Matemática para Economia
Les 201

Aulas 24 e 25
Otimização Condicionada

Márcia Azanha Ferraz Dias de Moraes

25 e 31/10/2016

Otimização Condicionada (com restrição)

Otimização Não Condicionada:

- Métodos de otimização dos extremos relativos da função objetivo:
  - Todas as variáveis independentes entre si
  - A escolha de certa variável não afetava as demais
- Ex: uma firma pode escolher as quantidades produzidas Q_1 e Q_2
- A decisão sobre quanto produzir de Q_1 não afeta quanto produzir de Q_2

Otimização Condicionada – 2 Variáveis

Suponha que a firma deve obedecer dada cota de produção: $Q_T = Q_1 + Q_2 = 950$

- Perde-se a independência das variáveis
- A decisão sobre as quantidades a serem produzidas de Q_1 e de Q_2 são simultâneas e dependem uma da outra:

Quanto > Q_1, < deve ser Q_2

para manter a cota $Q_T = Q_1 + Q_2 = 950$

⇒ (Q_1,Q_2): ponto de *ÓTIMO CONDICIONADO*

Otimização Condicionada – 2 Variáveis

Ex: Consumidor deseja maximizar sua Utilidade

Função Utilidade: $U = x_1x_2 + 2x_1$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = x_2 + 2 \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = x_1$$

- As utilidades marginais são positivas para todos os valores de x_1 e x_2
- A função não possui ponto de máximo: para que U seja maximizada, o consumidor deve consumir quantidades infinitas do bem
- Resultado de pouca utilidade prática

Otimização Condicionada – 2 Variáveis

Para que o resultado tenha utilidade prática: deve ser considerada a *restrição orçamentária* do consumidor

Suponha que o consumidor deseja gastar R$ 60,00 com os 2 bens:

Se os preços são: $P_1 = 4$ e $P_2 = 2$, a restrição orçamentária pode ser representada pela equação:

→ Esta restrição impõe dependência mútua entre as quantidades de x_1 e x_2 que maximizam a utilidade

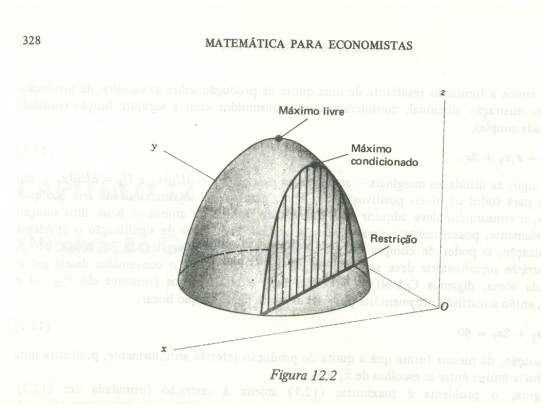
Otimização Condicionada – 2 Variáveis

O problema fica:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & U = x_1x_2 + 2x_1 \\ \text{Sujeito a:} & 4x_1 + 2x_2 = 60 \end{array}$$

Matematicamente:

- o efeito é reduzir o domínio e o contradomínio da função objetivo
- Valor Máximo Condicionado ≤ Valor Máximo não Condicionado
- Valor Mínimo Condicionado ≥ Valor Mínimo não Condicionado



Otimização Condicionada – 2 Variáveis

Resolução do problema:

Maximizar $U = x_1x_2 + 2x_1$ (1)

Sujeito a: $4x_1 + 2x_2 = 60$ (2)

a) Pode-se fazer por substituição:

Da equação (2): $2x_2 = 60 - 4x_1$ *ou* $x_2 = 30 - 2x_1$

Substitui na equação (1) e resolve como antes:

Otimização Condicionada – 2 Variáveis

Quando:

- A restrição é função complicada
- Existem várias restrições

→ Técnica de substituição e eliminação de variáveis torna-se complicada

⇓

Usa-se o método do ***Multiplicador de Lagrange***

(válido somente para restrições em forma de igualdade)

Otimização Condicionada – 2 Variáveis
Multiplicador de Lagrange

Essência do Método:

→ transformar um problema de máximo condicionado em uma forma tal que a CPO para o extremo não condicionado possa ser usado

→ escreve-se a *FUNÇÃO DE LAGRANGE* (versão modificada da função objetivo) que *INCORPORA* a restrição

Otimização Condicionada – 2 Variáveis
Multiplicador de Lagrange

Do exemplo anterior:

Maximizar $U = x_1x_2 + 2x_1$ (1)

Sujeito a: $4x_1 + 2x_2 = 60$ (2)

Função Lagrange:

$$Z = x_1x_2 + 2x_1 + \lambda(60 - 4x_1 - 2x_2)$$

Multiplicador de Lagrange

Note que:

→ Quando $4x_1 + 2x_2 = 60$, o novo termo se anula (independente do valor de λ)

→ então: $Z = U$ (Z fica = à função objetivo original)

