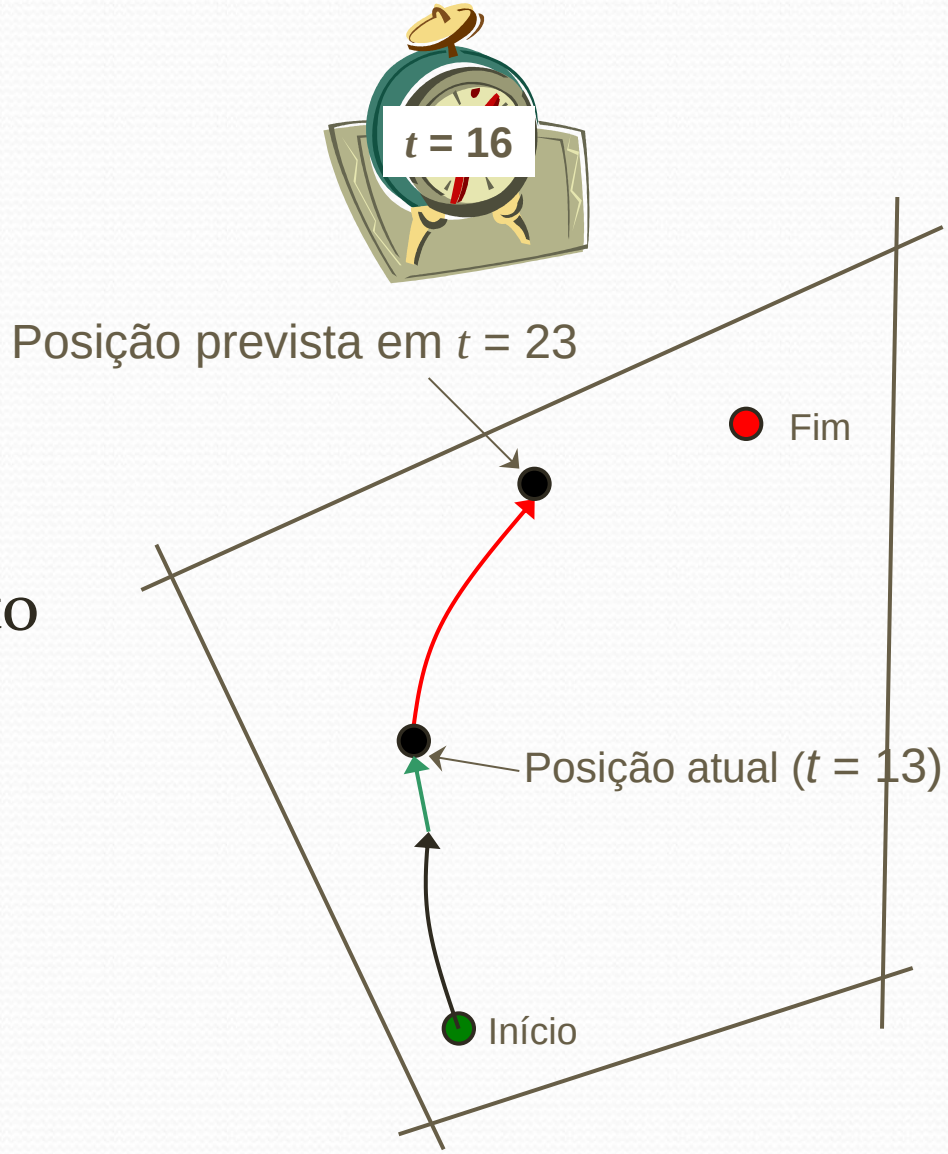
- Abandona o plano depois de t = 14





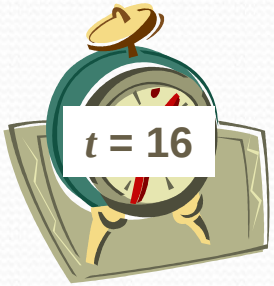
Horizonte de Planejamento > Horizonte de Execução