Otimização Condicionada – 2 Variáveis
Multiplicador de Lagrange

- A função objetivo Z, ou seja, a função de Lagrange, não tem restrição
- Problema torna-se:
  - achar o máximo NÃO CONDICIONADO DE Z, AO INVÉS DO MÁXIMO CONDICIONADO DE U

Questão: como anular a expressão entre parêntesis

$$\lambda(60 - 4x_1 - 2x_2)$$

⇓

Tratar λ como uma variável adicional

Otimização Condicionada – 2 Variáveis

Multiplicador de Lagrange

$$Z = Z(\lambda, x_1, x_2)$$

$$Z = x_1x_2 + 2x_1 + \lambda(60 - 4x_1 - 2x_2)$$

CPO:

Solução: resolver conjunto de equações simultâneas

Otimização Condicionada – 2 Variáveis

Solução:

Otimização Condicionada 2 Variáveis

Otimização Condicionada – 2 Variáveis

Generalizando:

Dada a função objetivo: $f = f(x,y)$ (1)

Sujeita à restrição: $g(x,y) = c$ (2)

onde c é uma constante, pode-se escrever a função de Lagrange:

$$Z = f(x,y) + \lambda(c - g(x,y)) \quad (3)$$

Para achar os extremos da função de $Z = f(x,y,\lambda)$:

CPO:

$$Z_\lambda = c - g(x,y) = 0 \quad (4)$$

$$Z_x = f_x - \lambda g_x = 0 \quad (5)$$

$$Z_y = f_y - \lambda g_y = 0 \quad (6)$$

Otimização Condicionada – 2 Variáveis

Note que:

1. A equação (4) é a equação (2) reformulada
2. Os valores estacionários de (4) satisfazem também a equação (2), que é a restrição da função objetivo original
3. Como a expressão $\lambda(c - g(x,y)$ é igual a zero para todos os valores estacionários, os *valores estacionarios de Z (equação 3) tem que ser idênticos aos da equação (1) sujeita à restrição (2).*

Otimização Condicionada – 2 Variáveis

Exemplos: (1) Achar os valores extremos de:

$$z(x,y) = xy$$

Sujeito a: $x + y = 6$

Otimização Condicionada – 2 Variáveis

Exemplos: (2) Achar os valores extremos de:

$$z = x_1^2 + x_2^2$$

Sujeito a: $x_1 + 4x_2 = 2$

Otimização Condicionada – 2 Variáveis

Condições de 2a. Ordem: DETERMINANTE HESSIANO ORLADO

É possível expressar as CSO em forma de determinante

Não Condicionada	**Condicionada**
Hessiano $\lvert H \rvert = \begin{vmatrix} fxx & fyx \\ fxy & fyy \end{vmatrix}$ (H1, H2) $H_1 < 0,\ H_2 > 0 \longrightarrow$ Máximo $H_1 > 0,\ H_2 > 0 \longrightarrow$ Mínimo	Hessiano Orlado $\lvert \overline{H} \rvert$

Otimização Condicionada – 2 Variáveis

(i) Hessiano Orlado: Caso de 2 Variáveis e 1 Restrição

$$Z = f(x,y) + \lambda\,(c - g(x,y))$$

O Hessiano Orlado é:

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & Z_{xx} & Z_{xy} \\ g_y & Z_{yx} & Z_{yy} \end{vmatrix}$$

Otimização Condicionada – 2 Variáveis

(i) Caso de 2 Variáveis e 1 Restrição

$$Z = f(x,y) + \lambda\,(c - g(x,y))$$

$$\lvert H_2 \rvert = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & Z_{xx} & Z_{xy} \\ g_y & Z_{yx} & Z_{yy} \end{vmatrix}$$

OBS: ORDEMETERMINANTE $\lvert H_2 \rvert$: 3x3

- Máximo: $\lvert H_2 \rvert > 0$ Mínimo: $\lvert H_2 \rvert < 0$
- Todas as derivadas calculadas nos pontos críticos (x,y) (encontrados na CPO)
- Para 1 restrição, a ordem do determinante será n + 1

Otimização Condicionada – 2 Variáveis

(i) Caso de 2 Variáveis e 1 Restrição - CSO - (exemplos anteriores):

$$z = xy$$

Sujeito a: $x + y = 6$

Otimização Condicionada – 2 Variáveis

(i) Caso de 2 Variáveis e 1 Restrição- CSO - (exemplos anteriores):

$$z = x_1^2 + x_2^2$$

Sujeito a: $x_1 + 4x_2 = 2$

Otimização Condicionada – 2 Variáveis

(i) Caso de 2 Variáveis e 1 Restrição – Exemplo econômico

Ex: Uma fábrica produz dois tipos de máquinas com quantidades x e y. A função custo é: $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$

Para minimizar o custo, quantas máquinas de cada tipo devem ser produzidas, se deve haver um total de 8 máquinas?