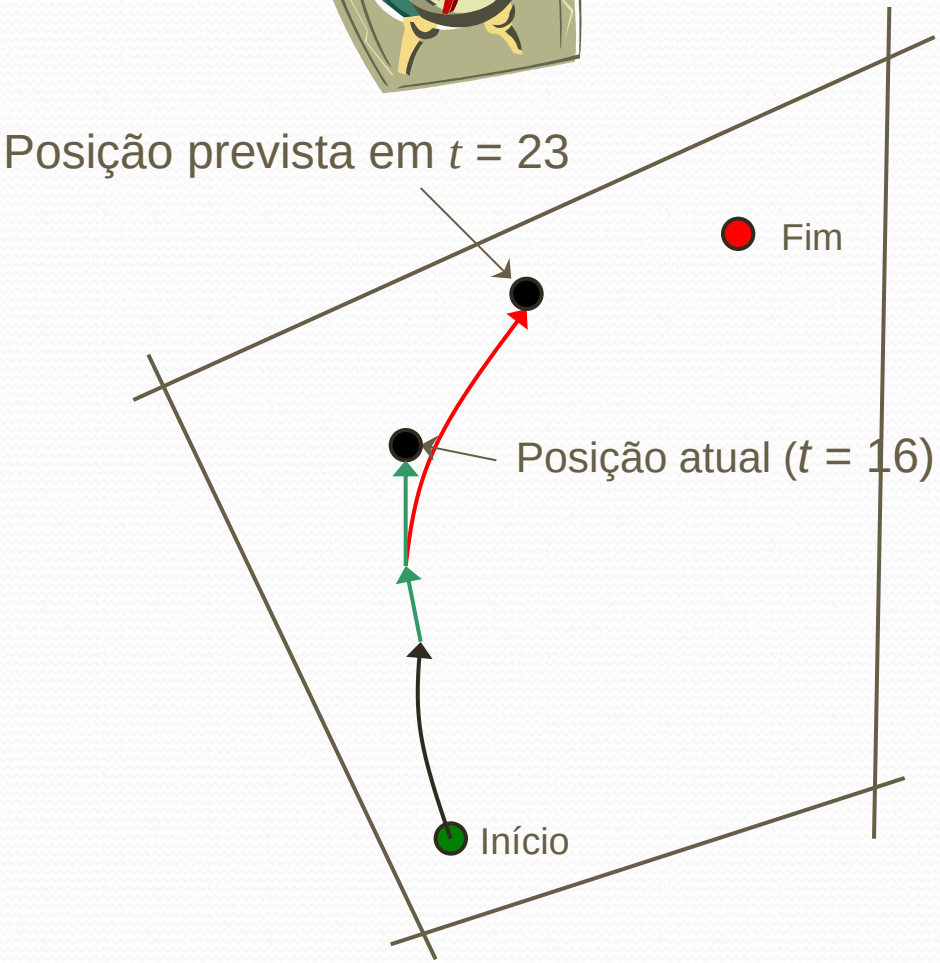
- Abandona o plano depois de t = 14
- Replaneja para outro horizonte de planejamento



Horizonte de Planejamento > Horizonte de Execução

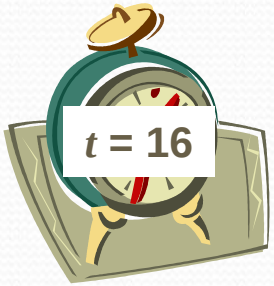
- 3 segundos mais tarde...

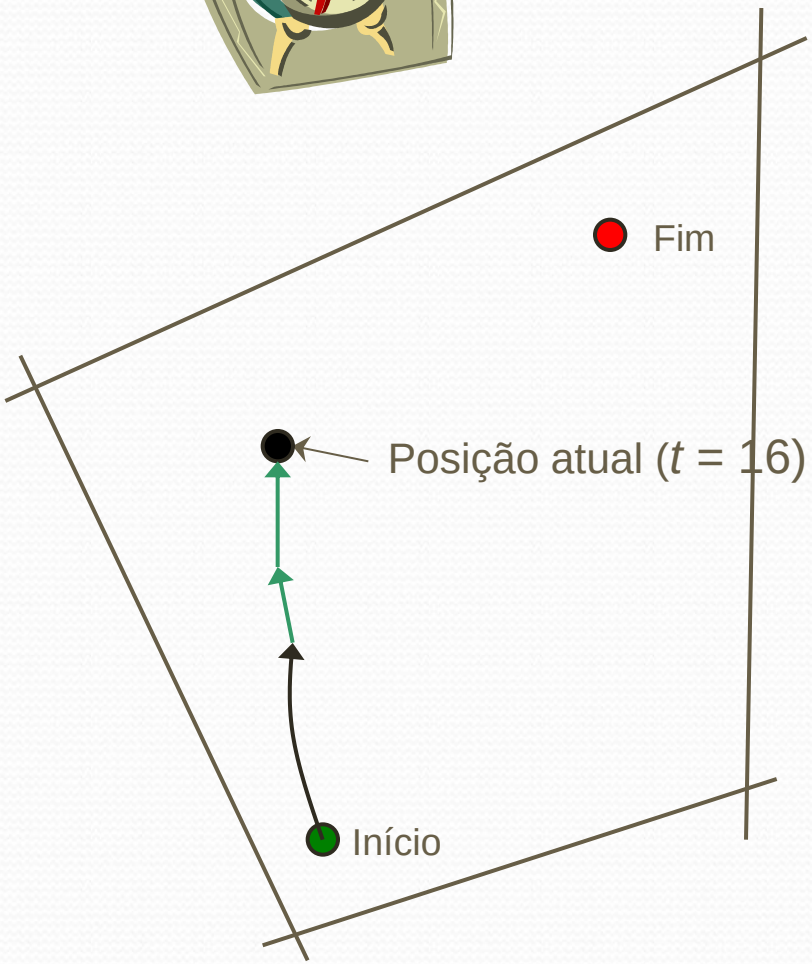




Horizonte de Planejamento > Horizonte de Execução

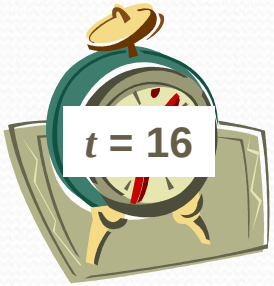
- 3 segundos mais tarde...
- Abandona o plano após t = 17