Otimização Condicionada – n Variáveis

(ii) Caso de n Variáveis e 1 Restrição

Generalizando o método para o caso de n variáveis (1 restrição)

Função Objetivo : $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

Sujeita è rstrição: $g = g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

Função Lagrange:

$$Z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) + \lambda\,[C - g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)]$$

CPO: (n + 1) equações

$$Z_\lambda = C - g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0$$

$$Z_1 = f_1 - \lambda\, g_1 = 0$$

$$Z_2 = f_2 - \lambda\, g_2 = 0$$

$$Z_n = f_n - \lambda\, g_n = 0$$

Otimização Condicionada – n Variáveis

b) Caso de n Variáveis e 1 Restrição - CSO

Função Objetivo : $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

Sujeita è restrição: $g = g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

As condições de 2a. Ordem são expressas em termos dos menores principais orlados do Hessiano

$$|H_n| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_1 \\ g_1 & Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ g_2 & Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n & Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix}$$

Otimização Condicionada – n Variáveis

b) Caso de n Variáveis e 1 Restrição – CSO

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & Z_{11} & Z_{12} \\ g_2 & Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}_{(Ordem\,3x3)}$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ g_2 & Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ g_3 & Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}_{(Ordem\,4x4)}$$

Otimização Condicionada – n Variáveis – 1 Restrição
Critérios para pontos extremos

Condição	Máx. Local	Mín. Local
CPO	$Z_\lambda = Z_1 = Z_2 = \ldots Z_n = 0$	$Z_\lambda = Z_1 = Z_2 = \ldots Z_n = 0$
CSO	$\lvert\overline{H}_2\rvert > 0;\ \lvert\overline{H}_3\rvert < 0;\ \lvert\overline{H}_4\rvert > 0$ Inverte o sinal	$\lvert\overline{H}_2\rvert;\ \lvert\overline{H}_3\rvert;\ldots,\ \lvert\overline{H}_n\rvert < 0$ Sempre negativo

Otimização Condicionada – n Variáveis – 1 Restrição

Exercícios – Chiang 12.2 - Escreva as funções de Lagrange e as CPO (não precisa resolver o sistema, só escrever as equações)

a) $z = x + 2y + 3w + xy - yw$

Sujeita à: $x + y + 2w = 10$

Otimizacão Condicionada

(iii) Caso de n Variáveis e m Restrições (m<n)

Função Objetivo (n variáveis):

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

m restrições: $g^j(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = c_j$

j varia de 1 a m

$m<n$

A função de Lagrange será:

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[c_j - g^j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right]$$

Otimização Condicionada

(iii) Caso de n Variáveis e m Restrições

As condições de 2a. Ordem são expressas em termos dos menores principais orlados do Hessiano orlado ou aumentado

$$|H_n| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & | & g_1^1 & g_2^1 & \ldots & g_n^1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & | & g_1^2 & g_2^2 & \ldots & g_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & | & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & g_1^m & g_2^m & \ldots & g_n^m \\ - & - & - & - & | & - & - & - & - \\ g_1^1 & g_1^2 & \ldots & g_1^m & | & Z_{11} & Z_{12} & \ldots & Z_{1n} \\ g_2^1 & g_2^2 & \ldots & g_2^m & | & Z_{21} & Z_{22} & & Z_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & | & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_n^1 & g_n^2 & \ldots & g_n^m & | & Z_{n1} & Z_{n2} & & Z_{nn} \end{vmatrix}$$

Otimização Condicionada

(iii) Caso de n Variáveis e m Restrições

Onde:

$g_i^j = \dfrac{\partial g^j}{\partial x_i}$ são as derivadas das funções de restrições

Z_{nn} = *derivada parciais de segunda ordem da função Lagrange*

Menores principais formados a partir de H:

$|H_2|$ último elemento da diagonal principal é Z_{22}

$|H_3|$ último elemento da diagonal principal é Z_{33}

….

Otimização Condicionada - n variáveis e m restrições

Condição	Máx. Local	Mín. Local
CPO	$Z_\lambda = Z_1 = Z_2 = \ldots Z_n = 0$	$Z_\lambda = Z_1 = Z_2 = \ldots Z_n = 0$
CSO	$\lvert\overline{H}_{m+1}\rvert; \lvert\overline{H}_{m+2}\rvert; \ldots \lvert\overline{H}_n\rvert$ Alterna o sinal O sinal de $\lvert\overline{H}_{m+1}\rvert$ é o de $(-1)^{m+1}$	$\lvert\overline{H}_{m+1}\rvert; \lvert\overline{H}_{m+2}\rvert; \ldots \lvert\overline{H}_n\rvert$ Mesmo sinal O sinal de $\lvert\overline{H}_{m+1}\rvert$ é o de $(-1)^m$

O número de restrições (par ou ímpar) faz diferença

Ex: n = 15 (15 variáveis) m = 10 (10 restrições)

Menores principais: 15-10=5

$H_{11}; H_{12}; H_{13}; H_{14}; H_{15}$

Sinal Máximo:

$$\lvert\overline{H}_{11}\rvert = (-1)^{11} < 0$$

$$\lvert\overline{H}_{11}\rvert < 0; \lvert\overline{H}_{12}\rvert > 0; \lvert\overline{H}_{13}\rvert < 0 \lvert\overline{H}_{14}\rvert > 0 \lvert\overline{H}_{15}\rvert < 0$$