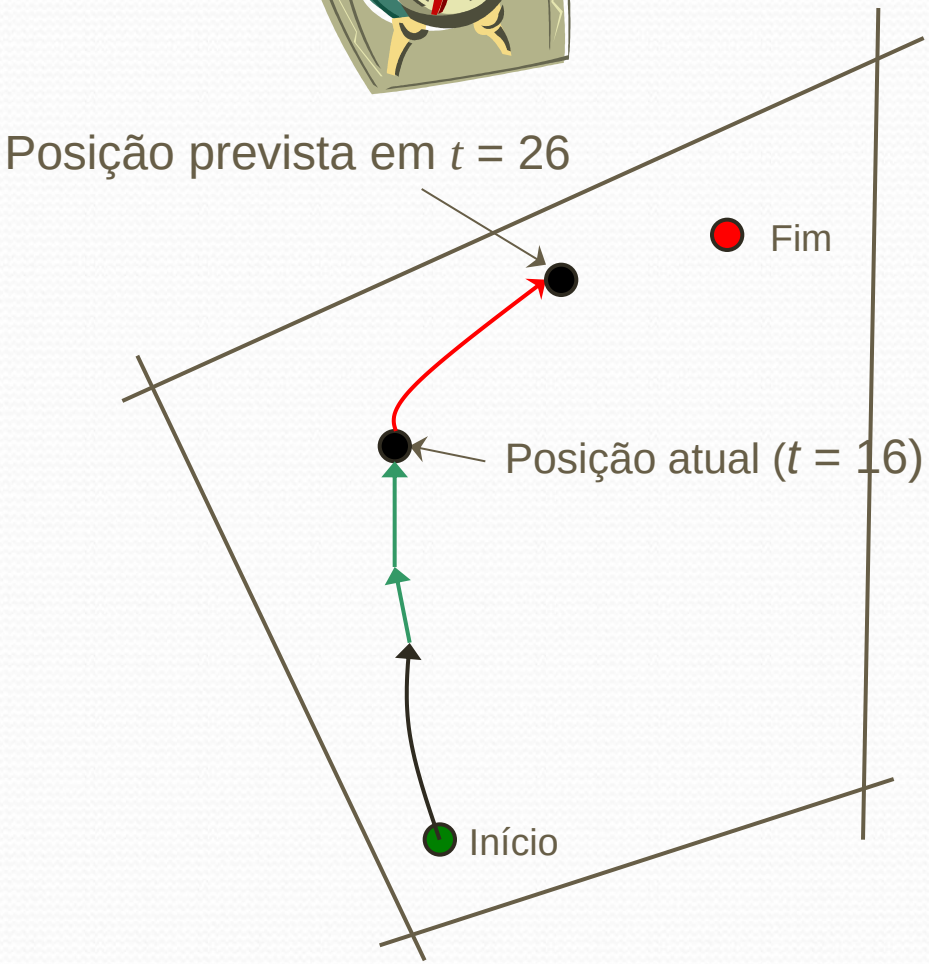




Horizonte de Planejamento > Horizonte de Execução

- 3 segundos mais tarde...
- Abandona o plano após t = 17
- Replaneja rota

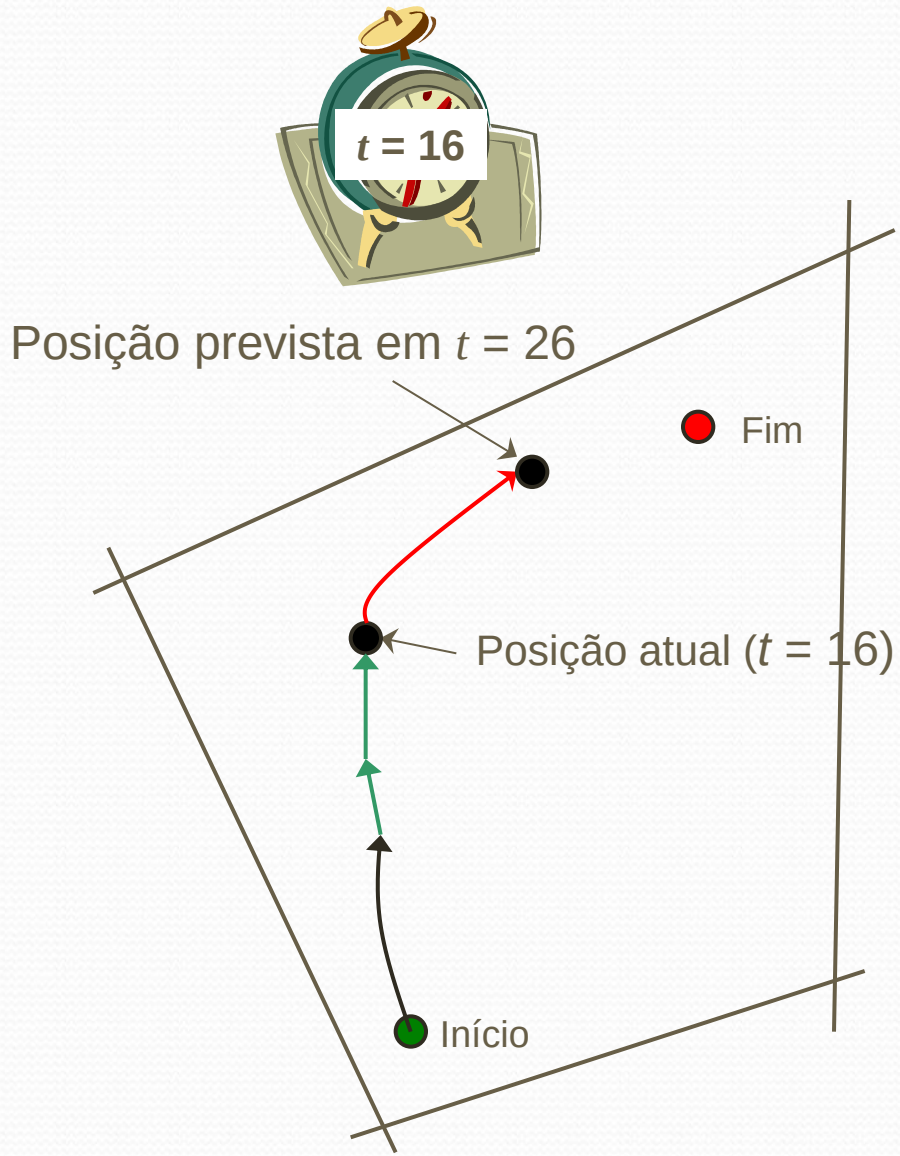




Horizonte de Planejamento > Horizonte de Execução

- Horizonte de planejamento: 10seg
- Horizonte de execução: 3seg
- (Horizonte de planejamento > horizonte de execução) para lidar com incertezas.

- Sempre, horizonte de execução = 1 passo



- Qual a necessidade de fazer um planejamento que nunca será executado??

- Resposta: Planejador usa a predição futura tal que o plano na próxima janela de tempo seja consistente com o plano em execução.

MPC = **M**odel **P**redictive **C**ontrol

(Constrained optimization + Receding horizon)